THEMA

LERNSCHWIERIGKEITEN IN DER MATHEMATIK

Eine Untersuchung über die Schwierigkeiten griechischer Schüler und Schülerinnen in der schriftlichen Division sowie über die Evaluation unterrichtlicher Fördermaßnahmen

Dissertation
zum Erwerb des Grades
eines Dr. phil. im Fb 2
(Erziehungswissenschaft, Psychologie, Sport- und Bewegungswissenschaften)
UNIVERSITÄT – GESAMTHOCHSCHULE – ESSEN

vorgelegt von: Charitini Iordanidou
Geburtsort: Kavala – Griechenland

Datum der Disputation: 17.01.2002

GutachterIn: Prof. Dr. Beatrix Lumer, UG Essen
Prof. Dr. Franz Wember, Universität Dortmund

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei denjenigen bedanken, ohne die diese Arbeit nicht entstanden wäre. Frau Prof. Dr. Beatrix Lumer verdanke ich die kontinuierliche Förderung in den letzten Jahren. Ihre weiterführenden Anregungen und ihre konstruktive Kritik verhalfen mir, die Arbeit als Dissertation abzurunden. Herrn Prof. Dr. Franz Wember möchte ich für seine wertvollen Vorschläge, Anstöße und aufbauenden Ideen danken. Bedanken möchte ich mich auch bei Frau Dr. Claudia Benholz. Durch die Höhen und Tiefen meiner Promotionsphase hat sie mich begleitet und unterstützt. Mein besonderer Dank gilt darüber hinaus den jungen Probanden und ihren Lehrern, die an der empirischen Untersuchung teilnahmen und die zu den Ergebnissen dieser Studie beitrugen. Die Zusammenarbeit mit allen diesen Menschen bereicherte meine Arbeit und mich selbst. Zuletzt möchte ich mich herzlich bei meiner Familie bedanken, die alles dazu beigetragen hat, um mir die Arbeit zu erleichtern.

Meinen Eltern
Magdalini und Ioannis

und meinem Bruder Antonis

„Etwas nicht zu wissen, ist in der Regel
ein Stadium auf dem Weg zu einer neuen Erkenntnis.“

(aus: Jostein Gaarder, Sofies Welt, 1993).

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

Der Bereich der Lernbehinderungen beschäftigt die Erziehungswissenschaften schon seit Jahrzehnten. Dies führte zu der Entwicklung einer eigenen Wissenschaft, die sich in den größten Bereich der Sonderpädagogik eingliedern lässt und sich mit dem Lernprozess, den nötigen Voraussetzungen und Bedingungen und dabei möglichen Störungen befasst.
Innerhalb dieses Wissenschaftsbereiches liegt auch die in der vorliegenden Arbeit behandelte Thematik. Zentrales Augenmerk wird hier auf die Lernschwierigkeiten von Schülern und Schülerinnen gerichtet, die den schulischen Leistungsanforderungen nicht in dem erwarteten Maß zu entsprechen vermögen. Diese Schwierigkeiten gefährden oder verhindern oft das Erreichen eines Schulabschlusses. Sie treten allerdings nicht nur in den letzten Schuljahren auf, sondern sind in allen Stufen des Erziehungssystems zu finden. Man kann sie meistens in den Hauptfächern Sprache und Mathematik lokalisieren, und spricht hier von Lese-Rechtschreib- und Rechenschwächen.

Die vorliegende Arbeit fasst die Rechenstörungen ins Auge und fokussiert die Bedingungen in diesem Bereich in Griechenland. Die Arbeit beschreibt weitgehend wissenschaftliches Neuland, da sich in Griechenland zwar seit einigen Jahren Wissenschaftler mit den Lese- und Rechtschreibschwächen der Schüler befasst haben und auch eine eigene Literatur vorhanden ist, selbiges jedoch nicht für das Fach Mathematik gilt. Die wenigen und unzureichenden Untersuchungen, die zu diesem Gegenstand durchgeführt wurden, spiegeln sich in der spärlichen Literatur zu dieser Thematik. Das geringe wissenschaftliche Interesse lässt jedoch keinesfalls den Rückschluss zu, dass das Problem der Rechenschwäche in Griechenland zu vernachlässigen wäre. Das Gegenteil ist der Fall. Auch in Griechenland leidet eine große Gruppe von Schülern und Schülerinnen unter ihrem Versagen im Mathematikunterricht. Das besagen die Ausführungen von Markovitsis & Zouriadou (1991, S. 48), Troulis (1992, S. 189), Filippou (1992, S. 87), Karageorgos (1996b, S. 238), Boufi (1997, S. 29).

Das Interesse der Verfasserin an diesem Thema wurde durch erste Erfahrungen in einem Praktikum, das im Rahmen des Studiums für das Lehramt Primarstufe absolviert wurde, geweckt. Hier fiel auf, dass eine große Zahl von Schülern eine Abneigung gegen Mathematik empfand, was an ihren Kommentaren und Gesichtszügen zu erkennen war. Diese Haltung resultierte aus den Schwierigkeiten, die sie in diesem Fach hatten. Genauso ratlos schienen auch die Eltern zu sein, die oft selbst negative Einstellungen aus ihrer eigenen Schulzeit gegenüber diesem Fach hatten.
Auf der anderen Seite war die Voreingenommenheit vieler Lehrerinnen und Lehrer in Bezug auf die Fähigkeiten bestimmter Schüler zu spüren. Dies erinnerte an die leichtsinnige, doch oft ausgesprochene Kategorisierung der Schülerinnen und Schüler in solche, die Mathematik „können" und solche, die es „nicht können". Hierzu muss unbedingt erwähnt werden, dass die griechische Gesellschaft besonders stark auf Schulerfolg fixiert ist. Es wird großer Wert auf hohe schulische Leistungen gelegt, womit zugleich Intelligenz, Anerkennung und erfolgreiche Zukunftsperspektiven verbunden werden. Dies hat zur Folge, dass Lernschwierigkeiten einen Schüler früh „abstempeln" und die Eltern mit Sorgen erfüllen.

Diese Situation erinnerte die Verfasserin an persönliche Ängste vor Mathematik, die trotz zufriedenstellender Leistungen immer präsent waren. Der Wunsch und die Hoffnung, die Schwierigkeiten in diesem Fach zu beschreiben und interpretierbar zu machen, didaktische Lösungsansätze zu entwickeln und die Einstellungen der Schüler zu diesem Fach zu verändern, waren die Hauptmotive für diese Arbeit.

Der Bereich der Rechenstörungen ist sehr umfangreich und umfasst die Rechenfertigkeiten und das Sachrechnen, letztendlich alle Kapitel der Mathematik. Deshalb muss der Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit eingegrenzt werden.

Die vorliegende Arbeit zielt auf die theoretische und praktische Auseinandersetzung mit den Schwierigkeiten, die in der Unterrichtung der Division der natürlichen Zahlen auftreten. Sie lässt sich in den Bereich der angewandten Pädagogik eingliedern. Es werden folgende Fragestellungen aufgegriffen:

a. Wie werden Lernbehinderungen und Lernbehinderte allgemein definiert, wie sieht die Entstehungsgeschichte von Lernbehinderungen aus und welche Bestimmungen wurden für lernbehinderte Schüler erlassen?
b. Wie wird der Mathematikunterricht in Griechenland gestaltet, welche Inhalte umfasst der mathematische Lehrstoff der Primarstufe in Griechenland und wie werden diese in der Unterrichtspraxis umgesetzt?
c. Welche Themenbereiche bereiten den Schülern die größten Verständnisschwierigkeiten?
d. Welche Schwierigkeiten treten in dem Algorithmus der Division auf und welche Fehlermuster resultieren daraus? Verwenden die Schüler ausschließlich die im Unterricht vorgestellten Rechenstrategien oder entwickeln sie eigene Rechenwege, um leichter zu einer Lösung zu gelangen?
e. Können die lokalisierten Lernschwierigkeiten der Schüler in der Division in einem Förderunterricht behoben werden? Wie müsste ein solcher Förderunterricht konzipiert und durchgeführt werden?

Diese Fragestellungen bestimmten auch die Gliederung und die Einteilung der Kapitel dieser Arbeit. Um den theoretischen Rahmen der Lernbehinderungen aufzuzeigen, wird im *ersten Kapitel* ein kurzer Bezug auf die bisherigen wissenschaftlichen Erkenntnisse genommen. In diesem Zusammenhang wird mangels entsprechender griechischer Forschungen auf theoretische Ansätze in Deutschland eingegangen. Außerdem werden zwei zentrale amerikanische Positionen zu dieser Thematik vorgestellt, die zumeist in der griechischen Lehrerausbildung vermittelt werden.

Im *zweiten Kapitel* wird zusammenfassend der Lehrstoff vorgestellt, der für den Mathematikunterricht der Primarstufe im griechischen Bildungswesen vorgesehen ist. Das geschieht anhand der Lehrwerke des Bildungsministeriums. Diese Darstellung soll dem Leser einen Eindruck davon vermitteln, welchen Richtlinien der Mathematikunterricht in Griechenland unterliegt, mit welchen Lehr- und Lernmaterialien er arbeitet und wie die praktische Durchführung aussieht. Gleichzeitig wird auch ein deutsches Lehrwerk („Das Zahlenbuch") vorgestellt, dass als Alternative anzusehen ist.

Im *dritten Kapitel* setzt der empirische Teil der Arbeit an. Die Forschungsmethodik wird zunächst gemäß der gesetzten Ziele festgelegt und es folgt ein Überblick über die Untersuchung.

Anschließend werden im *vierten Kapitel* in der ersten Phase der Untersuchung die Themenbereiche gesucht, die den höchsten Schwierigkeitsgrad für die Schüler aufweisen. Dazu werden die Lernkontrollen, die in den Lehrbüchern beinhaltet werden, in Betracht gezogen. Das Studieren dieser Lernkontrollen weist auf die fehleranfälligsten und wahrscheinlich auch schwierigsten Inhalte hin. Als die fehleranfälligste Rechenoperation erwies sich

in der vierten Klasse, wie erwartet, die Division. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die Forschung nur noch auf diese Rechenoperation fokussiert.
In der zweiten Phase der Untersuchung wird ein diagnostischer Test eingesetzt, um die Schwierigkeiten der Schüler, bezogen auf die Division, festzustellen. Es ergeben sich Fehlerkategorien, die näher beschrieben und analysiert werden. Zusätzlich werden Hypothesen zur Entstehung dieser Fehlermuster aufgestellt. Die Durchführung von Interviews soll in der dritten Phase die Fehlerinterpretation beleuchten und die Denkstrategien der Schüler zum Vorschein bringen. Gleichzeitig ergeben sich auch neue Strategien, die dem mathematischen Verständnis der Schüler entstammen.

Im *fünften* und letzten Kapitel erfolgt eine Anwendung der vorgeschlagenen didaktischen Lösungswege im Rahmen eines Förderunterrichts. Abschließend wird ein Nachtest durchgeführt, um die Lernfortschritte der Schüler festzustellen. Bei der Messung des Lernfortschritts wird die individuelle Bezugsnorm zugrundegelegt, d. h. jeder Schüler wird nach Maßgabe seiner Verbesserung oder Verschlechterung beurteilt (vgl. Klauer, 1994, zitiert nach Scherer, 1995).

1 Theoretische Grundlagen

Ein überall auftretendes Phänomen in der uns umgebenden Natur ist die Heterogenität und Vielfalt ihrer Arten. Dies ist auch die Grundbedeutung des Wortes Heterogenität. Durch die Analyse des zusammengesetzten Wortes in seine Bestandteile gelangt man zu dem Adjektiv „etero“ (έτερος, -έρα, -ερον) und zum Substantiv „genos“ (γένος), welche übersetzt „verschieden, unterschiedlich“ und „Genus, Art“ heißen. Diese Heterogenität kennzeichnet die ganze Evolutionsgeschichte und hat zur Folge, dass in der Natur Organismen derselben Art, die völlig identisch sind, nicht existieren. Jeder genetische Code ist einmalig, ihm kann in natürlichen Umgebungen nicht noch einmal begegnet werden.

Die Entwicklung der Biologie und Gentechnologie hat es jedoch heutzutage ermöglicht, denselben genetischen Code zu vermehren und so geklonte Organismen ins Leben zu rufen. Diese Errungenschaft war jedoch nur in der künstlichen Umwelt der Laboratorien möglich und ist daher künstlich und von Menschen konstruiert. In der natürlichen Umgebung bleibt die Einmaligkeit und Heterogenität höchstes Gebot.

Bezogen auf die Gattung Mensch, gilt diese Heterogenität als natürliches Gesetz und beeinflusst die Entwicklung jedes Menschen. Es gibt Unterschiede von Mensch zu Mensch, bezogen auf die Körperbildung, die muskulöse Kraft, die Aktivität, die Interessen, die Sozialisation, die Willensstärke, usw. Die sogenannten interpersonellen Unterschiede werden als natürliche Erscheinung des menschlichen Daseins angesehen und dienen der Vielfalt in unserer Gesellschaft. Sobald aber interpersonelle Unterschiede die reibungslose Entwicklung und Anpassung des Menschen an seine Umwelt behindern, werden diese zu Abweichungen von dem „Normalen“ erklärt. Diese Abweichungen wurden im Laufe der Zeit als Störungen, Ausfälle, Schwächen, Schwierigkeiten, Behinderungen und vieles mehr beschrieben.
Ja nach Art und Grad der Abweichung werden die betroffenen Personen bestimmten Kategorien zugeordnet, die international anzutreffen und anerkannt sind: Personen mit Sehbehinderungen, mit Körperbehinderungen, mit Hörschädigungen, mit geistiger Behinderung, mit Verhaltensstörungen, mit Sprachstörungen, mit Lernbehinderungen. Die betroffenen Personen gelten als behindert und werden auch so genannt.

Kinder mit solchen Behinderungen können im Rahmen des herkömmlichen Unterrichts nicht angemessen gefördert werden. Aus diesem Grund wurden spezielle Richtlinien verfasst und spezifische Methoden entwickelt, die den Bedürfnissen der Behinderten entgegenkommen. Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf Kinder, die Lernschwierigkeiten oder Lernbehinderungen aufweisen. Diese Kinder „tun sich schwer“ beim Spracherwerb und beim Erlernen der grundlegenden Fähigkeiten des Schreibens, des Lesens, der Rechtschreibung und des Rechnens. Im folgenden Kapitel wird der theoretische Rahmen von Lernbehinderungen bzw. Lernschwierigkeiten aufgezeichnet. Es werden die Definitionsversuche vorgelegt, die im Laufe der Zeit das Verständnis der Sonderpädagogik beeinflussten. Die Entstehung von Lernbehindertenschulen, die Beschreibung der Personengruppe der Lernbehinderten und die Entstehungsursachen von Lernbehinderungen bilden die zentralen Themenbereiche. Abschließend werden die Maßnahmen beschrieben, die für die Förderung von lernbehinderten Kindern getroffen wurden. Die Behandlung dieser Punkte erfolgt jeweils auf zwei Ebenen: Zuerst wird die Situation in Deutschland und anschließend die in Griechenland dargestellt.

1.1 Begriffsbestimmung von Behinderung, bzw. Lernbehinderung

Der Behinderungsbegriff wurde Ende der sechziger / Anfang der siebziger Jahre vom Sozialrecht übernommen und stützt seitdem das sonderpädagogische Paradigma. Indem Bleidick diesen Begriff in Bezug zu dem der „Erziehung“ setzte, verlieh er ihm pädagogische Relevanz und legitimierte somit seine Existenz in der Begriffssystematik der Sonderpädagogik (vgl. Eberwein, 1996a, S. 17ff.). Hätte man damals voraussehen können, welche Konflikte dieser Begriff in der Fachdisziplin verursachen würde, wäre man wohl bei seiner Verwendung vorsichtiger gewesen. Konflikte ergaben sich vor allem aus den unterschiedlichen Definitionsansätzen zu dem Begriff „Behinderung“.

Im Bereich der Sonderpädagogik gab es bis heute zahlreiche Versuche, den Begriff der Behinderung, bzw. Lernbehinderung zu klären und die Definition zu präzisieren. Gleichzeitig wurden auch mehrere verwandte Bezeichnungen ins Gespräch gebracht, die die Abweichungen im Lernen beschreiben sollten: Schulversagen, Schulschwierigkeiten, Schulminderleistung, Schulleistungsschwäche und vieles mehr (vgl. Schröder, 1990, S. 40). Tatsache ist jedoch, dass „bis heute auf keine eindeutige, dem Problembereich exakt und umfassend bestimmbare Begriffsbildung (…) zurückgegriffen werden (kann)“ (Eberwein, 1996b, S. 37). Nach einem 30jährigen Meinungsaustausch bleibt die Antwort auf diese Frage immer noch offen und „der Prozeß der Begriffsbildung in der Sonderpädagogik kann nicht als abgeschlossen betrachtet werden“ (vgl. auch Schmetz, 1993, zitiert nach Eberwein, 1996b, S. 40).

In Übereinstimmung mit Schröder (1990, S. 44) kann man sagen, dass die Begriffserörterung ein „trockenes“ Geschäft ist. Es ist jedoch unbedingt erforderlich, da von der Behinderungsdefinition auch die Bestimmungen für die betroffenen Personen abhängig gemacht werden (vgl. Sander, 1994, S. 99). Im Folgenden werden daher einige Definitionsansätze zu den Begriffen „Behinderung“ und „Lernbehinderung“ vorgestellt, die das Verständnis der Lernbehindertenpädagogik lange Zeit geprägt und beeinflusst haben. Nach dieser historischen Betrachtung wird die heutige Bedeutung des Behinderungsbegriffs aufgezeigt, die Ansätze, die zur Zeit in der Sonderpädagogik an Bedeutung gewinnen, werden vorgestellt.

Bach (1975) benutzt in seiner „Sonderpädagogik im Grundriß“ den Begriff Beeinträchtigung als Oberbegriff für alle den Lernprozeß und den Lernaufbau negativ beeinflussenden Momente. Für die Beschreibung von Behinderung führt er drei Merkmale auf, die gleichzeitig eine (Lern)Behinderung von einer (Lern)Störung abgrenzen. Bei Behinderungen handelt es sich um *umfängliche*, *schwere* und *langfristige* individuale Beeinträchtigungen, wobei die Störungen partiell, weniger schwer oder kurzfristig ausfallen (1975, S. 9ff.). Seine Begrifflichkeit übernahm Kanter später, auch verschiedene Bildungspläne für Sonderschulen gehen hierauf zurück (vgl. Eberwein, 1996b, S. 44).

Bleidick versteht Behinderung in seiner 1972 erschienenen „Pädagogik der Behinderten“ (S. 120) als Erziehungs- und Bildungsbehinderung aufgrund einer primären Schädigung (Sehschädigung, Hörschadigung, Sprachschädigung, usw.).

Unter Mitwirkung von Bach, Bleidick und anderen Fachleuten wurde auch die Definition der Behinderung vom **Deutschen Bildungsrat** 1979 erarbeitet:

> „Als behindert gelten im erziehungswissenschaftlichen Sinne alle Kinder, Jugendlichen und Erwachsenen, die in ihrem Lernen, im sozialen Verhalten, in der sprachlichen Kommunikation oder in den psychomotorischen Fähigkeiten so weit

> beeinträchtigt sind, dass ihre Teilhabe am Leben der Gesellschaft wesentlich erschwert ist“ (Deutscher Bildungsrat, 1979, S. 32).

Hinzu kommen die Begriffserläuterungen zur „Lernbehinderung“. **Bleidick** (1968) definiert „Lernbehinderung“ als synonym mit „Intelligenzschwäche“, welche er als Primärursache für die Sonderschulbedürftigkeit ansieht. **Kanters** Definition (1977, S. 35) für Lernbehinderung ähnelt in ihren Grundzügen der zuvor vorgestellten Definition von Bach. Lernbehinderung wird als schwerwiegende, umfängliche und langdauernde Beeinträchtigung der Lernprozesse beschrieben.

Auch in den **KMK**-„Empfehlungen für den Unterricht in der Schule für Lernbehinderte (Sonderschule)“ von 1977 werden Kinder und Jugendliche als lernbehindert bezeichnet, „die umfänglich und langdauernd in ihrem Lernen beeinträchtigt sind, dadurch deutlich von der Altersnorm abweichende Leistungs- und Verhaltensformen aufweisen und trotz des Angebotes besonderer Lernhilfen in der Grund- und Hauptschule nicht oder nicht hinreichend gefördert werden können. Das Leistungs- und Verhaltensbild lernbehinderter Schüler ist vor allem durch eine herabgesetzte schulische Lernleistung gekennzeichnet. Sie ist in der Regel verbunden mit einem meßbaren, deutlichen Intelligenzrückstand“ (Kultusministerkonferenz, 1977, S. 4).

Nach diesen Definitionen sind die Merkmale der Behinderung, bzw. Lernbehinderung bei der betreffenden Person zu suchen. „Hinter Versuchen dieser Art steht ein personalistisches, individuumzentriertes Behinderungsverständnis, das auf der biologischen Defekttheorie bzw. dem Schwachsinnbegriff basiert“ (Eberwein, 1996b, S. 43). Die lange vorherrschende personalistische Betrachtung von Behinderung hatte zur Folge, dass bei der Begründung von Behinderung soziale und interaktionistische Faktoren nur bedingt einbezogen wurden (vgl. Eberwein, 1996a, S. 16). In den folgenden Jahren wurde die strenge defektspezifische Betrachtungsweise relativiert, was sich in den neuen Definitionen niederschlug.

Die Weltgesundheitsorganisation **WHO** entwickelte 1980 ein international anerkanntes Klassifikationssystem zur Beschreibung von Behinderungen, genannt „International Classification of Impairments, Disabilities, and Handicaps“. Für die drei genannten Dimensionen gab es in der deutschen Literatur mehrere Übersetzungen. Hier wird auf die Übersetzung des Bundesministers für Arbeit zurückgegriffen, und zwar in der von Jantzen modifizierten Form. Demnach wird Behinderung als eine „auf eine Schädigung oder Leistungsminderung zurückgehende Benachteiligung [verstanden], die einen Menschen teilweise oder ganz daran hindert, eine Rolle auszufüllen, die für ihn nach Alter, Geschlecht und sozio-kulturellen Faktoren normal wäre“ (vgl. Sander, 1994, S. 104). Die Behinderung fällt somit auf die soziale Umwelt zurück, da sie die Rollen bestimmt (ebd.).

Bleidick benutzt eine Tautologie, um die Lernbehinderten zu umschreiben: „Lernbehindert ist, wer eine Schule für Lernbehinderte besucht“ (l980, S. 130). Behindertsein wird von ihm als „ein komplexer Prozeß von Ursachen und Folgen, unmittelbaren Auswirkungen, individuellem Schicksal und sozialen Konsequenzen“ beschrieben (Bleidick, 1994, S. 650).

Baier schlägt vor, „Lernbehinderungen als verschiedenartige Erscheinungsweisen von unterschiedlichen Defiziten zu erkennen, die multifaktoriell bedingt sind, und bei denen sich insbesondere biologische und soziale Beeinträchtigungen gegenseitig bedingen, beeinflussen und auch verstärken“ (1983, S. 15). Aus diesem Grund empfiehlt er die Ausdrucksweise „lernbehinderte Kinder“ durch „Kinder und Jugendliche mit Lernbehinderungen“ zu ersetzen (ebd.).

Auch **Bach** und **Kanter** verändern ihre individualistische Betrachtungsweise. „…Behinderung ist ihrem Wesen nach keine Eigenschaft, sondern eine Relation zwischen individualen und außerindividualen Gegebenheiten“ (Bach, 1985, S. 6ff.). „Der Begriff `Lernbehinderung´ sagt deshalb nichts über eine etwaige spezifische Schädigung eines Kindes oder einen persönlichen Mangel aus, sondern weist nur auf die Tatsache hin, dass ein Schüler einer spezifischen Förderung bedarf, um seine Fähigkeiten angemessen entwickeln zu können“ (Kanter, 1994, S. 688).

Aus den vorstehenden Begriffsbestimmungen wird deutlich, dass seit einiger Zeit das Verständnis von Behinderung eine Wandlung erfährt. Behinderung wird als komplexer Prozess erkannt, der multifaktoriell bedingt ist und nicht allein der betroffenen Person zugeschrieben werden kann. Eine exaktere Beschreibung liegt jedoch bisher noch nicht vor.

Heute wird übereinstimmend akzeptiert, dass es sich bei Behinderung um einen relationalen und relativen Begriff handelt (vgl. Eberwein, 1996a, S. 23). Im Mittelpunkt steht nicht mehr die Schädigung eines Kindes, sondern das individuelle Kind-Umwelt-System. Die Art der Schädigung wird zwar berücksichtigt, sie ist aber nicht maßgeblich, denn der Blickwinkel wird erweitert. Berücksichtigt wird nunmehr auch, dass das Kind in einer bestimmten Umwelt lebt. Diese umfasst im Engeren die Familie, die Schule, den Freundeskreis, im Weiteren das Wohnviertel, das Bundesland, die Gesellschaft und die Subkultur. Diese außerindividualen Gegebenheiten wirken auf das Kind ein und bestimmen in hohem Maße seine Lebensverhältnisse und seine individuellen Züge. Sie bilden die „Ökologie“ des Menschen, („ökologische“ Faktoren genannt) und gewinnen somit besonders an Bedeutung. Alle diese Bereiche stehen in Wechselwirkung zueinander. Da sie ein System bilden (Kind-Umwelt-System), stehen sie auch in systemischen Zusammenhängen zueinander (vgl. Sander, 1988, S. 336ff.). Dieses Wirkungsgefüge beschreibt der „**ökosystematische** Ansatz“, der im Gegensatz zu dem „medizinischen Modell“ steht.

Jedes Individuum wird als ein autonomes und autopoietisches Wesen erkannt, das seinen inneren Strukturen folgt, sich selbst steuert und organisiert und seine Wirklichkeit konstruiert. Lernen und Entwicklung verlaufen in eigenaktiver Auseinandersetzung mit der Umwelt. Lehrende und Lernende treffen sich in einer `Driftzone´ und bauen eine Energiezone für Lernprozesse auf (Maturana, 1990; Kösel 1995, zitiert nach Schmetz, 1999, S. 135), wobei die Handlungen beider Beteiligten gleich wichtig sind (Rotthaus, 1999, zitiert nach Schmetz, 1999, ebd.). Aufgabe der Erziehung bzw. des Unterrichts ist es, „die Lernprozesse des Kindes zu aktivieren und anzuregen und entsprechende Lernumwelten zu gestalten“ (Schmetz, ebd.). Tritt eine Asymmetrie zwischen Lehren und Lernen ein, wird von einer Lernbehinderung gesprochen. Diese wird als eine nicht gelungene und fehlende Passung zwischen den individuellen Lernmöglichkeiten des Kindes und der normativen Erwartungshaltung der Schule verstanden (ebd.). Demnach lässt sich eine Behinderung als gestörte Integration eines Menschen in sein Umfeld definieren: „Behinderung liegt vor, wenn ein Mensch auf Grund einer Schädigung oder Leistungsminderung ungenügend in sein vielschichtiges Mensch-Umfeld-System integriert ist“ (Sander, 1994, S.105).
Diesem Ansatz zu Folge hat der pädagogische Handlungsplan nicht nur das betroffene Kind (wie es die traditionelle Sonderpädagogik verstand), sondern auch die Umfeldbedingungen in interaktions-orientierter Arbeit zu erfassen und miteinzubeziehen (vgl., ebd.) „Eine systemische und lebensweltorientierte Sichtweise könnte das bisher monokausale Denken und damit die einseitige biologisch defektorientierte Betrachtung überwinden“ (E-

berwein, 1996a, S. 26). Das (Lern)Behinderte Kind kann heute nicht mehr auf seine Defekte und Defizite reduziert werden, sondern muss in möglichst allen seinen Bezügen gesehen werden. Eine Behinderung darf nicht mehr als Abnormität bewertet werden. Jeder Mensch muss demnach so akzeptiert werden, wie er ist. Normierungen, die in der Vergangenheit zur Aussonderung der betroffenen Person dienten, sollten möglichst vermieden werden. Gefragt ist nicht mehr die Homogenität in Klassen, sondern der gemeinsame Unterricht, das gemeinsame Lernen, die Förderung der Entwicklung, der Identität und Autonomie aller Kinder. Die traditionelle Sonderpädagogik sprach von Normalitäten, Normen und von „Sonder"menschen (sprich Behinderten). So legitimierte sie nicht nur sonderpädagogisches Eingreifen, sondern auch die Aussonderung von Behinderten (vgl. Eberwein, 1995, S. 470ff.).

In der griechischen Literatur wurde keine eigene Terminologie zu Lernbeeinträchtigungen entwickelt. Schüler mit beträchtlichen Schwierigkeiten, besonders in den Hauptfächern, hat es schon immer gegeben, wie auch in jedem anderen Land. Es gab jedoch bis 1984 kein Konzept von Seiten des Staates zur Intervention und infolgedessen auch keine entsprechende Literatur. Anfang der 70er Jahre erschienen mehrere amerikanische Bücher in griechischer Übersetzung, die das Bildungssystem und die Bildungskonzepte in Amerika aufzeigten. Besonders das Werk von Samuel Kirk „Educating exceptional children" fand in der griechischen wissenschaftlichen Diskussion große Resonanz. Kirk führte den Begriff „Learning disabilities" im amerikanischen Kongress ein, den man schnell auch in Europa übernahm. Zu dieser Zeit kehrten viele Griechen, die ihr Studium oder ihre Fortbildung in Amerika absolviert hatten, wieder nach Griechenland zurück. Der Einfluss der amerikanischen Literatur ist seitdem deutlich zu spüren. Die Akzeptanz und Adaption der amerikanischen Begriffe wurde durch die Tatsache verstärkt, dass das politische System des Landes starken Einflüssen besonders von den Vereinigten Staaten unterlag (vgl. Kouroumplis, 1994, S. 70). Inoffiziell sprach man daher seit dieser Zeit über Lernschwierigkeiten und Möglichkeiten der Intervention.

Im Griechischen existieren bis heute keine exakten differenzierten Begrifflichkeiten, die dieses Phänomen beschreiben. Meistens wird von Lern- und Schulschwierigkeiten gesprochen; dem Begriff „Lernbehinderung" begegnet man nicht. Begriffe wie Schwächen, Auffälligkeiten, Abweichungen und Störungen werden verwendet, um die Lernschwierigkeiten zu explizieren. Im Allgemeinen werden jedoch die theoretischen Ansätze der amerikanischen Fachliteratur rezipiert und umgesetzt (Koliadis, 1995, S. 8), an bestimmten Punkten modifiziert und angepaßt. Zwei amerikanische Auffassungen von Lernschwierigkeiten können als repräsentativ gelten, und werden nachstehend in englischer Sprache vorgestellt, um die Originaltreue zu gewährleisten.
Die erste Sichtweise stammt aus der staatlichen Gesetzgebung 1975 und zwar aus dem Gesetz für die Erziehung aller Kinder mit speziellen Bedürfnissen:

> „The term \`children with specific learning disabilities´ means those childern who have a disorder in one or more of the basic psychological processes involved in understanding or in using language, spoken, or written, which disorder may manifest itself in imperfect ability to listen, think, speak, read, write, spell, or to do mathematical calculations. Such disorder include such conditions as perceptual handicaps, brain injury, minimal brain dysfunction, dyslexia, and developmental aphasia. Such term does not include children who have learning problems which are primarily the result of visual, hearing, or motor handicaps, of mental retardation, of emotional disturbance, or of environmental, cultural, or economic disadvantage" (Kirk & Gallagher 1988, zitiert nach Koliadis, 1995, S. 5).

Die zweite Definition erschien 1981:

> „Learning disabilities is a generic term that refers to a heterogeneous group of disorders manifested by significant difficulties in the acquisition and use of listening, speaking, reading, writing, reasoning or mathematical abilities. These disorders are intrinsic to the individual and presumed to be due to central nervous system dysfunction. Even though a learning disability may occur concomitantly with other handicapping conditions (e. g., sensory impairment, mental retardation, social and emotional disturbance) or environmental influences (e. g. cultural differences, insufficient/inappropriate instruction, psychogenic factors), it is not the direct result of those conditions or influences.(p. 336)" (Kirk & Gallagher, 1983, S. 369).

Beide Definitionen stellen organische Funktionsstörungen und biologische Schäden als Ursachen für auftretende Lernschwierigkeiten in den Mittelpunkt. Sie erinnern daher an die medizinischen defektorientierten Erklärungsansätze in Deutschland. Hierbei werden im Gegensatz zu den deutschen Definitionen neurologische Dysfunktionen in der Ätiologie des Phänomens betont. Lernschwierigkeiten werden der betroffenen Person als individuelles Merkmal zugeschrieben. Dabei bleiben psychische und umweltbedingte Faktoren sekundär, da sie nicht unmittelbar zu einer Lernstörung führen können.

Auch in Griechenland war es nicht möglich, sich auf eine Definition von Lernschwierigkeiten zu einigen. Die Deutung und Definition der Lernschwierigkeiten sind abhängig von der Qualifizierung und der wissenschaftlichen Orientierung des jeweiligen Forschers. Bei dem Versuch, die verschiedenen Ansätze zu gruppieren, entstehen folgende Kategorien:

a. der medizinisch-biologische Ansatz

   Die Lernschwierigkeiten sind intern / persönlichkeitsimmanent und auf eine Dysfunktion und Desorganisation des zentralen Nervensystems zurückzuführen.

b. der psychologisch-pädagogische Ansatz

   Pädagogische Aspekte und das Lernverhalten des Schülers werden fokussiert. Schüler mit Lernschwierigkeiten erbringen Leistungen, die nicht ihrem Alter und ihrem Intelligenzpotential entsprechen.

c. der kombinierte Ansatz

   Der bereits erwähnte medizinisch-biologische und der psychologisch-pädagogische Ansatz werden kombiniert.

Nach Koliadis wird erst seit kurzer Zeit die Erforschung des Problembereiches „Lernschwierigkeiten" durch den medizinischen Ansatz erweitert. Demnach erhalten didaktisch-pädagogische Maßnahmen nunmehr beim Erkennen und Beheben von Lernschwierigkeiten einen größeren Stellenwert (vgl. Koliadis, 1995, S. 8).

Natürlich spielen auch organische und genetische Faktoren eine entscheidende Rolle in der Entwicklung des Kindes. Durch den raschen Fortschritt der Genforschung lassen sich mittlerweile viele unerwünschte Entwicklungen pränatal voraussehen oder postnatal erkennen, so dass eine gezielte Intervention ermöglicht wird. Das gilt für Lernschwierigkeiten, die durch Beeinträchtigungen der visuo-motorischen Integration, Störungen im Körperschema, im taktil-kinästhetischen Bereich, in der auditiven und visuellen Wahrnehmung und Speicherung verursacht werden (vgl. Lorenz & Radatz, 1993, zitiert nach Scherer, 1995, S. 24). Man kann dennoch nicht bestreiten, dass der Einfluss des Umfeldes beim Werdegang des Kindes von ausschlaggebender Bedeutung ist. In der deutschen Literatur wird das Umfeld des Kindes und hier insbesondere die familiären, die sozio-kulturellen und die schulischen Faktoren zum zentralen Ausgangspunkt. Die Wechselwirkungen dieser Faktoren werden im schulischen Bereich offensichtlich. Sie können den Schulgang des Kindes fördern oder hemmen sowie Lernschwierigkeiten hervorrufen oder vermindern. In diesen Fällen wäre die Schule der ideale Ort, um die Defizite der Schüler (z. B. im Sprachgebrauch, in den Vorerfahrungen, und in den Arbeitsstrategien), die auf eine reizarme oder lernhemmende Umgebung zurückzuführen sind, mit entsprechenden Maßnahmen zu kompensieren. Die Schule wird also zum Kulminationspunkt aller kulturellen und umweltbedingten Faktoren. Dabei kann die Schule die Möglichkeiten nutzen, die ihr der heutige Stand der Informationstechnologie bietet. Neben den gewöhnlichen Unterrichtsmedien (die je nach Ausstattung der Schule vom Kassettenrecorder und Overheadprojektor bis zum Diaprojektor und Videogerät reichen) gehört der Computer mit Abstand zu den beliebtesten Arbeitsmedien der Schüler. Da sie Motivation und Interesse fördern, lassen sich Lernschwächen mit geeigneten Computerprogrammen besonders erfolgreich beheben. Darüber hinaus erlernen die Schüler das selbstständige Arbeiten und erwerben soziale Kompetenzen in der Teamarbeit. Somit wird allen Kindern ein erlebnisreiches Lernen angeboten, angepasst an die persönlichen Bedürfnissen. Voraussetzung für die Effektivität der Arbeit in der Schule ist auf jeden Fall die Berücksichtigung und der Miteinbezug der Systeme Umfeld und Familie. Nach Meinung der Verfasserin ist dem ökosystemischen Ansatz der Vorzug zu geben. Er reduziert das Kind nicht auf seine organischen Defizite, sondern nimmt es auch als soziales und emotionales Wesen wahr. Wenn das Kind in die Schule kommt, bringt es nicht nur seine persönlichen Eigenschaften mit, sondern auch Prägungen aus seiner Familie und seiner Umwelt. Hierbei handelt es sich um reale Faktoren (Familie, Umfeld und Schule), die mitberücksichtigt werden müssen. Die Schule wird in ihrer Rolle verstärkt, da sie dem Kind Rückhalt geben und als Gegengewicht zur negativen Umwelt fungieren kann. Damit eröffnet sich ein weites Handlungsfeld, in dem versucht wird, alle vorhandenen Möglichkeiten auszuschöpfen, um dem Kind Hilfen anzubieten. Diese Gegebenheiten und Möglichkeiten werden im amerikanischen Ansatz ignoriert oder marginalisiert, da die organischen Aspekte übertont werden.

Bei der Erforschung von Lernschwierigkeiten sollten jedoch beide Ansätze zum Tragen kommen, da sie jeweils eigene Beiträge zur Behebung von Lernschwierigkeiten entwickeln können.

1.2 Entstehung und Entwicklung von Schulen und Klassen für Lernbehinderte

Lernbehindertenpädagogik ist ein Arbeitsgebiet der Sonderpädagogik, welches sich in dieser Form in Deutschland in den letzten drei Jahrzehnten auszubilden begann. Entwickelt hat sie sich aus der früheren Hilfsschulpädagogik. In diesem Kapitel wird rückblickend die Geschichte betrachtet, um die Entstehung der Sonderschule aufzuzeigen.

Die „Hilfsschule" und die diese später ablösende „Schule für Lernbehinderte" haben sich häufig auf Stötzner als ihren „Vater" berufen. Stötzner, Taubstummenlehrer und Leiter einer „Idiotenanstalt", beabsichtigte, eine neue Schulart ins Leben zu rufen. 1864 brachte er eine Schrift mit dem Titel „Schulen für schwachbefähigte Kinder" heraus, in der er seinen Entwurf rechtfertigte. Die neue Schule sollte Kinder aufnehmen, die nicht bildungsunfähig waren, jedoch an den Anforderungen der Volksschule scheiterten. Die Bezeichnung „schwachbefähigte Kinder" erntete Kritik und veranlasste Stötzner, seine Begrifflichkeit etwas zu entschärfen. So schlug er den Namen „Nachhilfeschule" vor. Diese Schule sollte drei wesentliche Funktionen übernehmen:

a. die Entlastungsfunktion: durch die Nachhilfeschule würde die Volksschule von diesen Schülern entlastet und befreit werden, die „nur hindern und hemmen" (vgl. Schröder, 1990, S. 19),
b. die Funktion der Kostenersparnis: die schulische und auf Erwerbstätigkeit vorbereitende Ausbildung würde die Angehörigen und die Gesellschaft davor bewahren, dass ihnen die Schwachsinnigen zur Last fallen würden (vgl. ebd., S. 19ff.).
c. die Funktion der Brauchbarkeit: durch die Ausbildung der Schwachsinnigen würde man ihre wirtschaftliche Brauchbarkeit gewährleisten (vgl. Reichmann-Rohr & Weiser, 1996, S. 23).

Stötzner plädierte mit seinem Konzept für die Aussonderung der schwachsinnigen Schüler bereits 15 Jahre vor der Einrichtung der ersten Hilfsschulen.

Ende des 19. Jahrhunderts entstanden in Mitteleuropa Anstalten für „Kretinen", „Schwachsinnige", „Idioten", usw. Die Meinungen über die Rolle, die die „Idiotenanstalten" in der Entwicklung der Hilfsschulen gespielt haben, gehen auseinander. An manchen Punkten können jedoch Parallelen gesehen werden. Viele Lehrer, die in den Hilfsschulen tätig wurden, hospitierten für einige Zeit in solchen Anstalten. Neben schwer Behinderten konnte man darin Kinder und Jugendliche finden, die bildungsfähig waren und dementsprechend Unterricht erhielten. So wurden in diesen Institutionen unterrichtliche Verfahrensweisen erarbeitet, welche die dort hospitierenden Lehrer aufgriffen (vgl. Schröder, 1990, S. 22).

Bevor die Hilfsschulen eingerichtet wurden, fand auch der Nachhilfegedanke Anwendung. Durch die Gründung von Nachhilfeklassen wurde der Versuch unternommen, zurückgebliebene Schüler zu fördern. In diesen Klassen, die als Annexe der Volksschulen zu verstehen sind, wurden Schüler nur vorübergehend betreut. Die Nachhilfeklassen blieben oft noch Jahrzehnte erhalten, auch als später die ersten Hilfsschulen entstanden (vgl. ebd., S. 24ff.).
Bedeutend ist auch die Situation der damaligen Volksschule für die Konzeption der Hilfsschulen. Nach der Einführung der Unterrichtspflicht stieg die Zahl der Schüler enorm. Die Klassenfrequenz lag bei 85 Schülern. Kinder mit Lernschwächen konnten nicht individuell gefördert werden, wiederholten einzelne Klassen und sammelten sich in den Unterklassen. Durch die Maschinisierung der Produktionsprozesse stiegen die Qualifikationsanforderungen an die Arbeiter. Gleichzeitig wuchsen auch die Erwartungen an die Leistungsfähigkeit

der Volksschüler (vgl. Eberwein, 1996a, S. 15). Gegen die Unzulänglichkeit des Unterrichts sollten die Hilfsschulen Abhilfe schaffen. Die erste hilfsschulartige Einrichtung wurde 1879 gegründet. Die im Laufe der Zeit neu gegründeten Einrichtungen waren nicht einheitlich. So unterschiedlich wie die Einrichtungen benannt wurden, waren auch die Bezeichnungen für ihre Schülerschaft: Halbidioten, Schwachsinnige, Schwachbegabte, usw. (vgl. Schröder, 1990, S. 27). Auf jeden Fall wurden diese Schüler von ihrem Niveau her zwischen den Volksschülern und den Insassen von „Idiotenanstalten" platziert. Zu welcher Seite jedoch die größere Nähe bestand, war damals noch umstritten. Als Kriterium für den Besuch der Hilfsschule wurde der zweijährige Rückstand in der Volksschule angesetzt. Ursprünglich sollten nur schwachsinnige Kinder aufgenommen werden. Trotzdem hatten Hilfsschüler weitere Beeinträchtigungen aufzuweisen, wie z.B. Sprach- und Körperbehinderungen, Sinnesschädigungen, usw., so dass die Hilfsschule zu einem Sammelbecken wurde für die unterschiedlichsten Schüler, die das Schulversagen gemeinsam hatten (vgl. Ellger-Rüttgardt, 1983, S. 21). 1884 wurde von Kielhorn der Name „Hilfsschule" benutzt und setzte sich bald allgemein durch. Obwohl sich die Lehrer um kleine Klassenfrequenzen bemühten, blieb die durchschnittliche Frequenz bei 30 Schülern. Der Hilfsschullehrplan orientierte sich an dem der Volksschule. Große Bedeutung wurde dem Anschauungs- und Handarbeitsunterricht beigemessen (ebd., S. 21ff.). Gelehrt haben in diesen Schulen Lehrer, die aus den Volksschulen kamen und vor ihrer Tätigkeit in schon bestehenden Hilfsschulen hospitiert hatten (vgl. Schröder, 1990, S. 29).

Während sich die Hilfsschule etablierte, wurde in Berlin versucht, die zurückgebliebenen Schüler durch „Nebenklassen" in Volksschulen, ohne Ausgliederung zu fördern. Dieses Projekt endete 1911 und die Hilfsschule setzte sich auch in Berlin durch (vgl. ebd., S. 32ff.).

Nach dem ersten Weltkrieg wurde die Ausbildung der Lehrer durch Aufbaustudiengänge und Prüfungen verbessert. Großen Einfluss auf die Abgrenzung der Schülerschaft der Hilfsschulen übte die Psychologie als neu entwickelte Wissenschaft aus. Die Hilfsschulbedürftigkeit wurde an Hand von Intelligenztests festgestellt und der Begriff Schwachsinn erhielt zunehmend den Beigeschmack des Krankhaften (ebd., S. 34).

Während der Machtergreifung durch die Nationalsozialisten erreichte die Hilfsschulpädagogik einen Tiefpunkt. Die schwachsinnigen Schüler wurden als Gefahr angesehen, die einen „erbkranken Nachwuchs" zur Folge haben konnten. Die Ausbildung von „Minderwertigen" war dem Staat zu teuer, gleichwohl fand kein bedeutender Abbau der Sonderschulen statt.

Ende der fünfziger Jahre wollte man der Hilfsschule ein neues Image geben. Der im dritten Reich offiziell eingeführte Oberbegriff „Sonderschule" wurde beibehalten. Als neue Bezeichnung für die Schüler wurde der Begriff „Lernbehinderte" empfohlen. Diese Kennzeichnung wurde durch das „Gutachten zur Ordnung des Sonderschulwesens" 1960 von der Ständigen Konferenz der Kultusminister zum erstenmal bundesweit amtlich verwendet. Nach und nach wurden alle Hilfsschulen in „Sonderschulen für Lernbehinderte" umbenannt (ebd., S. 36). Seither ist die Debatte um die Angemessenheit des Begriffes „Behinderung" aktuell, wie in den vorhergehenden Ausführungen erläutert wurde.

Dass die Bezeichnung „Sonderschule für Lernbehinderte" den Ansprüchen der heute verbreiteten Integrationspädagogik nicht entsprechen konnte, ist leicht zu erahnen. Als Ersatz wurden die Begriffe „Sonderpädagogisches Förderzentrum" und „Förderschule" verwendet. Beide Begriffe greifen jedoch im Sinne des integrationspädagogischen Ansatzes „zu

kurz", da sie nur den Namen, nicht aber das Grundkonzept der Institutionen verändern. Dadurch wird die eigentliche Intention, die Nicht-Aussonderung von Kindern mit Schwächen, nicht verwirklicht. Außerdem ist die Absicht der Förderung jeder Schule und jeder pädagogischen Konzeption immanent, so dass sie nicht nur der Sonderpädagogik zugeschrieben werden kann. Deshalb werden diese Begriffe als tautologisch angesehen (Eberwein, 1996a, S. 25).
Das jahrzehntelang vorherrschende Verständnis der Sonderpädagogik als Sonderschulpädagogik wird heutzutage von der Integrationspädagogik in Frage gestellt. Gefordert werden die integrative Beschulung und der gemeinsame Unterricht von behinderten und nichtbehinderten Schülern. Aus der langen Geschichte der Sonderpädagogik konnte man eine wichtige Erkenntnis gewinnen: „Soziale Integration kann nicht durch schulische Separation bewerkstelligt, Eingliederung kann nicht durch Ausgliederung erreicht werden" (ebd., S. 29). Man muss jedoch klarstellen, dass der Integrationsgedanke so alt ist wie die Geschichte des Sonderschulwesens. Befürworter der Nicht-Aussonderung gab es schon seit der Gründung der ersten Hilfsklassen. Nur hat sich in den nachfolgenden Jahren das Sonderschulsystem als die herrschende Schulform etabliert (Bleidick, 1988, S. 48ff.).

Im Sinne der Integration wurden auch die *Integrationsklassen* ins Leben gerufen. In diesen werden behinderte und nichtbehinderte Schüler gemeinsam im Zwei- oder Mehr-Pädagogen-System teilweise nach unterschiedlichen curricularen Zielen (zieldifferenzierter Unterricht) unterrichtet. In einer weiteren Variante werden auch einzelne behinderte Schüler in Klassen der allgemeinen Schulen stundenweise sonderpädagogisch spezifisch gefördert (Kanter, 1994, S. 690). Schulversuche zum *gemeinsamen Unterricht* wurden in den letzten Jahren in den meisten Bundesländern genehmigt und durchgeführt. In manchen gehört es sogar zum gesetzlichen Auftrag, Kinder mit Behinderungen zu fördern (Eberwein, 1995, S. 474). Natürlich gibt es heute immer noch zahlreiche Schulen für Lernbehinderte bzw. Förderschulen. Die Neueinrichtung von solchen Schulen lässt sich jedoch nach den integrationsorientierten Ansätzen nicht mehr rechtfertigen. Vielmehr wird gefordert, die bestehenden Sonderschulen in Integrationsschulen umzuwandeln, was auch in mehreren Städten mit der Einrichtung von Integrationsklassen in Sonderschulen schrittweise praktiziert wird.

Zwar findet die Integrationsbewegung seit einiger Zeit große Beachtung in der Sonderpädagogik, ist aber nicht maßgebend für die Einstellung aller Sonderpädagogen. Generell lassen sich drei Haltungen (Statements) erkennen:

a. für die Integration - Gemeinsamer Unterricht von Behinderten und Nichtbehinderten
b. für die Prävention
c. für die Sonderschulbeschulung

Es gibt sowohl Pädagogen, die die Integration begrüßen, als auch solche, die für das Weiterbestehen der Sonderschulen sind, außerdem jene, die die vorbeugende Arbeit zur Verhütung von Sonderschulbedürftigkeit in allgemeinen Schulen unterstützen (Bleidick, 1988, S. 98). Um diesen gegensätzlichen Forderungen gerecht zu werden, hat die Kultusministerkonferenz neue Empfehlungen zu sonderpädagogischer Förderung herausgegeben, in denen flexible Formen von pädagogischer Institutionalisierung ermöglicht werden. Weitere Möglichkeiten sonderpädagogischer Förderung werden unter Punkt 4 näher ausgeführt.

Die oben vorgestellte Entwicklung des Sonderschulwesens sowie die kritische Diskussion desselben ist charakteristisch für Deutschland. In Griechenland gab es eine solche stufenweise Entwicklung in diesem Bereich nicht, da keine separate Sonderschulart für Kinder mit Lernbeeinträchtigungen eingerichtet wurde. Der Bereich der Sondererziehung wurde erst im 20. Jahrhundert diskutiert. Dies liegt an den historischen Bedingungen, denen Griechenland unterlag. Der griechische Staat wurde im dritten Jahrzehnt des achtzehnten Jahrhunderts (1828) nach einer achtjährigen erschöpfenden Revolution und nach circa vier- bis fünfhundert Jahren (abhängig von den Landesteilen) Knechtschaft gegründet und anerkannt. Bis 1900 gab es in diesem neuen kleinen Staat innere Streitigkeiten und politische Schwankungen. Es folgten härtere Zeiten: Balkankriege 1912-13, erster Weltkrieg 1914-17, kleinasiatische Katastrophe 1922, zweiter Weltkrieg 1939-45, Bürgerkrieg 1945-47, Diktaturen 1936 und 1967. In den friedlichen Jahren zwischendurch wurde mit den Kräften, die noch verblieben waren, die allgemeine Bildung und nicht die Bildung der „Sonderkinder“ vorangetrieben. Es fehlten die Zeit, finanzielle Mittel und ausgebildetes Fachpersonal und damit die Infrastruktur, die die erforderliche Erziehung ermöglicht hätte. Die wirtschaftliche Lage des Landes zu diesem Zeitpunkt konnte nicht zu einer Entwicklung in diesem Bereich führen. Das bedeutet nicht, dass man die Bedürfnisse der Behinderten ignorierte oder keine Rücksicht auf sie nahm. Nur wurden die ersten organisierten Versuche nicht vom Staat in die Wege geleitet. Ferner betrafen sie, wie das auch in Deutschland der Fall war, Behinderungen, die das Leben eines Menschen und nicht seine Leistungen beeinträchtigten.

Von 1900 bis 1970 wurden Institutionen für Schüler und Jugendliche mit organischen Schäden und körperlichen Behinderungen ins Leben gerufen. Es handelte sich in der Mehrzahl um private Träger, die die Entstehung dieser Einrichtungen initiierten, sie ausrüsteten und auch verwalteten. Spenden sowohl von ausländischen als auch inländischen Wohltätern förderten diese Projekte (vgl. Kipriotakis, 1989, S. 25ff.).
Erst 1969 wurde eine sonderpädagogische Abteilung im Erziehungsministerium eingerichtet, die sich für die Unterstützung der Erziehung von Behinderten einsetzte. 1972 wurde die Maraslios-Schule ins Leben gerufen, die als Fortbildungsstätte für Lehrer im Bereich der Sonderpädagogik dienen sollte. Nach und nach wurden separate staatliche Sonderschulen für die verschiedenen Behinderungsarten (blinde, gehörlose, geistigbehinderte, verhaltensgestörte, körperbehinderte und psychisch erkrankte Schüler) gegründet, die bis heute bestehen und zufriedenstellend funktionieren. Doch eine Sonderschule speziell für lernschwierige oder -behinderte Schüler wurde niemals konzipiert. Im Sinne der Integration sollten diese Schüler in ihren Schulen verbleiben und einen Förderunterricht in deren Umgebung in einer Sonderklasse erhalten (vgl. Bildungsministerium, 1994, S. 9). Diese *Sonderklassen* bilden das Konzept des Bildungsministeriums, um die Beeinträchtigungen der Schüler zu kompensieren. Zum ersten Mal wurden diese Klassen 1984/85 mit dem Präsidialerlass 603/82 (Regierungsblatt 117/82) errichtet. Ausführliche Angaben zu diesen Klassen finden sich unter Punkt 4 im gleichen Kapitel.

1.3 Entstehungsursachen von Lernbehinderungen

Lernbehinderungen werden meistens im Schulalter festgestellt. Bis dahin könnten in Ausnahmefällen Indizien wahrgenommen und spezielle Fördermaßnahmen getroffen werden. In den meisten Fällen wird eine Fehlentwicklung erst in der Schule sichtbar, wo das Kind gefordert ist, bestimmte Leistungen zu erbringen und sein Leistungsniveau den „alterskonformen Normen“ entsprechen muss. Lernbehinderung drückt sich dann als ein „nachhaltiges Schulversagen“ aus (Scherer, 1995, S. 20).

In Hinblick auf die Entstehungsursachen von Lernbehinderungen ist die Situation genauso komplex wie ihre Begriffsbestimmung. Die „anfänglichen monokausalen Deutungskonzepte“ wurden wegen ihrer Unzulänglichkeit aufgegeben und um neue Aspekte weiterentwickelt (vgl. Schmetz, 1999, S. 136). „Es ist (...) Ausdruck eines überholten Paradigmas, welches die Ursachen für das Versagen einseitig und ausschließlich bei den Lernenden sieht und geeignet ist, soziokulturelle wie didaktogene Bedingungen zu verschleiern“ (Kretschmann, 1998, S. 177). Heute wird akzeptiert, dass Lernbehinderungen multifaktoriell bedingt sind und daher werden mehrdimensionale Modelle zu ihrer Ursachenklärung herangezogen.

Kanter (1984) geht von zwei wichtigen Faktoren aus, die das Umfeld jeder Behinderung bilden: bestimmte Schülermerkmale einerseits und situative Gegebenheiten andererseits. Ein Kausalverhältnis zwischen diesen Faktoren und der Entstehung von Lernbehinderung sieht er jedoch nicht. Für ihn sind die Erscheinungsformen des Lern- und Leistungsversagens vielfältig, haben unterschiedliche Ursachen und hängen von der Lebens- und Lerngeschichte eines jeden Menschen ab (1994, S. 688).

In den meisten Fachbüchern werden die Lernbehinderungen oder generell Lernbeeinträchtigungen als das Ergebnis des Zusammenspiels „personenbezogener“ und „umweltbezogener“ oder „endogener“ und „exogener“ Ursachen mit entsprechenden Umweltbeziehungen gesehen. Hiermit werden die zwei Faktoren angesprochen, die auch Kanter hervorgehoben hat und die auch im ökosystemischen Ansatz akzentuiert werden. Die Umwelt wird in die Bereiche Schule und Familie untergliedert, um diese trennscharf betrachten zu können, wenngleich beide Bereiche selbstverständlich miteinander interagieren.

Neben genetischen Ursachen wie prä-, peri-, postnatalen Schäden, hirnorganischen Funktionsstörungen, motorischen Störungen, sowie Sinnesschäden, sind umweltbezogene Faktoren, z. B. Sozialisationserschwernisse und psychosoziale Beeinträchtigungen aufgrund ungünstig verlaufender familiarer Sozialisation zu nennen, welche an schulischen Lernbeeinträchtigungen mitbeteiligt sein können. Auch psychische Problemlagen wie Lernstile, strukturelle Lernstörungen, Konzentrationsschwierigkeiten, mangelndes Selbstkonzept, Sprach- und Sozialverhalten interagieren und beeinflussen das Lernverhalten des Schülers (Schmetz, 1999, S. 136).

Besondere Bedeutung gewinnt der spezifisch geprägte Kulturraum jedes Menschen, in dem sich seine Lebens- und Bildungsgeschichte entwickelt. Schon 1970 setzte sich Begemann mit den sozio-kulturellen Aspekten auseinander. Basierend auf allen verfügbaren quantitativen Erhebungen über den familiären Hintergrund und die schichtspezifische Sozialisation lernbehinderter Kinder, beschrieb er die sozialen und gesellschaftlichen Bedingungen, welche den Werdeprozess der Schüler erheblich beeinflussen können (vgl. Klein, 1999, S. 6). Seine Erkenntnisse finden auch heute noch Beachtung in der Sonderpädagogik und werden in der Folge kurz vorgestellt.

Bei der Ursachenklärung von Lernbehinderungen sind vor allem sozio-kulturelle Faktoren, das heißt ökonomische Faktoren und Daten der Lebensführung zu berücksichtigen (vgl. Begemann, 1970, S. 56). Dazu gehören der berufliche Status der Eltern, die Einkommensverhältnisse, die Wohnverhältnisse, die Familiengröße (Geschwisterzahl), die Familiensituation und -konstellation. Diese Faktoren üben einen Einfluss auf andere Bereiche aus, wie z. B. den Gesundheitszustand der Familienmitglieder, die Erziehungspraktiken der Eltern, die Ernährung, Betreuung und Pflege der Kinder, besonders im frühen Alter, den Sprachgebrauch, das Selbstkonzept, die Leistungsmotivation, die Lebensperspektiven, die Wertorientierung, die Weltdeutung und Lebenseinstellung der Kinder. Es existieren demnach „vielfältige Umwelteinflüsse..., die die intellektuellen Leistungsfähigkeiten der Schüler mitbedingen...“ (ebd., S. 82). Begemann analysierte die soziokulturellen Daten lernbehinderter Schüler. Sie stammen hauptsächlich aus der Unterschicht. Er zeigte, dass sich die oben genannten Faktoren für diese Kinder als Belastungsmomente erweisen und diese Kinder sozio-kulturell benachteiligen. Berücksichtigt man außerdem, dass die Schule als Bildungsinstitution an der Mittelschichtskultur orientiert ist, ist das Versagen der Schüler mit sozio-kulturellen Benachteiligungen determiniert.

Heute bezweifelt man die Tatsache, dass die Schichtzugehörigkeit zwangsläufig Sonderschulbesuch nach sich zieht. Jedoch sind in der Zugehörigkeit zur unteren Unterschicht Bedingungen zu finden, welche den Schulerfolg der Kinder stark beeinflussen (berufliche Position der Eltern, Wohnverhältnisse, Familiensituation, Gesundheitszustand, soziale Kontakte der Familie, Erziehungspraktiken der Eltern, Lebensperspektiven, Selbstkonzept, Sprachgebrauch). Diese Faktoren bedingen einander und können kumulativ wirken (vgl. Schröder, 1990, S. 68ff.).

Darüber hinaus müssen auch die schulischen Faktoren in die Analyse einbezogen werden. Ist die Schule nicht in der Lage, Lernumwelten so zu gestalten, dass die unterschiedlichen Lernausgangslagen ihrer Schüler berücksichtigt werden und dementsprechend eine individuelle Förderung stattfindet, sorgt sie selber für den Ausbruch von Lern- und Entwicklungsschwierigkeiten (vgl. Schmetz, 1999, S. 136). Negative Bewertungen und Zuschreibungsprozesse, welche zum Schulalltag gehören, eröffnen den Weg, um die betroffene Person zu stigmatisieren und auszugliedern. Diese Stigmatisierung wird nach der Überweisung in einer Sonderschule durch Vorurteile gegen Lernbehinderte und durch ihren schlechten gesellschaftlichen Ruf verstärkt (Schröder, 1990, S. 75). Mit ihren Alltagstheorien, Werten, Vorurteilen und Stereotypen setzt die Gesellschaft die Maßstäbe und bestärkt die Anerkennung und Integration oder im negativen Falle die Ausgliederung ihrer Mitglieder. Diesen negativen Effekten der Sonderbeschulung möchte die Integrationsbewegung entgegenwirken.

Grissemann (1989) spricht von denselben Faktoren. Er unterscheidet zwischen ätiologischen Basisfaktoren und reaktiven Folgen.

„Als ätiologische Basisfaktoren sind zu verstehen:

- organische Beeinträchtigungen (z.B. minimale zelebrale Dysfunktionen)
- sozioökonomische und soziokulturelle Beeinträchtigungen
- familiär-psychosoziale Belastungen und damit zusammenhängendes deviantes Erzieherverhalten wie erzieherische Vernachlässigung und Fehlerziehung
- schulische Belastungen (u.a. didaktische Mängel, erzieherische Fehlhaltungen von Lehrern, gehäufte Lehrer-/Wohnortswechsel)“ (1989, S. 104)

Als reaktive Folgen werden folgende Punkte aufgelistet:

- Schulangst mit verschiedenen Angstabwehrmechanismen und psychosomatischen Reaktionen
- angstbedingte Lernblockaden
- Motivationsstörungen, die sich auf einzelne Fächer und Lehrer beziehen, aber auch generalisiert werden können, die sich auch zur partiellen oder allgemeinen Lernverweigerung steigern können.
- Reduktion des Selbstwertgefühls mit kompensatorischen oder resignativen Entwicklungsvarianten
- einseitige Mißerfolgsorientierung mit beeinträchtigter Erfolgszuversicht (ebd., S. 106).

Die Bereiche Person, Familie und Schule tauchen in fast allen neueren Erklärungsversuchen von Lernbeeinträchtigungen auf. In systemischer Sichtweise (Sander, 1988; Vernooij, 1998; Schmetz, 1999) werden diese Bereiche als Systeme dargestellt. Ein Kind mit abweichendem Lernverhalten ist ein Element in einem System, welches auch die Elemente Familie und Schule umfasst. Es wird erkannt, dass diese Systeme verschiedene Ebenen aufweisen, komplex vernetzt sind und stets aufeinander wirken. Ihre Wechselbeziehungen können nicht als linear - kausal, sondern als zirkulär betrachtet werden. Deshalb ist auch die Ursachenklärung von Lernbeeinträchtigungen sehr komplex. In Betracht müssen immer alle Faktoren oder Systeme gezogen werden, die auf das Kind einwirken und auf die das Kind einwirkt. Diese Systeme befinden sich in permanenter Bewegung und stehen deshalb in einem „flexiblen Fließgleichgewicht“ (vgl. Sander, 1988, S. 339). Aus diesem Grund müssen systemisch orientierte Aussagen immer neu angepasst werden (vgl. Hobbs, 1975, zitiert nach Sander, 1987, S. 213). Sie erlauben aber auch, dass eine unerwünschte Entwicklung (wie es Lernbeeinträchtigungen sind) von vielen Seiten des Systems beeinflusst werden kann (vgl. Sander, 1988, ebd.).

1.3.1 Die Personengruppe der Lernbehinderten

In Abhängigkeit von der Ursachenklärung von Lernhinderungen wird auch der Personenkreis der Lernbehinderten beschrieben. In der Vergangenheit haben sich verschiedene Teildisziplinen mit der Biographie von Lernbehinderten beschäftigt und versucht, ihre Merkmale herauszuarbeiten: psychologische, sozialwissenschaftliche, medizinische, schulische und statistische. Werden diese Aspekte jedoch vereinzelt betrachtet, sind die Aussagen für die Lernbehinderten einseitig und daher unzulänglich. Nur eine Verknüpfung dieser Aspekte könnte eine umfassende Darstellung dieser Personengruppe ermöglichen (vgl. Schröder, 1990, S. 44ff.).

In der heutigen Definition von Lernbehinderungen spricht man von Faktoren, die an der Entstehung von Lernbehinderungen mitbeteiligt sein könnten. Diese sind nicht als Merkmale der Lernbehinderten zu verstehen, sondern als ungünstige Faktoren ihrer Biographie.

Lernbehinderte haben seltener vorschulische Einrichtungen besucht (Kanter, 1994, S. 689). Meistens haben sie zwei bis drei Jahre in einer Grundschule absolviert und wurden dann aufgrund ihres Scheiterns in einer Sonderschule überwiesen. Einige von ihnen wurden nach dem erstmaligen Beginn der Grundschule zurückgestellt. Diese „Zurückstellung hat sich später als Indiz für spätere schulische Probleme erwiesen“ (Schröder, 1990, S. 48). Die Schwerpunkte ihrer Lernschwierigkeiten liegen in den Hauptfächern Sprache und Mathematik.

Die Rolle der Intelligenzminderleistung wurde lange Zeit als konstitutiv für Lernbehinderte angesehen. Heute wird akzeptiert, dass „zwischen Intelligenz und Schulleistung allgemein ein nicht geringer korrelativer Zusammenhang besteht, der die Intelligenz zum wichtigsten (aber nicht alleinigen oder zureichenden!) Bestimmungsfaktor der Schulleistung macht" (Schröder, 1990, S. 62). In Bezug auf das Leistungsverhalten wurden oft eine gering ausgeprägte Motivation und Angst vor Misserfolgen beobachtet (vgl. ebd., S. 55). Die Kreativität der Schüler zeigte sich jedoch nicht gemindert. Die Metakognitionstheorien beschreiben dagegen einen Mangel an

> „spontaner Strategieproduktion, und -verwendung, an Organisation, an allgemeinen \`Selbststeuerungsfähigkeiten´, an \`Effizienz der Exekutive´ im oben erläuterten Sinne bzw. als Bedarf an \`kompletter und ausführlicher Instruktion´, d.h. an Unterweisung nicht nur darüber, welche Strategien es gibt, sondern auch, wann sie anzuwenden und wie sie zu überwachen sind" (ebd., S. 65).

Den medizinischen Aspekten wird heute, beeinflusst von der amerikanischen Literatur, mehr Beachtung geschenkt. Angenommen wird, dass eine leichte bis minimale Dysfunktion des Zentralnervensystems „Teilleistungsschwächen, Mängel der Koordination verschiedener Funktionen, Hyperaktivität, emotionale Labilität, Aufmerksamkeitsstörungen, Impulsivität, u.a. zur Folge" haben kann (S. 77).

Lernschwierigkeiten können in mehreren Bereichen auftreten und diese entsprechend beeinträchtigen. Hier sind das sensorische, motorische, kognitive, sprachliche, emotionale, motivationale und soziale Verhalten des Kindes zu nennen. Im *emotionalen* und *sozialen* Bereich treten Interaktions- und Kommunikationsstörungen auf. Diese resultieren aus den Schwierigkeiten des Kindes in den Prozessen der Identitätsfindung und -darstellung, der emotionalen Selbstwahrnehmung, der Selbststeuerung, der sozialen Einordnung und der Bildung eines positiven Selbstkonzeptes. Im *sensorischen* und *motorischen* Bereich sind die kinästhetischen, taktilen und vestibulären Vorerfahrungen des Kindes von großer Bedeutung. Diese werden verinnerlicht und zeigen sich in der Körperentwicklung und -steuerung des Kindes. Gebraucht werden sie nicht nur beim Schreiben- und Lesenlernen, sondern auch in jeder alltäglichen Handlung. Ausfälle in diesen Bereichen können Überaktivität, ausgeprägte Passivität, körperliche Ungeschicklichkeiten, verzögerte Sprachentwicklung, Aufmerksamkeits- und Konzentrationsprobleme hervorrufen. Schwierigkeiten im *kognitiven* und *sprachlichen* Bereich hängen eng mit den Interaktionsgestaltungen zwischen Lehrenden und Lernenden zusammen. Fehlende oder unzulängliche Berücksichtigung der Lernausgangslage der Schüler kann die Aneignung von Basisfertigkeiten in den Bereichen der Sprache, der Aufmerksamkeit, des Gedächtnisses, der Wahrnehmungsorganisation und der Methodenhandhabung des Lernens stören oder beeinträchtigen. Solch ein Misslingen führt zu negativen Werteinschätzungen und Komplexen, die bis zu sozialer Ausgrenzung eskalieren können (Schmetz, 1999, S. 137).

Diese Merkmale sind nicht für alle Lernbehinderte charakteristisch. Die Frage, ob „Merkmale als Bedingungen von Lernbehinderung in Frage kommen können oder eine Folge des Schulversagens oder gar Effekte des Besuches einer Lernbehindertenschule sind" (Schröder, 1990, S. 56) bleibt offen. Ob die Aussonderung dieser Schüler in Sonderschulen das Problem verkleinert, wird in der letzten Zeit stark bezweifelt. Die Bereiche, die angesprochen wurden, zeigen jedoch, „dass die Person als ganze und in ihrer gesamten Biographie betroffen, wenn auch keineswegs in allen Bereichen ihres Lebens „lernbehindert" ist (ebd., S. 79f.).

1.4 Sonderpädagogische Förderung in den Schulen

Trotz der Integrationsbemühungen in den verschiedenen Bundesländern, besuchen heute zahlreiche Schüler die Sonderschulen. Sie sind aber nicht der einzige Ort, in dem sonderpädagogische Förderung stattfindet. Mittlerweile gibt es eine Vielfalt von Organisationsformen sonderpädagogischer Förderung. Diese Entwicklung ist ein Ergebnis der Integrationsentwicklung in verschiedenen Bundesländern und der 1994 von der KMK neu herausgegebenen Empfehlungen zur sonderpädagogischen Förderung. Der prozentuale Anteil der Schüler, die einer sonderpädagogischen Förderung bedürften, lag in den Jahren 1990 bis 1996/97 annährend gleichbleibend bei 4,5 % der Gesamtschülerzahl (vgl. Stock, 1999, S. 207).

Erwähnt wurden schon der gemeinsame Unterricht von Behinderten und Nichtbehinderten in Grundschulen und die integrativen Grundschulklassen. Durch die Ergänzung des § 4 Abs. 6 Schulverwaltungsgesetz wurden z. B. in NRW zusätzliche Möglichkeiten eröffnet:

1. „Sonderschulen unterschiedlicher Typen können im organisatorischen und personellen Verbund als eine Schule geführt werden“ (§ 4 Abs. 6 Satz 4 Schulverwaltungsgesetz - BASS 1-2).
2. „Es können auch sonderpädagogische Fördergruppen als Teil der allgemeinen Schule geführt werden, wenn ein pädagogisches Konzept vorgelegt wird, das Möglichkeiten gemeinsamen Lernens vorsieht“ (§ 4 Abs. 6 Schulverwaltungsgesetz - BASS 1-2).
3. „In Ausnahmefällen können an allgemeinen Schulen (allgemeinbildende und berufsbildende Schulen) Sonderschulklassen als Teil einer Sonderschule in kooperativer Form eingerichtet werden“ (§ 4 Abs. 6 Schuleverwaltungsgesetz - BASS 1-2).

Die Erteilung sonderpädagogischer Förderung wird somit nicht nur an Sonderschulen gebunden. Sowohl die Sonderschule als auch die allgemeine Schule werden als geeigneter Förderort für Kinder und Jugendliche mit Behinderungen angesehen (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein–Westfalen, 1998, S. 75ff.). So versteht sich Sonderpädagogik immer mehr als eine Ergänzung und Schwerpunktsetzung der allgemeinen Pädagogik (Kultusministerkonferenz, 1994, S. 3). Die Flexibilität bezüglich der Organisation sonderpädagogischer Förderung begünstigt „die Durchlässigkeit der Schularten und ihrer Bildungsgänge, die Erhöhung gemeinsamer Unterrichtsanteile, und den Wechsel von Schülerrinnen und Schülern aus den Sonderschulen in allgemeine Schulen“ (ebd., S. 15). Die Schule wird damit ein Lernfeld für soziales Lernen für die Nichtbehinderten, was zu den wichtigsten Möglichkeiten gehört, die ihnen der gemeinsame Unterricht eröffnet.

Ziel des neuen Rechtes ist es, die Schüler, „wenn eben möglich, wohnortnah in den Grundschulen zu fördern“ (Stock, 1999, S. 206). Nötige Voraussetzung dafür ist natürlich, dass die für das behinderte Kind notwendigen Rahmenbedingungen zur erfolgreichen Förderung in den Grundschulen geschaffen werden können (ebd.). In diesen neuen Empfehlungen der Kultusministerkonferenz wird der „Perspektivenwechsel von der individuumzentrierten, defektorientierten und institutionenbezogenen Sichtweise zu einer pädagogischen, an der Persönlichkeit des behinderten Kindes, seiner individuellen Entwicklungsgeschichte in Abhängigkeit zu seinen Umfeldbedingungen orientierten Sichtweise zum Ausdruck gebracht“ (Lumer, 1998, S. 171), wobei„...stets zwei Momente immanent [sind]: die individuelle Sichtweise und der integrative Aspekt“ (Wittmann, 1997, S. 36).

Eine ähnliche fortschrittliche Entwicklung und Vielfalt an Organisationsformen ist in Griechenland im Bereich der Sonderpädagogik nicht zu finden. Praktiziert wird immer noch die gesonderte Beschulung von Behinderten und Nichtbehinderten. Die Sonderpädagogik wird in zwei Bereiche unterteilt:

1. in selbstständige Sonderschulen der Primar- und Sekundarstufe,
2. in Sonderklassen, die in den Regelschulen der allgemeinen und beruflichen Bildung eingerichtet werden.

Selbstständige Sonderschulen wurden für fast alle Behinderungsarten eingerichtet. Es existieren Sonderschulen für blinde, gehörlose und schwerhörige, körperbehinderte, verhaltensgestörte und schwer anpassungsfähige und auch für psychisch erkrankte Kinder. Die Gründung dieser Schulen erfolgte Anfang des 20. Jahrhunderts und erstreckte sich bis zum dritten Viertel desselben und wurde überwiegend von privaten Trägern initiiert. Ausgelassen wurden dabei die Kinder mit Lernschwierigkeiten und Lernbeeinträchtigungen. Für die Förderung dieser Schüler hat das Bildungsministerium erst später ein eigenes Konzept entwickelt: die Sonderklassen, welche 1984/85 ins Leben gerufen wurden. Demnach werden die Sonderklassen in Regelschulen eingerichtet und nehmen Kinder auf, die in den zwei Hauptfächern „Mathematik“ und „Griechisch“ Schwächen aufweisen. Der Unterricht in den Sonderklassen soll den Kindern helfen, ihre spezifischen Lernschwierigkeiten zu überwinden.

Eine weitere Form von Sonderklassen wird in Regelschulen für Schüler mit allgemeinen Behinderungen eingerichtet. Diese Sonderklassen werden in Provinzstädten, Kleinstädten oder Dörfern eingerichtet, in denen die entsprechenden Sonderschultypen nicht existieren und erfüllen hauptsächlich organisatorische Zwecke. Hier werden spezielle Programme je nach den Schädigungen und Behinderungen (Gehörlosigkeit, Sehbehinderung oder geistige Behinderung) der Schüler verwendet. Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen die Sonderklassen für lernschwierige Schüler.

Mit der Einrichtung von Sonderklassen wurde auch in Griechenland den neueren pädagogischen und psychologischen Erkenntnissen sowie der Integrationsbewegung Rechnung getragen (Bildungsministerium, 1994, S. 154). Kinder mit Lernschwierigkeiten dürfen nicht ausgesondert werden und müssen in den Regelschulen verbleiben. Dadurch soll ihre soziale und schulische Integration gewährleistet werden (vgl. ebd., S. 140). Nur für diese Kinder wird also der Integrationsgedanke hervorgehoben und findet auch in der Praxis Anwendung. Das liegt daran, dass die Regelungen für die Sonderklassen zu einem späteren Zeitpunkt erlassen wurden, an der Zeit als die Integrationspädagogik im Bereich der Sonderpädagogik Anerkennung fand. Die Bestimmungen für die Entstehung der Sonderschulen dagegen liegen längere Zeit zurück (1970). Damals war die Gründung von Sonderschulen die übliche Ausdrucksform der Förderung behinderter Kinder.

In den letzten Jahren wird auch in Griechenland die Integrationsbewegung in die wissenschaftlichen Diskussionen stark einbezogen. Impulse wurden von Fachleuten gegeben, die die internationalen Entwicklungen in der Sonderpädagogik verfolgen und auch die griechische Gesellschaft über die neueren Erkenntnisse und Konzepte in diesen Bereichen informieren wollen. Da es an ähnlichen Erfahrungen in Griechenland mangelt, werden viele Fachkräfte oder Sachkundige aus dem Ausland eingeladen, die über die Möglichkeiten und Chancen des gemeinsamen Unterrichts auf verschiedenen Fachtagungen referieren. Die Integration und der gemeinsame Unterricht ist ein aktuelles Thema, das zu unterschiedlichen und teils widersprüchlichen Äußerungen veranlasst. Im Allgemeinen lassen sich die gleichen Stellungnahmen erkennen, denen man auch in Deutschland begegnet:

1. für die Integration
2. gegen die Integration
3. für präventive Maßnahmen im Kleinkindalter

Die Befürworter der Integration betonen die Vorteile des gemeinsamen Unterrichts und heben die Nachteile der Sonderbeschulung hervor. Andere Pädagogen betrachten die Integration kritischer. Sie sind der Meinung, dass die Integration lediglich für bestimmte Behinderungsarten geeignet sei. Eine dritte Gruppe präferiert das herkömmliche System der separaten Sonderschulen, da sie in der Integration keine Vorteile sieht. Die Debatte für und gegen die Integration findet zur Zeit noch ausschließlich unter Fachleuten statt. Die Integration ist noch keine gesellschaftliche Forderung geworden, die vom Staat spezifische Regelungen verlangen könnte. Die Auseinandersetzung mit diesem Thema zeigt jedoch, dass auch in Griechenland eine Zeit der Fragestellungen, der Erkundungen, des Umdenkens und des Experimentierens angebrochen ist. So wurde in Athen ein Projekt in die Wege geleitet, in dem behinderte und nicht behinderte Schüler zusammen unterrichtet werden (vgl. Zoniou-Sideri, 1997, S. 769 ff.). Es ist ein kleiner, jedoch bedeutsamer Schritt in diese Richtung. Er berechtigt zu der Hoffnung, dass auch in Zukunft solche Schulversuche stattfinden werden, die die Gesellschaft von den Chancen und Aussichten des gemeinsamen Unterrichtes überzeugen werden. Die Aufklärung der Gesellschaft über die Integration wird kein einfaches Unterfangen werden. Die griechische Bevölkerung ist auf ein Schulsystem fixiert, das die getrennte Beschulung unterstützt. Die Sonderschulen für alle Behinderungsarten sind mittlerweile gesellschaftlich anerkannt. Eine Veränderung ihres Status, bzw. ihre Überführung in Regelschulen wäre ein länger andauernder Prozess, der der griechischen Gesellschaft nicht aufgezwungen werden kann. Deshalb sind solche kleinen und vorsichtigen Projekte von entscheidender Bedeutung. Sie liegen innerhalb der Toleranzgrenzen der Gesellschaft. Man sollte jedoch den neuen Ansätzen eine Chance geben sich zu bewähren. Nach jahrelangen Erfahrungen mit dem separaten Sonderschulsystem, sollte nun – wie den Sonderschulen – dem gemeinsamen Unterricht die Möglichkeit gegeben werden, seine Leistungsfähigkeit unter Beweis zu stellen. Dabei sollte man der Forderung von Saleh (1996) Beachtung schenken, die darauf hinweist, dass die Aussonderung der behinderten Kinder aus den allgemeinen Schulen aus dem Grund vorgenommen wurde, weil sie im Rahmen des herkömmlichen Unterrichts nicht angemessen gefördert wurden. Nur wenn diese Voraussetzungen nunmehr gegeben sind, können diese Kinder wieder in die allgemeinen Schulen integriert werden (vgl. Saleh, 1996, S. 101ff.). Unter solchen Voraussetzungen ist die Lehrerausbildung, die zusätzliche Einstellung von Sonderpädagogen, die Kooperation mit den Eltern und die Ausstattung der Schulen zu erwähnen (ebd.). Für Planungen in diesem Bereich könnten Erfahrungen aus dem Ausland von immenser Bedeutung sein. Sie erhellen die Vorgänge und erlauben eine vergleichende Betrachtung, dürfen aber nicht vorbehaltlos übernommen werden, da sie in unterschiedliche Sozial- und Schulsystemen, soziokulturellen Gegebenheiten und Mentalitäten gewonnen wurden.

Den internationalen Tendenzen folgend verabschiedete das griechische Parlament im März 2000 ein neues Gesetz (Nr. 2817) über die „schulische Ausbildung von Personen mit speziellen Erziehungsbedürfnissen“. Vorgesehen wird die Integration von Behinderten in Regelklassen unter Aufsicht einer sonderpädagogischen Lehrkraft. Zusätzlich werden auch Integrationsklassen in allgemeinen Schulen geplant. Soweit die Beschulung der betreffenden Personen in den oben vorgestellten Formen nicht realisierbar ist, wird sie weiterhin in bestehenden Sonderschulen oder Sonderklassen vorgenommen. Der gesetzliche Rahmen ist somit vorhanden, doch die Umsetzung in die Praxis erfolgt in kleinen Schritten in Form von einzelnen Projekten. Die separaten Sonderschulen bilden heute immer noch den Hauptträger sonderpädagogischer Erziehung.

1.4.1 Verordnungen über die Realisierung des sonderpädagogischen Förderbedarfs

Die schulische Förderung behinderter Kinder wird in den verschiedenen Bundesländern Deutschlands unterschiedlich geregelt. In manchen ist der gemeinsame Unterricht - wie schon erwähnt - gesetzlich verankert, in anderen jedoch nicht. In den letzteren gilt das bisherige Sonderschulaufnahmeverfahren (SAV). In den Ländern mit gesetzlicher Verankerung wie z.B. in Nordrhein-Westfalen ist das SAV durch die Rechtsverordnung `Verfahren zur Feststellung des sonderpädagogischen Förderbedarfs und des Förderortes‘ (VO-SF) abgelöst worden (Lumer, 1998, S. 168).

Ein Verfahren zur Feststellung sonderpädagogischen Förderbedarfs kann entweder auf Antrag der Erziehungsberechtigten – mit einer entsprechend detaillierten Begründung – oder der Schule eingeleitet werden. Nach den Bestimmungen des neuen Verfahrens entscheidet die Schulbehörde, ob ein Verfahren eröffnet wird. Es wird zunächst der Förderbedarf festgestellt und dann über den Förderort entschieden. Grundlage für die Feststellung des Förderbedarfs und auch für die Entscheidung über den schulischen Förderort ist ein pädagogisches Gutachten. Dieses wird in einem dialogischen Verfahren von einer sonderpädagogischen Lehrkraft zusammen mit einer Lehrkraft der gemeinsamen Schule erstellt. Beide Lehrkräfte erarbeiten gemeinsam auf der Grundlage ihrer Beobachtungen und Beurteilungen einen Vorschlag, wie das betreffende Kind weiterhin - ggf. sonderpädagogisch - gefördert werden kann. Erforderlich ist auch ein Gutachten des Gesundheitsamtes. Die Eltern bzw. Erziehungsberechtigten sind während des ganzen Verfahrens beteiligt. Während der Erstellung des Gutachtens haben sie die Möglichkeit zur Aussprache. In dem durch die Verordnung abgesteckten Rahmen können sie zwischen Sonderschule und gemeinsamen Unterricht wählen. Die Entscheidung liegt bei der Schulaufsichtsbehörde. Sie hat möglichst im Einvernehmen mit den Eltern über den schulischen Förderort zu entscheiden.

In Griechenland wird die sonderpädagogische Förderung Lernbehinderter in den Sonderklassen erteilt. Eine Sonderklasse für lernschwierige Schüler ist jedoch nicht in jeder allgemeinen Schule vorhanden. Die Bildung einer Sonderklasse beantragt das Lehrerkollegium bei der zuständigen Verwaltung mit Zustimmung des Sonderschulrates. Der Antrag wird dem Bildungsministerium eingereicht und von der sonderpädagogischen Abteilung bearbeitet. Erforderlich sind drei Voraussetzungen:

a. eine Bestätigung, dass in der betreffenden Schule Kinder Lernschwierigkeiten aufweisen. Diese erstellt das Lehrpersonal, der Sonderschulrat, das kinderärztliche Amt oder das mobile Diagnoseteam[1].
b. das Vorhandensein eines geeigneten Klassenraumes.
c. die Existenz von qualifiziertem Lehrpersonal, das die Sonderklasse unterrichten wird (vgl. Bildungsministerium, 1994, S. 155).

[1] Das kinderärztliche Amt ist im Prinzip ein diagnostisches Team. Es besteht aus Psychologen, Ärzten und Sozialarbeitern und findet sich nur in großen Städten. Das mobile Diagnoseteam wird jährlich im Bereich eines Landkreises zusammengesetzt und schließt einen Arzt, einen Sozialarbeiter, einen Psychologen und den Sonderschulrat oder den Rektor einer Sonderschule ein. Beide Ämter erstellen, wenn es verlangt wird, einen Bericht über die emotionale, kognitive und psychische Verfassung bestimmter Kinder.

Die Diagnose einer möglichen Lernbeeinträchtigung und die Entscheidung über die Förderung des betroffenen Schülers wird von den Diagnoseteams in den „Zentren zur Diagnose, Beurteilung und Unterstützung von Personen mit speziellen Bedürfnissen“ getroffen. In diesen Zentren werden Informationen zur Behebung, Behandlung und zum Ausgleich von Defiziten, also zur Kompensation gegeben und die nötigen Hilfestellungen für die betroffene Kinder und ihre Familien geplant. Die Fachleute, die ein Diagnoseteam bemannen, stehen in engem Kontakt und Zusammenarbeit mit den Eltern und dem Lehrkörper des betroffenen Kindes und verfolgen seinen Entwicklungsverlauf.

Die Schülergruppen, die für den Besuch einer Sonderklasse bestimmt wurden, bleiben während des Schuljahrs nicht konstant. Die individuelle Leistungsfähigkeit der Schüler entscheidet, wie lange jeder diese Klasse besucht. Der Klassenlehrer beurteilt, welcher Schüler diese Förderung nötig hat. Der Lehrer der Sonderklasse entscheidet, wie lange der Schüler dort verbleiben wird. Der Besuch der Sonderklasse dauert je nach Bedarf einige Wochen bis zu einem Schuljahr. Es werden nur die Hauptfächer „Sprache“ und „Mathematik“ unterrichtet. In einer Klasse befinden sich Schüler aus mehreren Jahrgängen, die nach ihren Fähigkeiten in Arbeitsgruppen unterteilt werden. Die Heterogenität der Sonderklassen entsteht durch das unterschiedliche Lernniveau und die divergierenden Lernleistungen der Schüler. Hilfreich ist hier der differenzierte Unterricht, in dem mit geeignetem Lehrmaterial der einzelne Schüler seinen Bedürfnissen entsprechend gefördert wird.

1.5 Zahlenmäßige Entwicklungen in diesem Bereich

In diesem Kapitel wird das Phänomen der Lernschwierigkeiten oder Lernbehinderungen mit Zahlen und statistischen Daten beleuchtet, um so einen Eindruck über den Umfang des Gegenstands zu vermitteln.

Lernbehinderte sind die mit Abstand größte Teilgruppe der Sonderschüler und machen allein fast 60% aller Schüler/innen an Sonderschulen aus (vgl. Lumer, 1998, S. 163). Die Zahl der Schüler, die in NRW eine Schule für Lernbehinderte - Förderschule besuchen, hat in den letzten Jahren zugenommen. 1990/91 wurden 40.888 Schüler mit Lernbehinderung registriert, 1996/97 waren es 46.488. Die Schüleranzahl ist also in diesen Jahren um 13,7% gestiegen (vgl. Stock, 1999, S. 206). Wie sieht es aber für das gesamte Land aus? Um die zahlenmäßige Entwicklung der Lernbehindertensituation bundesweit zu erfassen, werden die entsprechenden Daten aus den Jahren 1989 bis 1998 aufgeführt.

Schuljahr	Einrichtungen	Klassen	Schüler	Lehrer	Ausl. Schüler
1989	1.477	11.484	131.589	16.354	29.059
1990	1.466	11.497	133.102	16.516	29.917
1991	1.694	17.727	196.813	20.874[2)]	31.106
1992	1.787	18.032	206.358	26.572	32.629
1993	1.776	18.201	212.417	25.805	34.617
1994	1.698	18.623	217.646	26.006	36.290
1995	1.712	17.736[6)]	220.540	25.016[6)]	38.037
1996	1.698	17.684[6)]	220.276	24.342[6)]	37.813
1997	1.669	17.629[6)]	220.396	24.086[6)]	38.036
1998	1.651	17.702[6)]	219.755	23.997[6)]	38.160

Tabelle 1: Die Entwicklung der Sonderschulen für Lernbehinderte in Deutschland (Quelle: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der BRD, 2000)

Für das Schuljahr 1998/99 gibt das Statistische Bundesamt folgende Daten für die Lernbehinderte in ganz Deutschland an:

Schuljahr	Sonderklassen LB	Schüler insgesamt	Weiblich
1998/99	18639	220369	83932

Tabelle 2: Angaben über die Lernbehinderte für das Jahr 1998/99 in Deutschland (Quelle: Statistisches Bundesamt, 1999, S. 181)

Der geringe Unterschied zu den Zahlen der KMK ergibt sich daraus, dass hier alle Bundesländer berücksichtigt wurden. Aus der obigen Tabelle lässt sich entnehmen, dass die Anzahl der Schüler in den Sonderschulen mit dem Förderschwerpunkt Lernen zunimmt. Die Prozentzahlen für die weibliche Schülerinnen werden vom Statistischen Bundesamt wie folgt angegeben:

[2)] Ohne Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen-Anhalt und Thüringen.- [6)] Ohne Thüringen.

Schuljahr	Einheit	Anteil der Schülerinnen in Sonderschulen
1989	%	38,05
1990	%	37,51
1991	%	37,10
1992	%	36,76
1993	%	36,59
1994	%	36,43
1995	%	36,35
1996	%	36,36
1997	%	36,38
1998	%	36,37

Tabelle 3: Anteil der Schülerinnen in den Sonderschulen in Deutschland (Quelle: Statistisches Bundesamt, 1999, Ausschnitt aus der Tabelle VII C – 2 – 7.9.1)

Aus den statistischen Daten geht hervor, dass das Verhältnis von Jungen und Mädchen mit 3:2 eine erstaunliche Konstanz aufweist (Schröder, 1990, S. 53ff.). Also scheint Schulversagen ein Jungenproblem zu sein (Preuss-Lausitz, 1999, S. 11), obwohl Mädchen im allgemeinbildenden Schulsystem stärker vertreten sind als Jungen (Faulstich-Wieland & Nyssen, 1998, S. 165). Für dieses Phänomen gelten folgende Gründe als entscheidend:

- Mädchen sind anpassungsfähiger, was in der Schule stärker belohnt wird. Jungen dagegen sind eigenständiger und können sich schwieriger anpassen.
- Es gibt mehr Jungen als Mädchen mit deviantem Verhalten und psychischen Problemen, die als Lernschwierigkeiten gedeutet werden.
- Mädchen schreiben schöner und korrekter. Diese Tatsache gilt als Erfolgsdimension in allen Fächern.
- Mädchen erhalten bessere Noten von Lehrern beider Geschlechter bei objektiv gleichen Leistungen (vgl. Preuss-Lausitz, 1993, S. 149).

Nicht nur Jungen sind in den Schulen für Lernbehinderte überrepräsentiert, sondern auch ausländische Kinder gegenüber deutschen. Diese Aussage wird durch die neueste Untersuchung von Kornmann, Burgard & Eichling (1999) bestätigt[2]. Außer einem leichten Absinken zwischen den Jahren 1991 und 1993 ist das Verhältnis der ausländischen Schüler zu den deutschen in diesen Schulen von 1985 bis 1996 in der Bundesrepublik Deutschland mit 2:1 weitgehend konstant geblieben. Die Tendenz der Überrepräsentation von ausländischen Kindern und Jugendlichen in Schulen für Lernbehinderte lässt sich auch nach dem Beitritt der neuen Bundesländer weiter verfolgen (vgl. Kornmann, Burgard & Eichling, 1999, S. 107). An dieser Stelle sollte man jedoch darauf aufmerksam machen, dass sich der Trend der Überrepräsentation nur auf die alten Bundesländer beschränkt. Außerdem bestehen zwischen den einzelnen Bundesländern bezüglich der Überrepräsentation erhebliche Unterschiede mit Baden-Württemberg als das Bundesland mit dem größten Anteil ausländischer Schüler an Sonderschulen und Schleswig-Holstein mit dem geringsten Anteil (Kornmann, 1998, S. 55ff.).

[2] Als Maß für die Überrepräsentation diente der sogenannte `Relative-Risiko-Index‘ (RR). Dieser ergibt sich als Quotient zweier Prozentzahlen: Der Nenner wird durch den Anteil aller ausländischen Schüler in Lernbehindertenschulen an der Gesamtzahl aller ausländischer Schüler gebildet. Der Anteil aller deutschen Schüler, die eine Schule für Lernbehinderte besuchen, an der Gesamtzahl aller deutschen Schüler stellen den Zähler dar.

Die Ursachenforschung für den hohen Anteil ausländischer Schüler in den Schulen für Lernbehinderte ist wegen der unterschiedlichen Tendenzen in den verschiedenen Bundesländern schwierig. Kornmann und Schnattinger (1989) haben drei mögliche Einflussgrößen untersucht: die Nationalität der Schüler, bestehende Kontakte der ausländischen Schüler zu deutschen Mitschülern und die Arbeitslosigkeit in den entsprechenden Regionen. Sie kamen zu folgenden Schlussfolgerungen: Obwohl bestimmte Nationalitäten (Türken und Italiener) in den Schulen für Lernbehinderte öfter vertreten sind, konnten ausgehend vom Herkunftsland der Schüler keine Korrelationen zu den ermittelten Prozentzahlen festgestellt werden. Als entscheidender Faktor erwies sich dagegen die Häufigkeit der Kontakte zwischen ausländischen und deutschen Schülern. Enge Kontakte zu deutschen Alterskameraden bieten Lernsituationen für den Spracherwerb und gleichzeitig Erfahrungen, die den Schulerfolg begünstigen. Auch die Arbeitslosigkeit mag in vielen Fällen Auswirkungen auf die Schülerschaft der Schulen für Lernbehinderte ausüben und zwar folgendermaßen: je niedriger die Arbeitslosenquote, desto größer der Anteil ausländischer Kinder in den Schulen für Lernbehinderte (vgl. Kornmann & Schnattinger, 1989, S. 199ff.). Sie begründen diesen erstaunlichen Zusammenhang wie folgt: „ ...von Spaun (1989) (hat) kürzlich ...festgestellt, dass in den wirtschaftlich schwächeren Regionen die Umschulungsquote für deutsche Kinder höher liegt als die für ihre ausländischen Mitschüler“ (S. 201). So ist in diesen Regionen der Anteil deutscher Kinder, die in eine Sonderschule überwiesen werden, vergleichsweise hoch und somit die Überrepräsentation ausländischer Kinder entsprechend niedrig – und umgekehrt. Durch diese Erkenntnisse scheint die zuvor erwähnte Korrelation zwischen Arbeitslosigkeit und Überrepräsentation ausländischer Kinder in den Schulen für Lernbehinderte plausibel.

Dieselbe Fragestellung griff Kornmann 1998 erneut auf. Arbeitslosigkeit oder geringes Einkommen, von denen mehr ausländische Bürger betroffen sind, werden von ihm als Ursachen von sozialer Benachteiligung verstanden, die ein Schulversagen zur Folge haben könnten. An erster Stelle sieht er jedoch die Selektionsfunktion der Schule. Schulversagen und festgestellte Sonderschulbedürftigkeit sind für ihn zwangsläufig Folge selektiver Strukturen des Bildungswesens, da eine „negative Auslese von Schülerinnen und Schülern in der Praxis schulrechtlich und institutionell vorgesehen ist und erwartet wird“ (1998, S. 61). Dabei verkennt er nicht die vorhandenen und in manchen Fällen massiven Lernschwierigkeiten bestimmter Kinder. Und so leitet er zu seinem dritten Erklärungsansatz der Überrepräsentation ausländischer Schüler in den Schulen für Lernbehinderte über, nämlich zu den individuellen Lernvoraussetzungen der Kinder für die Erfüllung der schulischen Anforderungen. Alle Maßnahmen, die auf eine Kompensation der wahrgenommenen Defizite auf Seiten der ausländischen Schüler und Schülerinnen abzielen, sind zwar unverzichtbar, aber sie können das Problem nicht beseitigen. Was bleibt, ist eine monokulturell und monolingual ausgerichtete deutsche Schule, die wenig Bezug zu den Erfahrungen der ausländischen Kinder aufweist und die ihre Defizite nicht beheben kann.

In Griechenland wurden zur Förderung der Kinder mit Lernbeeinträchtigungen die Sonderklassen konzipiert. Diese wurden, wie schon erwähnt, 1984/85 durch den Präsidialerlaß 603/82, Gesetzblatt 117/82, ins Leben gerufen. (Im Gesetzblatt 1566/85, Artikel 32, wird dieses Konzept vorgestellt). Seitdem ist die Anzahl ständig gestiegen. Die Entwicklung wird in folgender Tabelle deutlich:

Schuljahr	Sonder-schulen (S1)	Sonder-klassen (S2)	Summe sonderschulischer Einrichtungen (S1+S2)	Schüler	Lehrer	Stellen sonderpäd. Personals	Stellen d. Sonder-schulräte
1978-79	67	-	67	1997	163	-	-
1979-80	75	-	75	2092	184	-	2
1980-81	84	-	84	2360	212	-	2
1981-82	87	-	87	2536	213	-	4
1982-83	122	-	122	2725	332	-	4
1983-84	139	7	146	3241	-	-	8
1984-85	142	25	167	3484	471	-	8
1985-86	152	105	257	4989	619	-	8
1986-87	150	141	291	5330	641	24	8
1987-88	160	221	381	6929	777	64	8
1988-89	164	285	449	8200	850	200	16
1989-90	170	368	538	9150	950	200	16
1990-91	183	460	643	10200	1122	200(157)	16(11)
1991-92	186	520	706	12383	1200	200(151)	16(10)
1992-93	200	602	802	14136	1370	200(155)	16(16)

Tabelle 4: Die Entwicklung der sonderschulischen Einrichtungen, der Schüler und des Lehrpersonals (Quelle: Bildungsministerium, 1994, S. 12)

Die folgende Tabelle des Statistischen Amtes für das Bildungsministerium zeigt die Entwicklung der Sonderklassen für die nachfolgenden Jahre:

Schuljahren	Sonderklassen	Schülerzahl	Anzahl der Mädchen	Lehrerzahl
1993-1994	474	7442	2852	476
1994-1995	637	9489	3571	653
1995-1996	583	8297	3031	593
1996-1997	632	8903	3303	642
1998-1999	697	9687	-	697

Tabelle 5: Die Entwicklung der Sonderklassen und ihrer Schüler in Griechenland in den Jahren 1993 bis 1999 (Quelle: Statistisches Amt, Athen)

Außer einem Absinken in den Jahren 1993 und 1996 lässt sich auch in Griechenland eine steigende Tendenz der Schülerzahl der Sonderklassen feststellen. Die Prozentzahlen für die Schülerinnen ergeben sich in folgender Tabelle zu:

Anteil der Schülerinnen in den Sonderklassen					
Schulart	Einheit	1993/94	1994/95	1995/96	1996/97
Sonderklassen	%	38,32	37,63	36,53	37,09

Tabelle 6: Anteil der Schülerinnen in den Sonderklassen in Griechenland (eigene Erhebungen aus Tab. 5.)

Betrachtet man die statistischen Daten in den zwei Ländern, lässt sich Folgendes feststellen:

I. Obwohl dieselben Faktoren den Schulgang eines Kindes beeinflussen (Lehrer, Mittel, Methoden, soziale Umgebung, kulturelle Einflüsse), ist die Zahl der Jungen, die eine sonderpädagogische Förderung benötigen (mit ungefähr 62%), in beiden Ländern fast doppelt so groß, wie die Zahl der Mädchen (mit ungefähr 37%).

II. Obwohl die Bevölkerungszahlen beider Länder sehr unterschiedlich sind, zeigen die Prozentzahlen der Schüler, die einer sonderpädagogischen Förderung bedürfen, erstaunlich ähnliche Werte.

Demnach lassen sich in beide Ländern ähnliche Tendenzen verfolgen. Es sei darauf hingewiesen, dass in den griechischen Statistiken keine Angaben zur Staatsangehörigkeit der Schülerinnen und Schüler zu finden sind. Deshalb können keine vergleichende Aussagen bezogen auf den ausländischen Anteil der lernschwierigen Schüler gemacht werden.

Nach Skizzierung des theoretischen Rahmens von Lernbehinderungen, der Darstellung der gesetzlichen Bestimmungen, die in Deutschland und Griechenland gelten, wird im Folgenden auf die Schulpraxis eingegangen, wobei der Mathematikunterricht in Griechenland den Schwerpunkt bildet. Zuvor wird abschließend eine zusammenfassende Darstellung der Situation in Griechenland und Deutschland in tabellarischer Form aufgeführt:

	Griechenland	Deutschland
Sonderpädagogische Begriffsbestimmung	Orientiert an der amerikanischen Literatur (medizinisches defektorientiertes Modell)	Nicht abgeschlossen, seit einiger Zeit wird die Rolle der Umwelt und die ökologischen Faktoren betont
Intervention	Kam verspätet, von privaten Trägern und Vereinen wurde Initiative ergriffen	Früherkennung, durchlief viele Phasen und es entwickelten sich verschiedene Ansätze
Bildungsinhalte	Folgen der internationalen Entwicklungen ohne klare eigenständige Philosophie	Angepasst an die neueren wiss. Entwicklungen und Erkenntnisse, innovativ
Integration Behinderter	Findet nur bei den Lernbehinderten statt mit den Sonderklassen. Für alle anderen Behinderungsarten existieren die Sonderschulen	Bedeutende Integrationsbewegungen, die sich neben den etablierten Formen bewähren müssen, gegensätzliche Auffassungen
Ursachenerklärung	Fokussiert wird das zentrale Nervensystem des Schülers, welches Störungen aufweist. Somit werden die Ursachen der betroffenen Person zugeschrieben	Ursachen werden zunehmend nicht bei der betroffenen Person gesucht sondern in der Interaktion sozialer, schulischer, familiarer und kultureller Faktoren
Bildungsentscheidungen	Trägt die Schulbehörde im Einvernehmen mit den Eltern	Trägt im Einvernehmen mit den Eltern die Schulaufsicht

Tabelle 7: Zusammenfassende Darstellung der Lernbehindertensituation in Griechenland und Deutschland

2 Der Aufbau des Mathematikunterrichtes in Griechenland

2.1 Einleitung

Auf den folgenden Seiten wird der Versuch unternommen, den Mathematikunterricht in Griechenland darzustellen. Hierzu werden bestimmte Komponenten betrachtet, die der Gestaltung des Mathematikunterrichts dienen. Zunächst erfolgt ein Überblick über die Richtlinien und das Curriculum (2.2). Daraufhin werden die Lehrbücher fokussiert (2.3). Es werden die theoretischen Ansätze (2.3.1), die Prinzipien (2.3.2) und der Inhalt präsentiert (2.3.3 und 2.3.4). Es folgt eine kurze Bezugnahme zur Unterrichtsmethodik (2.4), zu den Differenzierungsmaßnahmen (2.4.1), zur Motivation (2.4.2) und zuletzt zum Stundenplan (2.5). Des Weiteren werden die Lehrziele der vier ersten Klassen aufgelistet (2.6) und die Themenauswahl und ihre Behandlung im Unterricht anhand der Lehrbücher vorgestellt (2.7).

Der Lernstoff ist von besonderer Bedeutung, denn auch die Lernschwierigkeiten der Schüler stehen in enger Beziehung zu den Lerninhalten. Bevor auf die Schwierigkeiten der Schüler eingegangen werden kann, sollte an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, welche Lehrinhalte für jede Klasse ausgewählt wurden und wie sie in der Praxis umgesetzt werden. Deshalb ist es angebracht, diesen Lehrstoff zusammenfassend zu präsentieren und gleichzeitig auch die Art, in der diese Inhalte didaktisch und methodisch aufbereitet werden, in Kürze zu beschreiben. Dadurch konkretisiert sich das Umfeld und dem Leser bietet sich die Möglichkeit der eigenen Meinungsbildung und Beurteilung. Der deutsche Leser wird nach der Vorstellung des Lehrstoffes in den griechischen Schulen einen Überblick über die Inhalte und besonders über ihre Umsetzung in der Schule gewonnen haben. Für den griechischen Erzieher ist es ebenfalls von großem Interesse, einen Blick in die Unterrichtspraxis eines anderen Landes zu werfen und die Art der Auseinandersetzung der ausländischen Kollegen mit dem Lehrstoff zu betrachten. Aus diesem Grund wurde ein deutsches Lehrwerk ausgesucht und auf dieser Grundlage die Auswahl und Behandlung der Lehrinhalte in den entsprechenden Klassen der deutschen Schulen ins Auge gefasst. Parallelen können gezogen und dadurch Analogien und Unterschiede aufgezeigt werden. Ein kontrastierender Vergleich zwischen den zwei Lehrwerken ist durchaus möglich, ebenso eine Bewertung. Das ist jedoch nicht Ziel dieser Arbeit. Die Absicht ist, über die Gegebenheiten im griechischen Bildungswesen zu informieren und eine andere Alternative für die Erziehungs- und Unterrichtspraxis aufzuzeigen.

> „Die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Formen und Zielen der Schul- und Unterrichtsorganisation fördert die Erweiterung des theoretischen Bewußtseins und vermag zugleich auch praktisch wirksam zu werden, indem der zukünftig Unterrichtende mit den im Ausland praktizierten bzw. experimentell erprobten Unterrichtsformen konfrontiert und ihm Gesichtspunkte der Auswahl vermittelt werden. Darüber hinaus vermag dieses Wissen zum gesellschaftspolitischen Engagement des Lehrers beizutragen“ (Liegle & Süssmuth, 1976, S. 12).

Zu diesem Zweck wurde das Lehrbuch „Das Zahlenbuch“ von Wittmann & Müller ausgewählt. Es handelt sich um ein neues Unterrichtswerk, das von einer Gruppe von Fachleuten und gleichzeitig sehr anerkannten Wissenschaftlern konzipiert wurde. Darin beinhaltet sind neue Ideen und eine Fülle von Innovationen bezogen auf die Vorstellung und Behandlung der Zahlen. Ihr Werk besteht aus Lehrerbänden, Schülerbüchern und Übungsheften. Es baut aufeinander auf. Diese neuen Entwürfe sind für den griechischen Leser und speziell das Lehrpersonal vom besonderem Interesse. Sie erlauben ein tiefes Eindringen in die

Welt der Zahlen, immer in Bezug zum Entwicklungsstand des Kindes. Für die griechische Unterrichtspraxis existiert einzig und allein ein Lehrwerk unter dem Namen „Meine Mathematik“ (dieses wird sowohl in den Regel- als auch in den Sonderklassen verwendet), so dass keine Alternativen oder Auswahlmöglichkeiten bestehen. Diesem Standardwerk sollte ein anderes Konzept gegenübergestellt werden.

In den Richtlinien und Lehrplänen der meisten Länder sind für die Primarstufe ähnliche Inhalte im Bereich der Zahlen und der Grundrechenarten vorgesehen. Dies trifft auch auf Griechenland und Deutschland zu. Natürlich bestehen Unterschiede bezogen auf die Auswahl der entsprechenden Einheiten, auf die Prioritäten, die bezogen auf das Zahlenverständnis und das Erlernen des Einspluseins und Einmaleins gesetzt werden und die Angebote von Demonstrations- und Arbeitsmitteln. Diese Unterschiede bestimmen die Qualität und das Niveau des erteilten Unterrichts, die Anwendung der traditionellen oder der neuen Rechendidaktik und das Bildungsideal der zuständigen Bildungsinstitute und Kultusministerien. In Griechenland übergab das Bildungsministerium die Abfassung von Richtlinien und Lehrplänen dem Pädagogischen Institut. Die Erfahrungen sind in diesem Bereich in Griechenland gering. Vor fast zwei Jahrzehnten, nämlich 1982, erschienen die heutigen Richtlinien und auch die Lehrbücher. Zu dieser Zeit erfolgte eine systematische und sorgfältige Erarbeitung von allgemeinen Richtlinien und Lehrplänen und das Verfassen von Lehrwerken nicht nur bezogen auf Mathematik, sondern auf alle übrigen Fächer. Die Anleitung, Aufsicht, Kontrolle und Verantwortung übernahm das Pädagogische Institut. Durch die Richtlinien von 1982 wurden die Richtlinien abgelöst, die 1913 festgesetzt worden waren. Im folgenden Abschnitt werden die Richtlinien und Lehrpläne und die aus ihnen resultierenden Entscheidungen für die Unterrichtspraxis vorgestellt.

2.2 Die Entwicklung der Richtlinien und Lehrpläne

Die Richtlinien und Lehrpläne werden in Griechenland vom Bildungsministerium und dem Pädagogischen Institut verfasst und in Form von Gesetzen oder Runderlassen in Kraft gesetzt. Sie dienen als Rahmenrichtlinien für die Verfassung von Lehrbüchern und als Wegweiser des Lehrers in seiner erzieherischen Tätigkeit. Die hauptsächlichen Komponenten dieser Richtlinien sind die Lehrinhalte, die Lehrziele, die Medien, die Methoden und die Evaluationsinstrumente des schulischen Unterrichts. In Griechenland waren bis 1980 die Richtlinien gültig, die im zweiten Jahrzehnt unseres Jahrhunderts (1913) erarbeitet wurden. Das Curriculum war auf die damalige Agrargesellschaft mit niedrigen sozialen Standards und kulturellem Status zugeschnitten. Die elementare Schulbildung umfasste die ersten sechs Jahre, das heißt das Absolvieren der Primarstufe. Ihr Besuch war für alle Kinder obligatorisch. Die Aufgabe der Grundschule (genannt Volksschule in Griechenland) sah man in der Vermittlung grundlegender Kenntnisse und Fertigkeiten, da die Mehrzahl der Schüler keine weiterführende Schule besuchen würde, da dies meistens die finanzielle Lage der Familie nicht erlaubte.

In der Schulpraxis war das Unterrichten der mathematischen Inhalte nach mechanisch - dogmatischen Unterrichtsprinzipien vorherrschend (vgl. Salvaras, 1985, S. 124). Für die Unterrichtspraxis gab es lediglich Schülerbücher, die auch die Lehrer benutzten. Herausgegeben wurden diese von Verlagen, deren Ziel einzig der finanzielle Gewinn war. Die Bücher enthielten eher quantitatives als qualitatives Wissen. Die verschiedenen mathematischen Teilgebiete wurden isoliert behandelt, so dass die Kinder über ein zusammenhangloses mathematisches Wissen verfügten. Noch bevor der Schüler die mathematischen Kenntnisse begreifen und verinnerlichen konnte, wurden Strategien zum mechanischen Aneignen der Inhalte vorgestellt, so dass die Folge eine generelle Konfusion war (vgl. ebd.). Hinzu kam das unzulängliche Angebot an Übungen, mit denen die Schüler ihre Fertigkeiten systematisch hätten einarbeiten und vertiefen können (vgl. Athanasopoulos & Meletiou, 1993, S. 197). Große Bedeutung gewann das Sachrechnen und Problemlösen und das Erlernen der Algorithmen. Der Begriffsbildung und der analytischen Behandlung der Rechenoperationen wurde kaum Beachtung geschenkt. Den Aussagen der damaligen Lehrenden nach waren die im Buch beinhalteten Sachaufgaben so komplex, dass sich mehrere Kollegen am Tag vor dem Unterricht zusammensetzen mussten, um die richtigen Lösungen der Aufgaben zu erarbeiten. Die Geometrie wurde getrennt als spezielles Fach ab der fünften Klasse unterrichtet. Als einzige Orientierungshilfe für das Lehrpersonal erwiesen sich die Richtlinien, da es noch keine Lehrerbände gab. Diese beschränkten sich jedoch auf die Auflistung der Lehrinhalte mit einigen begleitenden methodischen Hinweisen generellen Charakters (vgl. Salvaras, 1985, S. 124). Es war ein offenes Curriculum, welches die Lehrer nicht erfolgreich in der Praxis umsetzen konnten, weil ihnen die entsprechende Ausbildung fehlte (damals umfasste das Lehramtsstudium nur zwei Jahre). Auch die Gesellschaft verhalf nicht zur Anwendung dieser Richtlinien, weil in diesem Rahmen keine ähnliche Erfahrung vorhanden war. So stand man vor dem bekannten Problem:

> „Die sehr allgemein gehaltenen Richtlinienformulierungen der herkömmlichen Lehrpläne wurden als nicht ausreichend angesehen, da sie dem Lehrer keine Hilfe bei der Aufstellung von Lernsequenzen und eines gestuften Lehrgangsaufbaus gaben“ (vgl. Neuhaus-Siemon, 1994, S. 20).

Im Erziehungsministerium war man sich dieser Mängel bewusst und man versuchte, eine Entwicklung anzustoßen. 1964 fand die erste Reform statt. Mit dem Gesetz Nr. 4379/64 wurde die obligatorische Elementarschulbildung von sechs auf neun Jahre angehoben (6

Jahre Volksschule und im Anschluss daran 3 Jahre Gymnasium, das in Griechenland die allgemeinbildende Schule für die Sekundarstufe darstellt). Dieses Gesetzt wurde jedoch zunächst wegen der Diktatur (1967 bis 1973) nicht umgesetzt. Nach der Wiederherstellung der Demokratie wurde das Gesetz Nr. 309/76 verabschiedet, welches das verhinderte Gesetz Nr. 4379/64 in Kraft setzte (vgl. Kotsis, 1996, S. 61). Seitdem gilt die neunjährige Elementarbildung. Neugriechisch wurde zur offiziellen Sprache erklärt und das „KEME" (Abkürzung für den Begriff „Zentrum für Bildungsstudien und Weiterbildung") wurde gegründet, ein Gremium, das für die Verfassung von Richtlinien, Lehrplänen und Lehrbüchern zuständig sein sollte. 1982 erfolgte (mit dem Runderlaß 297/82) eine von der Bevölkerung begrüßte Rechtschreibreform. Zur selben Zeit wurden für die Lehrerausbildung die pädagogischen Fakultäten an den Universitäten ins Leben gerufen. So stieg die Studiendauer der Lehramtskandidaten von 4 auf 8 Semester. Mit dem Gesetz „Strukturierung und Funktion der Primar- und Sekundarstufeausbildung" (Nr. 1566/85 Abs. 22), wurde „KEME" durch das „Pädagogische Institut" abgelöst. In der Grundsatzerklärung des neuen Gremiums heißt es, dass es diesem zustünde, Stundenpläne auszuarbeiten und vorzulegen, sowie die Verfassung von Lehrerbüchern und Schülerbüchern zu verkünden (aus den einleitenden Kommentaren zu dem Gesetz 1566/85, im Zeitungsblatt der Regierung 167/30.9.85, S. 2566). Dieses Gremium übernahm auch die Ausarbeitung der neuen Richtlinien. Gleichzeitig wurden Gruppen von Lehrenden beauftragt, Lehrbücher (eingeteilt in Lehrerbände und Schülerbücher) für die einzelnen Fächer zu verfassen. Zusammen mit den Schulpraktikern kooperierten auch verschiedene Fachvertreter und legten ihre Entwürfe vor. Zu dieser Zeit erschienen die heutigen Richtlinien und Lehrbücher.

Verfolgt man die einzelnen Veränderungen seit 1960, so entfaltet sich die Entstehungsgeschichte eines Wandels, der all diese Jahre in der griechischen Bildung stattgefunden hat. Auf dem Gipfel dieser Modifikationen stand die Bildungsreform mit dem Gesetz Nr.1566/85.

> „Diese Schulreform erfolgte nicht abrupt. Sie blieb lebendig für viele Jahre und fand Ausdruck in Abstimmungen von Bildungstagungen und Empfehlungen von wissenschaftlichen und sozialen Trägern und einfachen Bürgern" (aus den einleitenden Kommentaren zu dem Gesetz Nr. 1566/85, im Zeitungsblatt der Regierung 167/30.9.85, S. 7).

Dadurch waren

> „Die neuen Lehrbücher…nicht das Ergebnis von Büroarbeit, die sich in ein paar Tagen vollendete, sondern das Resultat systematischer Arbeit und mehrjähriger gesammelter Erfahrungen" (Wougioukas, 1985, S. 10).

Diese Reform war besonders im Mathematikunterricht deutlich zu spüren. Es entstanden neue Lehrbücher auch für die ersten zwei Klassen, die es vorher nicht gegeben hatte. Die neuen Bücher waren illustriert, gepflegt und kindgerecht. Zum ersten Mal in der Geschichte des griechischen Bildungswesens erschienen auch Lehrerbände. Die neuen Kompendien wurden insbesondere von den psychologischen und pädagogischen Forschungsergebnissen der 60er Jahre geprägt, die in Griechenland erst zwei Jahrzehnte später bekannt wurden. Die Ansätze von Piaget, Bruner und Bloom bezüglich des Lernens, die weltweit Anerkennung fanden, konnten nicht ignoriert werden und bildeten den theoretischen Hintergrund der Lehrbücher (siehe 2.3.1). In Folge dessen bekam der Lernende einen neuen Stellenwert im Unterrichtsgeschehen. Man sprach von Chancengleichheit, die jetzt stärker vom Individuum her gesehen wurde.

Der Forderung nach detaillierten Formulierungen und methodischen Hinweisen für die Unterrichtspraxis wurde Rechnung getragen. So findet man in den neuen Lehrplänen nicht nur konkrete Ziele für jedes Fach und spezifisch jede Unterrichtsstunde, sondern auch Konzepte für die Unterrichtsgestaltung. In den neuen Richtlinien wird die Aufgabe und das Bildungsziel des mathematischen Unterrichts wie folgt dargestellt:

> „Ziel des Unterrichts ist es, den Schülern zu helfen, ihr rational - mathematisches Denken zu entwickeln, und die Umwelt mittels quantitativer Größen und Beziehungen zu erfassen, so dass sie Problemsituationen erfolgreich bewältigen können“ (Bildungsministerium, 1987, S. 109).

Außer den fachlichen Zielen bekommt man in den Richtlinien einen groben Überblick über die ausgewählten Inhalte für jedes Fach. Eine genaue und detaillierte Darstellung der Bildungsinhalte, die angestrebt werden, vermitteln jedoch die Lehrbücher, die in Anlehnung an die Richtlinien entstanden sind. Hier wird der Lehrstoff ausgedehnt, konkretisiert und erhält seinen eigentlichen Umfang. Somit können die Lehrbücher als Erweiterung und Ergänzung der Richtlinien angesehen werden. Neben dem Lehrinhalt, dem „Was“, wird auch die Lehrmethode, das „Wie“ des Unterrichts, thematisiert. Letzteres macht auch die Qualität des Unterrichts aus. Deshalb steht diese jederzeit im Mittelpunkt der Diskussionen der Fachleute.

Im Vergleich zu anderen Ländern Westeuropas fand diese Reform wegen der politischen und der sozialen Verhältnisse in Griechenland viel später statt. Man kann aber Ähnlichkeiten in den Begründungen und den Schwerpunkten der Bildungsreformen erkennen. Zur Verdeutlichung des Wandels bezüglich der Fachdidaktik, wird folgendes Schema vorgeschlagen, das die Merkmale des Mathematikunterrichts vor und nach 1980 typisierend vergleicht:

Vor 1980	**Nach 1980**
• Mechanisches Erlernen der Rechenoperationen	• Analytische Behandlung der Rechenoperationen
• Die Einheiten werden isoliert eingeführt	• In-Beziehung-Setzen der mathematischen Einheiten
• Getrennte Behandlung von Arithmetik und Geometrie	• Geometrie wird in Zusammenhang mit der Arithmetik vermittelt
• Problemlösen ist vorrangig	• Die Begriffsbildung, variierende Übungsformen und das Sachrechnen gewinnen an Bedeutung
• Lehrbücher sind für die 3.-6. Klasse vorhanden	• In Zusammenarbeit mit dem Pädagogischen Institut und dem Bildungsministerium werden Lehrbücher für alle Klassen herausgegeben
• Offenes Curriculum, welches die Lehrer in der Praxis nicht umsetzen können	• Teilweise geschlossenes, teilweise offenes Curriculum mit methodischen Hinweisen für den Lehrer
• 2 jährige Lehrerausbildung	• 4 jährige Lehrerausbildung
• Frontalunterricht	• Buchzentrierter Unterricht
• Autokratische Schule	• Demokratische Schule

2.3 Die Lehrbücher

In Griechenland sind die Lehrbücher einheitlich, das heißt, alle Schüler und Lehrer benutzen im ganzen Land das gleiche Lehrbuch. Es gibt kein pluralistisches Angebot wie z. B. in Deutschland. Die Bücher werden jedes Jahr kostenlos an die Schüler verteilt und gehören zu ihrem Besitz. Die entsprechenden Kosten übernimmt der Staat. Das griechische Lehrbuch für den Mathematikunterricht heißt „Meine Mathematik“ und die Herausgeber sind Apostolikas, G., Dionisopoulou , Tr. & Salvaras, G.. Der Lehrstoff jeder Klasse wird in den Lehrbüchern in Grobeinheiten unterteilt, wie z. B. Größen, Geometrie, Arithmetik. Diese sind in kleinere Einheiten untergliedert, in denen die Lehrinhalte und die Lehrziele jeder Unterrichtsstunde beschrieben werden.

2.3.1 Theoretische Ansätze und deren Umsetzung in der Praxis

Die Präsentation jedes Gebietes in der Mathematik beruht psychologisch auf der Theorie von Piaget. Nach dieser Theorie durchläuft das Kind, das sich im Schulalter befindet, die Stufe der „konkreten kognitiven Operationen“. Ein Merkmal dieser Stufe ist, dass die Kinder eine Logik entwickeln, indem sie Handlungen untereinander koordinieren, die erst mit konkretem Material und später mit dessen kognitiven Abbildungen durchgeführt werden. Das kindliche Denken bezieht sich in diesem Alter auf bestehende Objekte mit bestimmten Eigenschaften und auf Operationen, die realisiert werden können. Diese Charakteristika des Denkens werden durch das Wort „konkret“ eingeschlossen (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerbuch der 5. Klasse 1988, S. 5). Der Begriff „kognitiv“ drückt aus, dass diese Handlungen auch in Gedanken durchgeführt werden können, in der Form von kognitiven Bildern, sprachlichen und arithmetischen Symbolen, die die Objekte vertreten. Die Summe der konkreten (und abstrakten) kognitiven Handlungen, die ein Kind vollziehen kann, macht sein logisch-mathematisches Denken aus (ebd., S. 228).

Nach Piaget wird Unterricht als erfolgreich angesehen, wenn er sich nicht nur auf die Ebene der Theorie beschränkt, sondern den Schülern auch reiches und vielfältiges Lehrmaterial anbietet, um eine gewisse Aktivität hervorzurufen (vgl. Aebli 1970, S. 75). Diese Forderung ist besonders bei Schülern mit Lernproblemen unerlässlich. Es wird angestrebt, dass der Schüler wesentlich zur Bildung seiner Erfahrungen beiträgt. Um die Dinge begreifen zu können, reicht es nicht aus, dass nur Eindrücke erworben werden. Wirkliche Handlungen müssen vollzogen und gewisse Operationen ausgeführt werden, aus denen die Kenntnisse und der gedankliche Gehalt resultieren. Aus diesen konkreten Operationen entwickelt sich dann das abstrakte Denken, das innerlich mit vorgestellten Objekten operiert.

> „Überall sind es die Operationen, welche die Begriffe definieren, und der Unterricht muss daher den Schüler dazu bringen, diese Operationen zu vollziehen, zuerst tatsächlich und dann in `verinnerlichter´ oder stellvertretender Form“ (Aebli 1970, S. 87).

Die Schüler- und Lehrerbücher befolgen konsequent diese Forderungen. Daher wird vorgesehen bzw. vorgeschlagen, dass in der ersten Hälfte der Unterrichtsstunde Hantieren und Handlungen mit differenziertem Lehrmaterial stattfinden, so dass die Vorstellungen für die mathematischen Begriffe gebildet werden. Der Rest der Stunde wird der Verfestigung des neuen Wissens gewidmet (vgl. Lehrerband, 4. Klasse, S. 8). Die Wichtigkeit, die der ersten Phase zugerechnet wird, zeigt sich in der Tatsache, dass sie in jeder Unterrichtsstunde realisiert werden soll und dass diese Strukturierung jede Unterrichtsplanung kennzeichnet.

Mit der Versetzung in höhere Klassen ändert sich auch die Art, in der der Lehrstoff präsentiert wird. Das Hantieren und Handeln mit dem konkreten Material nimmt ab und die Vorstellung der mathematischen Begriffe und Fertigkeiten wird durch ihre Vertreter, Schemata und Symbole, durchgeführt.

Bei der Auswahl und der Anordnung der Lehrinhalte, der Annäherung der verschiedenen Gebiete und der Auswertung bestimmter Handlungen hat die Theorie von Bruner eine wichtige Rolle gespielt. Es wurde Bruners Annahme zu Grunde gelegt, dass „jedem Kind in jedem Stadium seiner Entwicklung jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form beigebracht werden kann“ (vgl. Bruner 1973, S. 61). Beruhend auf dieser These haben die Verfasser der Schulbücher den alten Lehrstoff mit vielen neuen Aspekten bereichert. So werden auch in den unteren Klassen Themen wie die Bruchzahlen, die geometrischen Grundformen oder der Begriff der Wahrscheinlichkeit besprochen. Natürlich werden diese Gegenstände in einer Weise behandelt, die den Denkformen des Kindes entsprechen. Früher wurden diese Themen erst ab der fünften Klasse behandelt.

In den neuen Programmen tauchen die gleichen Begriffe und Operationen in mehreren, teilweise in allen, Jahrgängen auf. Es entsteht den Eindruck von Wiederholungen. Hier handelt es sich um den sogenannten *spiralförmigen Aufbau* des Stoffes: kleine Wissenselemente werden aufgegriffen und stufenweise ausgeweitet. In den unteren Klassen werden Schüler mit wichtigen Begriffen auf weniger exakte und mehr intuitive Weise vertraut gemacht. In höheren Klassen werden die Themen weiter entwickelt und wieder aufgenommen. Die Präsentation desselben Themas erfolgt auf einer höheren Stufe und es werden kleine oder große Schritte voran gemacht (vgl. Lehrerbuch der 2. Klasse 1990, S. 9). Diese Struktur der Lehrbücher erlaubt, dass die Schüler ihre mathematischen Kenntnisse schrittweise erwerben und zwar so, dass jedes neue Wissen und alle neuen Informationen an vorheriges, bereits vorhandenes Wissen anknüpfen und darauf bauen.

> „So haben alle Operationen und Begriffe ihre Geschichte, die Geschichte ihres progressiven und vollkommenen stetigen Aufbaus, ausgehend von früheren Denkelementen“ (Aebli 1970, S. 76).

Für die Vermittlung der vorgesehenen Lehrinhalte wird der Unterricht in Etappen strukturiert. Bruner strukturiert den Lernvorgang in drei Stufen, die enaktive, die ikonische und die symbolische Stufe. Zuerst hantiert der Schüler mit dem ausgewählten Material, in der Folge bearbeitet er dessen Abbildungen und am Ende setzt er sich mit Symbolen oder Ideen auseinander (vgl. Filippou & Christou, 1995, S. 67). Diese Prozedur wird auch in den Schulbüchern befolgt. Anhand eines Beispiels soll dies verdeutlicht werden. Bei der Aufgabe „Peter hat 32 Kaugummis, Anna hat 25, wie viele haben beide zusammen?“ wird mit der Stufe der Handlungen begonnen. Die Schüler holen ihre Stäbchen und stellen die Situation dar. Die Zahl 32 wird mit drei Bündeln (Zehner) und zwei losen Stäbchen (Einer) ausgedrückt und die 25 mit zwei Bündeln und fünf losen Stäbchen. Danach werden die Schüler zur ikonischen Darstellung aufgefordert. Das wird auf der Tafel oder im Heft durchgeführt und sieht ungefähr so aus:

Peter ||| • •

Anna || • • • • •

Insgesamt ||||| • • • • • • •

Auf der symbolischen Ebene werden dann die arithmetischen Symbole eingeführt:

$$\begin{array}{c} 30+2 \\ 20+5 \\ \hline 50+7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3Z+2E \\ 2Z+5E \\ \hline 5Z+7E \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 32 \\ +25 \\ \hline 57 \end{array}$$

Diesem Vorgehen begegnet man in allen Schulbüchern. Es wird differenziertes Material empfohlen, mit dem die Schüler die beschriebene Situation in Handlungen übersetzen. Auf der Tafel werden Schematisierungen vorgenommen und in den Übungsheften wird schriftlich mit der symbolischen Sprache geübt. Sobald die Schüler diese Strategien beherrschen, kann eine Stufe übersprungen werden. Nur die zwei übrigen werden angewendet, um an das Ergebnis zu kommen. Manchmal wird auf die Handlungen, manchmal auf die bildliche Darstellung verzichtet. In manchen Kapiteln wird nur mit arithmetischen Symbolen gearbeitet. Beim Erlernen der vier Grundrechenarten werden z. B. manchmal den Schülern Aufgabenreihen angeboten, wobei diese ohne Anschauungsmaterial und weiteren Hilfen die Rechenverfahren üben.

2.3.2 Schulbücher und ihre Prinzipien

Die grundsätzlichen Prinzipien der griechischen Schulbücher werden in den Prologen der Lehrerbände aufgelistet. Die wichtigsten Aspekte werden an dieser Stelle ausgeführt:

- Gewichtung des einsichtigen Lernens im Unterricht.

Ein großer Teil der Unterrichtszeit wird der Begriffsbildung mittels geplanter Aktivitäten gewidmet. Bis zur Einsetzung der aktuellen Richtlinien und Lehrpläne herrschte während des Unterrichts der Lehrermonolog und der Frontalunterricht vor. Die Schüler eigneten sich das vorgefertigte Wissen mechanisch an. Durch den Einfluss der neuen Mathematik wurde ein stärkeres Gewicht auf das einsichtige Lernen gelegt. Gefordert wird nun, dass die Schüler selbst an der Erkundung und Erforschung der Zusammenhänge beteiligt sind (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 2. Klasse, S. 12). In diesem Sinne scheint der Unterricht am produktivsten, in dem die Schüler am meisten zu Wort kommen und der Lehrer am wenigsten eingreift (vgl. ebd.). Die Lehrinhalte werden nicht nur vorgestellt, sondern hinterfragt und analysiert. Wichtig ist, dass die Schüler nicht nur begreifen, wie gerechnet wird, sondern auch, wieso man auf eine bestimmte Art und Weise hervorgeht. Sie sollen in der Lage sein, ihre Handlungen zu reflektieren und zu begründen, um sich der Struktur des Faches bewusst zu werden.

- Das Lernen wird aktiv erworben.

Die mathematische Erziehung strebt ihre Ziele durch die persönliche und aktive Teilnahme der Schüler an der Erforschung und Entdeckung der mathematischen Inhalte an. Zu diesem Zweck werden den Schülern Gelegenheiten geboten, Objekte zu erkunden und mit ihnen zu operieren, um die Beziehungen zwischen ihnen zu erkennen. Es wird betont, dass die logisch-mathematischen Begriffe nicht nur durch Vorzeigen von Lehrmaterial gebildet werden können. Sie resultieren vielmehr aus den Handlungen der Schüler mit den Materialien (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 2. Klasse, S. 10). Diese Einsichten beruhen auf den Ansätzen von Bruner, nach dem jedes gültige Wissen synonym mit einer gültigen Operation ist, und auf der Theorie von Piaget, der dafür plädiert, dass, das Kind zunächst mit Objekten und schließlich mit Handlungen experimentiert. Die durchgeführten Handlungen werden schrittweise verinnerlicht und verwandeln sich in kognitive Schemata, die reversibel sind (vgl. ebd., S. 7-8). Diese zwei Wissenschaftler und ihre Erkenntnisse werden in jedem Lehrerband hervorgehoben.

- Respekt vor dem individuellen Arbeitsrhythmus jedes Kindes.

Das Schulbuch empfiehlt dem Lehrer, die Schüler zu ermuntern, entsprechend ihren Fähigkeiten und Möglichkeiten zu arbeiten. Erstrebt wird, dass jeder Schüler die Leistungen erbringt, zu denen er befähigt ist. Sowohl der Arbeitsrhythmus jedes Schülers als auch der Schwierigkeitsgrad des Lernstoffes müssen dabei berücksichtigt werden. Die Einordnung des Lehrstoffes nach dem Spiralprinzip unterstützt diese Forderungen. Jeder Lerngegenstand wird zuerst in seiner einfachsten Struktur repräsentiert, so dass das Verständnis auch den schwächsten Schülern ermöglicht wird. Dieselben Begriffe werden in weiteren Durchgängen wiederholt. Somit können diejenigen Schüler, die in der ersten Auseinandersetzung mit dem Lehrstoff nicht erfolgreich waren, eine zweite Chance wahrnehmen. Es handelt sich jedoch nicht um eine bloße Wiederholung. Der Inhalt wird gleichzeitig vertieft und mit neuen Elementen bereichert (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 2. Klasse, S. 9).

- Förderndes Unterrichtsklima.

Das mathematische Fach fordert von den Schülern Abstraktionsvermögen und hohe Konzentration. Innerhalb einer Unterrichtsstunde werden mehrere Aufgaben bearbeitet. Das Unterrichtsklima, das in der Klasse herrscht, kann die Schülerarbeit erschweren oder erleichtern. Als fördernd gilt die Umgebung, die die Kommunikation und die Zusammenarbeit der Schüler erleichtert oder initiiert und die Konkurrenz zwischen ihnen beschränkt. Die Differenzierung und Variierung der Unterrichtsformen (Gruppen-, Partner-, Einzel- und Klassenarbeit) unterstützen weiterhin in hohem Maß die Zielsetzungen des Unterrichts (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 2. Klasse, S. 5). Bei der Unterrichtsgestaltung spielt die Art, in der die Inhalte dargeboten werden, eine wichtige Rolle. Die Aktivitäten, die im Lehrerband für den Einstieg in den Unterricht vorgeschlagen werden, haben eine spielerische Form. Dies soll zur Schaffung einer lockeren Atmosphäre im Klassenzimmer und zur Stärkung der Schülermotivation verhelfen (ebd.). Gleichzeitig wird die natürliche Aktivität der Kinder aufgegriffen und für die Inhalte des Mathematikunterrichts gewonnen.

In den folgenden zwei Abschnitten werden die griechischen Lehrbücher näher betrachtet und Informationen zu ihrem Aufbau und der Strukturierung ihres Inhaltes gegeben.

2.3.3 Die Lehrerbände

Für die Lehrer wurde in den vier ersten Klassen jeweils ein Band verfasst. Die Größe jedes Bandes ist 15 cm × 23 cm und besteht im Durchschnitt aus 260 Seiten. Nur der Lehrerband der zweiten Klasse weist einige Seiten mehr auf, nämlich 330 Seiten. Der Lehrerband ist in Unterrichtseinheiten unterteilt, die den entsprechenden Einheiten des Schülerbuches zuzuordnen sind. Hier findet der Lehrer didaktische und methodische Hinweise für jede einzelne Unterrichtsstunde. Diese folgen einem bestimmten Schema:

Allgemeine Informationen – Lernniveau – Lernziele – Materialien – Aktivitäten.

In den „allgemeinen Informationen“ wird zunächst die Anzahl der Unterrichtsstunden präsentiert, die für die Auseinandersetzung mit einem bestimmten Thema vorgesehen ist. Es folgen generelle Informationen zum Thema und zum Entwicklungsstand der Schüler. Die Punkte, die im Unterricht behandelt werden sollen, werden ausgeführt, der Schwierigkeitsgrad des Inhaltes wird aufgezeichnet. Die Vorkenntnisse der Schüler (aus den vorherigen Klassen) im Bezug auf das Thema werden unter dem Untertitel „Lernniveau“ beschrieben. Auf diesem Vorwissen wird das neue Wissen aufgebaut und erweitert. In den „Lernzielen“ werden die angestrebten Ziele des Unterrichts formuliert und die erwarteten Fähigkeiten der Schüler geschildert. Bei der Formulierung der Lernziele werden die verbalen Ausdrücke verwendet, die im Schülerbuch zu finden sind, z.B.: formulieren, berechnen, lösen, lernen, kennen lernen, machen, finden, ausführen, konstruieren, usw. Die Lernziele, die für das Schuljahr gesetzt werden, machen auch das „Lernniveau“ der nächsten Klasse aus. Die „Materialien“, die im Unterricht eingesetzt werden, sind unterschiedlich und hängen vom Lerninhalt ab. Diese gehören zum Inventar der Schule oder werden vom Lehrer und den Schülern mitgebracht. Dabei handelt es sich um vorgefertigte geometrische Formen und Körper, Steckwürfel, Stäbchen, Streichhölzer, Rechenmaschinen, Zahlenkarten, Maßstäbe, Geld, alltägliche Gegenstände und Ähnliches. Der größte Raum im Lehrerband wird den „Aktivitäten“ eingeräumt. Gemeint sind die didaktischen Handlungen des Lehrers und die Schüleraktivitäten, die in der Klasse durchgeführt werden sollen, um den Schülern die Einsicht in die bestimmte Unterrichtsthematik zu ermöglichen. Im Mittelpunkt dieser Aktivitäten stehen die Schüler, die in dieser Phase aktiv werden sollen. Der Lehrer gibt Anweisungen und organisiert den Ablauf der Handlungen. Nach der enaktiven Phase kann die Arbeit mit den Schülerbüchern angeschlossen werden, die auf der ikonischen und symbolischen Ebene beruht.

Die detaillierte Beschreibung der einzelnen Unterrichtsschritte im Lehrerband mag den Eindruck vermitteln, dass das griechische Curriculum rigoros geschlossen ist. Das ist jedoch nicht der Fall. In der Einleitung des Lehrerbandes der ersten Klasse wird einem solchen Missverständnis vorgebeugt. Es wird betont, dass die Bücher weder bezwecken, den Unterricht zu normieren, noch die Initiative, Kreativität und Flexibilität der lehrenden Person zu beschränken. Es ist nicht verbindlich, dass die didaktischen Handlungen so ausgeführt werden, wie sie beschrieben werden. Der Lehrer ist frei, seinen eigenen Vorstellungen zu folgen, wenn ihm diese geeigneter und angemessener erscheinen (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 2. Klasse, S. 6). Falls er seinen eigenen Konzeptionen folgt und nicht den im Lehrerbuch angebotenen, sollten diese bestimmte Voraussetzungen erfüllen: sie sollten einfach sein, vom Konkreten zum Abstrakten führen und sowohl Einzel- als auch Gruppenarbeit einbeziehen. Man sollte mit Klarheit aus den Handlungen ableiten können, welche Inhalte gelehrt werden sollen. Weiterhin sollte die Anwendung der Schülerbücher und die Beteiligung der Schüler bei der Mitgestaltung des Unterrichts ermöglicht werden (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 3. Klasse, S. 6-8).
Der wichtigste Grund für die Abfassung von detaillierten Lehrerbänden ist der lange Zeitraum, der vom Abschluss des Studiums der Lehrer vergeht, bis sie ihren Beruf ausüben können. Manchmal ergibt sich eine Wartezeit von acht bis zehn Jahren. Der Mangel an Fortbildungsangeboten und Qualifizierungsmöglichkeiten ist ein weiterer Grund, der die analytische Darbietung der Lehrinhalte erforderlich macht (vgl. Tsiplitaris, 1995, S. 248). Ferner soll der Unsicherheit gegenüber einer Klasse und einer unmotivierten Unterrichtsplanung entgegengewirkt werden (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 3. Klasse, S. 7).

2.3.4 Die Schülerbücher

In den ersten vier Klassen sind die Schülerbücher zweibändig. Jeder Band ist vom Format her etwas größer als die Lehrerbände, 17 cm × 23 cm, und die Seitenzahl beträgt durchschnittlich 160 Seiten. Die Schülerbücher sind keine Banken vorgefertigten Wissens, sondern Arbeitsbücher, die die Schüler zum Erkunden und Entdecken des Wissens anregen sollen. Zu diesem Zweck enthalten sie Übungen, die auf den Buchseiten ausgefüllt werden oder beschreiben Handlungen, die in der Klasse durchgeführt werden sollen (vgl. Wougioukas, 1985, S. 12). In diesem Sinne sind sie auch gleichzeitig die Arbeitshefte der Schüler. Es wird nicht verlangt, dass sämtliche Übungen, die für eine Unterrichtseinheit im Schülerbuch stehen, im Rahmen des Unterrichts auch bearbeitet werden. Die Verfasser der Bücher warnen sowohl vor dem endlosen als auch vor dem unzulänglichen Üben:

> „Der Lehrer sollte erkennen, dass mit endlosen Übungen wertvolle Zeit verschwendet wird und gleichzeitig das Interesse des Kindes schwindet, genauso wie durch das unzulängliche Üben das Interesse für den Unterricht abstumpfen kann“ (Salvaras, 1985, S. 151).

Das Arbeiten mit diesen Büchern setzt voraus, dass die didaktischen Handlungen, die im Lehrerband vorgeschlagen werden, vorher durchgeführt worden sind. Denn nur so wären der theoretische Hintergrund und die mathematischen Begrifflichkeiten vorhanden, die das Arbeiten mit den Büchern ermöglichen. Die Schülerbücher sind in Unterrichtseinheiten eingeteilt. Jede Unterrichtseinheit umfasst zwei bis vier Seiten. Der Inhalt wird in Form von Aufgaben angeboten. Außer den Übungen, die für jede Unterrichtseinheit vorgesehen werden, gibt es zwei weitere Übungsformen, die einen übergreifenden Charakter haben. Der erste Übungstyp umfasst Übungen, die am Ende jedes Kapitels auftreten. Sie bilden die Lernzielkontrollen und beziehen sich auf die Wissenselemente des gesamten Kapitels. Zusätzlich findet man auch Übungen, die das Kopfrechnen fördern sollen. Es handelt sich um „Schnüffelaufgaben“, die die Schüler ohne Hilfe von schriftlichen Notationen bewältigen sollen. Die mathematischen Inhalte werden in vielen Fällen mittels Bildern vermittelt. Die Abbildungen und Zeichnungen sind farbenfroh, humorvoll und für die Schüler anregend gestaltet. Besonders reiche Illustration findet man in den Schülerbüchern der ersten beiden Klassen. Diese nehmen in den nächsten Klassen prozentual ab. Abgebildet werden unter anderem zahlreiche Repräsentanten des Tier- und Pflanzenreiches, Kinder in verschiedenen Alltagssituationen, geometrische Figuren, Zahlenreihen und Zahlenstufen. Angeregt durch diese Bilder versuchen die Schüler, die abgebildeten Situationen in Worte zu fassen (kleine Geschichten zu erfinden), zu interpretieren und Vorschläge für den Ausgang der Geschichte zu machen.

Als Evaluationsinstrumente für den erteilten Unterricht wurden zu den Schülerbüchern vom Pädagogischen Institut die bereits erwähnten Lernzielkontrollen konzipiert. Es handelt sich um standardisierte Tests, die am Ende einer jeden großen Themeneinheit geschrieben werden. Für die zwei ersten Klassen sind diese in das Schülerbuch eingebettet, welche die Lehrer aus verständlichen Gründen in den ersten Tagen des Schuljahrs abtrennen und aufbewahren. Für die übrigen Klassen sind sie in Heften zusammengefasst. Der Lehrer verteilt diese Arbeitsblätter am Ende der thematischen Einheit und lässt sie innerhalb einer Unterrichtsstunde ausfüllen. Aus dem Studium der schriftlichen Leistungen erhält der Lehrer wichtige Informationen über die Fähigkeiten und den Leistungsstand seiner Schüler. Er erkennt ihre Schwierigkeiten und Defizite und kann seinen Unterricht so umorganisieren, dass er an die Lernvoraussetzungen der Schüler angepasst wird und ihnen die nötigen Lernhilfen bietet („Meine Mathematik“, Lehrerband, 2. Klasse, S. 9). Somit sind die Lernzielkontrollen eine bedeutende Rückmeldung für die didaktische Leistung des Lehrers und das Erreichen der Lernziele. Zusammen mit dem Lernverhalten und der Teilnahme am Unterricht bilden diese die Basis für die Leistungsbeurteilung des jeweiligen Schülers.

2.4 Zur Unterrichtsmethodik

Es ist unumstritten, dass der Schulunterricht in Griechenland vor 1980 lehrerzentriert war. Die Schüler standen unter der Macht des Lehrers, dessen Autorität und Vorbildfunktion nicht in Frage gestellt werden durfte. Ein Bild über die Rollenverteilung im traditionellen Unterrichtsgeschehen vermittelt das folgende Zitat:

> „Traditionell bestand die Rolle des Schülers hauptsächlich aus seinen Verpflichtungen. Zu diesen zählten seine Anwesenheit in der Schule, seine Teilnahme am Unterricht und die Unterwerfung unter die Regeln des schulischen Lebens“ (Gotovos, 1990, S. 131).

Und weiter:

> „Das Vorherrschen des Lehrers während des Unterrichts lässt sich in zwei Bereichen manifestieren: a. in der Unterrichtsmethodik und b. in der Bewahrung der Disziplin. In beiden Fällen gibt es Komponenten, die die Dominanz des Lehrers und die Konzentration verschiedenartiger Mächte in einer Person aufzeigen, z.B.: Der Lehrer bestimmt die Regeln, gibt Anweisungen für die Schüleraktivitäten, überprüft das Einhalten der Regeln, stellt Verstöße fest und bestraft“ (ebd., S. 150).

Der Lehrer war also der Führer, der autokratische Lehrertyp, der seine Schüler gefühllos dirigierte (vgl. die Lehrertypen in Sander, 1981, S. 70). Zwar wurden die Lehrer auch vor 1980 in ihrer Studienzeit mit den neueren Erkenntnissen der Erziehungswissenschaften konfrontiert. Diese ließen sich aber nicht problemlos in der Schulpraxis anwenden. Eine Schulpraxis, die von ihrem Verständnis und ihrer Struktur her autoritär und lehrerzentriert geprägt war, stand solchen Versuchen entgegen. Im Laufe der Zeit geriet die Position des Lehrers unter Kritik. Die Gesellschaft wurde liberaler und dieser Liberalismus wurde auch auf die Schulen übertragen. Die Schüler bekamen einen Stellenwert und eine eigene Identität, Bestrafungen wurden verboten, die Ziffernzensur (in der Grundschule) und die „Nichtversetzung“ wurden abgeschafft. Die bedingungslose Autorität in der Schule wird heute nicht toleriert und die Schülerorganisationen in der Sekundarstufe haben ein Mitspracherecht bei vielen Themen des schulischen Alltags. In der einschlägigen Literatur ist die Rede von schülerzentriertem Unterricht, von Unterrichtung in Gruppen und offenem Unterricht. Grundgedanken der antiautoritären Erziehung, der Gestaltpsychologie und der Tätigkeitstheorie der sowjetischen kulturhistorischen Schule (Leontjew, Galperin) werden mit der Bewegung des offenen Unterrichts in Zusammenhang gebracht und zur Stützung konzeptioneller Positionen herangezogen. Diese neue Ordnung wurde durch die Bildungsreform hervorgerufen und unterstützt, die 1980 in die Wege geleitet wurde. Zu den Prioritäten der Bildungsreform gehörten die Verfassung neuer Lehrpläne und Lehrbücher und die Revision der Lehrmethoden. Im Folgenden wird versucht, einen Eindruck des Unterrichtsvorgangs zu vermitteln, so wie er mit den heutigen Lehrkompendien durchgeführt wird.

Auf den wenigen Seiten der Einleitung in den Lehrerbänden werden die Rollen charakterisiert, die der Lehrer und die Schüler während des Unterrichtsvorgangs übernehmen sollen. Intention der Lehrbücher war es, die Lehrer aus dem Zentrum des Unterrichtsgeschehens und die Schüler aus der passiven Rolle der Zuhörer und Zuschauer herauszuführen. Alle nötigen Handlungen wurden den Schülern übergeben und der Lehrer übernahm die Rolle des Mitarbeiters und des Organisators. Die Verfassergruppe der Lehrbücher sieht als Voraussetzung eines erfolgreichen und effektiven Unterrichts die sorgfältige Vorbereitung des

Lehrers auf die bevorstehende Unterrichtseinheit an. Zunächst sollte der Lehrer die generellen Informationen studieren, die ihm das nötige Allgemeinwissen für die entsprechende Einheit vermitteln sollen. Um sein Wissen zu erweitern, kann er sich auch anderer Literaturquellen bedienen. Der Bestimmung der Lernziele wird in der Folge große Bedeutung beigemessen. Der Lehrer sollte sich der genauen Lernziele bewusst werden, die er mit seinem Unterricht erreichen möchte. Ob diese in der Einführung oder im Abschluss der Unterrichtsstunde bekannt gemacht werden, wird im Lehrerband nicht festgelegt, dies bleibt dem Lehrer überlassen. In unmittelbarer Beziehung dazu stehen auch die didaktischen Handlungen, die geplant werden. Mit diesen Aktivitäten erfolgt der Einstieg in den Unterricht. Falls es Hausaufgaben von der letzten Stunde gibt, werden diese als erste besprochen. Die Schüler melden sich, um ihre Lösungen an der Tafel zu präsentieren. Manchmal fragt der Lehrer seine Schüler über die Hauptthemen der letzten Stunde und überprüft auf diese Weise, ob sie „angemessen fleißig" zu Hause waren oder ob der Stoff der letzten Stunde verstanden worden ist. Danach wird der neue Stoff eingeführt, der zuerst durch verschiedene Handlungen vorgestellt wird. Die Handlungen werden von den Schülern ausgeführt und durch Fragen, Anleitungen, Hinweise, Aufforderungen und Beiträge des Lehrers unterstützt, die dem Verständnis des Lerninhalts dienen sollen. Bei der Auswahl der didaktischen Handlungen sollte der Lehrer weitere Komponenten berücksichtigen: den Schwierigkeitsgrad des Inhalts, das Leistungs- und Lernniveau seiner Klasse, die Schwierigkeiten bestimmter Schüler, die Zeit, die zur Verfügung steht und die Aufgaben des Schülerbuches, die der Vertiefung des Gelernten dienen sollen. Von den Arbeitsmitteln, die im Lehrerband empfohlen werden, werden diejenigen besorgt, die für die Durchführung der didaktischen Handlungen notwendig sind. Die Schüler operieren mit dem Arbeitsmaterial, drücken ihre Überlegungen aus, beantworten Fragen und schreiben an der Tafel, wenn sie vom Lehrer dazu aufgefordert werden.

Sobald der Lehrer den Eindruck gewonnen hat, dass seine Schüler die zu erlernenden Begriffe verstanden haben, kann die Arbeit mit den Schülerbüchern beginnen. Die Bücher werden geöffnet und die Aufgaben für die entsprechende Einheit werden behandelt. Die Angaben zu den Aufgaben werden laut gelesen, vom Lehrer werden die nötigen Erläuterungen gegeben. Beim Lösen der Aufgaben arbeiten die Schüler meist in Einzelarbeit. Wenn es Fragen gibt, werden diese laut besprochen. Während die Schüler arbeiten, geht der Lehrer herum und beobachtet aufmerksam den Fortgang der Schülerarbeit. Dabei sollte er die Lernziele in Verbindung zu den Schülerleistungen setzen. Um die Leistungen der Schüler zu bewerten, sollte er nicht nur die schriftlichen Leistungen berücksichtigen. Weiterhin sollte er ihr Lernverhalten während des Unterrichts, ihre Teilnahme an den verschiedenen Aktivitäten und ihre Fähigkeit, ihre Gedanken verbal zu äußern, mit in die Bewertung einfließen lassen. Dies ist der Unterrichtsrahmen, wie er in den Lehrerbänden geschildert wird (vgl. „Meine Mathematik", Lehrerband, 2. Klasse, S. 11-12).

Die schülerischen Aktivitäten, die Beweglichkeit der Schüler, das Manipulieren des Materials, das Verbalisieren der Handlungen und die Zusammenarbeit zeigen eine aktive Klasse mit einem schülerzentrierten Charakter. Auf der anderen Seite sind die Eingriffe des Lehrers, seine Fragen, seine Anleitungen und seine deutliche Anwesenheit Merkmale eines lehrerzentrierten Unterrichtes. Aus diesem Grund kann man den Unterricht in Griechenland zwischen lehrerzentriertem und schülerzentriertem Unterricht platzieren. Auf jeden Fall lässt sich ein oft „...dogmatisches Festhalten an den Anweisungen bezüglich der zeitlichen Abfolge, der inhaltlichen Festlegung in verbindlichen Lernsequenzen, des Einsatzes von Medien, der Bestimmung von Arbeits- und Sozialformen und der standardisierten Lernzielkontrollen..." feststellen, was als eine „...Art `Neuauflage des Herbartianismus' gesehen werden kann..." (Gerr, 1991, zitiert nach Jürgens, 1998, S. 12) und eher als lernzielorientierter Unterricht bezeichnet werden kann. Der Lehrer ist derjenige, der in Anbetracht seiner didaktischen Vorgaben und Ziele die Entscheidungen trifft, der Schüler ist derjenige, der reagiert und ausführt (vgl. ebd., S. 13).

Eine umfassende Untersuchung, die die Evaluation der Lehrpläne und der Lehrbücher thematisiert hätte, gab es bisher nicht. Lediglich ein Projekt kleineren Umfanges, das von Professor A. Papas initiiert wurde, wurde durchgeführt, es bezog sich allerdings nur auf den Sprachunterricht. Dreihundert Studenten analysierten die Bücher des Sprachunterrichts in der Absicht, die heutige Schule und in Anlehnung dazu den erteilten Unterricht zu charakterisieren und eventuelle Defizite des Sprachunterrichts aufzuzeigen. Um den Unterrichtsablauf zu beschreiben, wurden folgende Bewertungskategorien vorgegeben:

- Lehrerzentriert (geprägt durch den Verbalismus des Lehrers und die Formalisierung/Normierung des Unterrichts)
- Schülerzentriert (gekennzeichnet durch die Berücksichtigung der Schülerbedürfnisse und -interessen, die im Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehens stehen)
- Buchzentriert (bestimmt durch die Beschränkungen und Vorbestimmungen, die sowohl die Schüler- als auch die Lehrerbände dem Unterricht setzen)
- Lehrer- und buchzentriert

Die Untersuchung kam zu folgendem Ergebnis: 185 Studenten (62%) charakterisierten den Unterricht als buchzentriert, 45 (15%) als schülerzentriert, weitere 45 Studenten (15%) empfanden ihn als lehrerzentriert und die übrigen 25 (8%) wählten das Kriterium lehrer- und buchzentriert (vgl. Papas, 1995, S. 125). Obwohl diese Untersuchung sich auf den Sprachunterricht bezieht, lässt sich auch für den Mathematikunterricht folgern, dass dieser mit hoher Wahrscheinlichkeit vor allem buchzentriert gestaltet wird.

Anzumerken ist, dass die Autoren der Lehrbücher darauf hinweisen, dass durch die ausschließliche Verwendung des Lehrwerkes die Unterrichtsabläufe buchzentriert erfolgen. Aus diesem Grund sind Anmerkungen in den Lehrerbänden zu finden, die dem Lehrkörper weitere Alternativen zur Gestaltung des Unterrichts eröffnen. Diese Möglichkeiten nutzen jedoch die meisten Lehrer nicht. Der Lehrerband wird als ein „Evangelium der Didaktik“ angesehen und jedes „Abweichen“ von seinen „Vorschriften“ als „Verstoß“ interpretiert. Die Lehrmethode, die von den Autoren vorgeschlagen wird, nehmen die Lehrer als „die“ ultimative Methode wahr. Sie übernehmen diese als Prototyp und zeigen selten Mut zur Flexibilität und Innovation, neue Methoden auszuprobieren oder gar selbst welche zu entwickeln. Anscheinend besteht eine große Unsicherheit auf Seiten des Lehrpersonals hinsichtlich einer innovativen Verwendung der Lehrwerke. Hier könnten Fortbildungsseminare neue Impulse für die Unterrichtsgestaltung geben und praktische Handreichungen unterschiedliche Möglichkeiten der Nutzung der Lehrwerke erläutern. So könnte das Lehrpersonal motiviert werden, in den Unterricht individuelle Aspekte einzubringen und sich von den Vorgaben der Lehrerbände zu lösen.

2.4.1 Differenzierungsmaßnahmen

Die Differenzierung und insbesondere die innere Differenzierung des Unterrichts ist ein Begriff, der in den letzten Jahren in Griechenland an Bedeutung gewonnen hat und zum Thema vieler Seminare, Vorträge und Artikel in Zeitschriften und Büchern geworden ist. Trotzdem fehlen sowohl in den Richtlinien und Lehrplänen als auch in den Lehrerbänden Hinweise und Vorschläge zur Unterrichtsdifferenzierung. Das mag daran liegen, dass die

Lehrwerke vor fast zwei Jahrzehnten konzipiert wurden, als diese Thematik noch nicht so aktuell war. Auffallend ist jedoch die Tatsache, dass die Differenzierung nicht direkt angesprochen wird, sondern lediglich indirekt erfolgt, und zwar an den Stellen, an denen der individuelle Arbeitsrhythmus der Schüler („Meine Mathematik“, Lehrerband, 2. Klasse, S. 5) und die Hilfeleistungen des Lehrers (ebd., S. 9) akzentuiert werden. Man findet den Hinweis, dass sich die Schulbücher an den mittleren Schülerstatus wenden (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 3. Klasse, S. 7). Das soll heißen, dass sie einen mittelmäßigen Schwierigkeitsgrad aufweisen. Welcher Schüler jedoch zum mittleren Status gehört, ist immer relativ und hängt vom Leistungsstand der jeweiligen Klasse und Schule ab. Der Lehrstoff wird nach dem Spiralprinzip so gestaltet, dass individuelle Lernrhythmen gewährleistet sind (vgl. dazu 2.3.2.). Dabei kann jedoch nicht von Differenzierung gesprochen werden. Die Darbietung des Lehrstoffes mit Wiederholungen und die Progression vom Einfachen zum Schwierigen charakterisiert jeden Unterrichtstypus, ob lehrerzentriert, schülerzentriert oder individualisiert, wobei in keinem Fall die Heterogenität der Schüler in den Klassen, bedingt von ihren unterschiedlichen Lernvoraussetzungen, Lernverhalten, Lernverläufen und Lernergebnissen, aufgehoben wird. Nur an einer Stelle kommt die Binnendifferenzierung zur Sprache. Der Lehrer soll laut Lehrerbänden die Leistungen und Schwierigkeiten seiner Schüler beurteilen und ihnen nötige Hilfen geben. Nach der Durchführung der Lernkontrolle sollen zu Tage getretene Lernlücken der Schüler durch individualisierten Unterricht aufgefangen werden (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 2. Klasse, S. 141). Die Differenzierung wird also als eine Hilfestellung des Lehrers für schwachen Schüler verstanden. Theoretisch müssten auch die hochbegabten Schüler in die Differenzierung einbezogen werden, doch dies scheint für die Autoren von geringem Interesse zu sein. Wie weiterhin der gezielte Lehrereinsatz für die „Schwachen“ aussehen soll und welche Differenzierungsmaßnahmen für eine konkrete Unterrichtssituation zu treffen sind, ist aus ihren Überlegungen nicht zu entnehmen. Demzufolge werden die Formen und Möglichkeiten der inneren Differenzierung, beziehungsweise der Differenzierung in den Lerninhalten, im Unterrichtsverfahren, im Arbeitsmitteleinsatz, in der Aufgabenstellung, in den Lösungswegen (vgl. Klinger & Maier, 1984, S. 5ff.) sowie die Differenzierung in der Lehrerhilfe, im Niveau der Anforderungen, in der Anzahl der Aufgaben, in flexiblen Lern- und Fortschrittsgruppen und in der Einzelarbeit der Schüler (mehr dazu in Muth, 1986, S. 65ff.) nicht benannt. Dies ist besonders problematisch, weil ein sehr enge Orientierung der Lehrer an den Lehrerbänden festzustellen ist, wie oben aufgeführt wurde und die Krauthausen (1998) sehr zutreffend als „geistige Unterwerfung“ bezeichnet.

2.4.2 Motivation

In den Lehrwerken wird die Aufmerksamkeit auch auf die motivationalen Aspekte des Lernens gelenkt. Es wird oft betont, dass das Interesse der Schüler geweckt werden soll, da sich die Autoren der positiven Korrelation der Lernmotivation mit der Lerneffektivität bewusst waren. Die Motivation der Schüler soll auf verschiedenen Ebenen des Unterrichts angeregt werden. In allen Lehreinheiten wird der handelnde Umgang für das Lernen betont. Die aktive Teilnahme der Schüler am Unterrichtsgeschehen soll dazu dienen, die Schüler in Beweglichkeit und Bereitschaft zu halten. Die persönliche Beteiligung erhöht nicht nur die Verantwortung und die Bemühungen für das Erreichen der gesetzten Ziele, sondern sieht den Schüler als Akteur, der sich selbst mit dem Lerninhalt aktiv auseinandersetzt und so eine unmittelbare und individuelle Beziehung zu den Lerninhalten aufbaut.

> „Individuelle Bezugsnormen führen eher dazu, dass sich der Lernende selbst als Verursacher von Lernergebnissen sieht, und beeinflussen die Lernmotivation und die Lerneffektivität positiv“ (Wenzel, 1987, S. 32).

In der Einführung des Unterrichts wird oft eine kleine Geschichte erzählt, die Bezug auf die Lebenswirklichkeit der Kinder nimmt. Auf diese Art und Weise soll der Einstieg in das Unterrichtsgeschehen kindgerecht und motivierend gestaltet werden. Durch die Lernspiele bekommen auch die weiteren Phasen des Unterrichts eine spielerische Form und das Lernen wird positiv besetzt (vgl. „Meine Mathematik“, Lehrerband, 2. Klasse, S. 5). Die Illustration der Schülerbücher soll als zusätzlicher Faktor die Schüler neugierig machen und ihre Phantasie anregen. An keiner der oben beschriebenen Stellen wird jedoch die Motivation als Begriff direkt angesprochen, sie wird lediglich implizit eingefordert. Alle Faktoren, die motivierend wirken sollen (der handelnde Umgang, die lebensnahe Erzählungen, die Lernspiele und die Buchillustration), beziehen sich auf fremdgesteuertes Lernen bzw. auf extrinsische Motivation. Es wird auf den Lehrer verwiesen, der die Lernumwelt der Schüler motivierend, reizvoll und Interesse weckend gestalten soll. Dabei wird das Augenmerk nicht auf personinterne Abläufe beim Lernen gelenkt. Auf diese Weise wird dem Schüler die Steuerungsfähigkeit abgesprochen, wie zum Beispiel die Entwicklung von Motiven und Zielen eigenen Handelns (vgl. Wenzel, 1987, S. 33ff.). Es empfiehlt sich an dieser Stelle die intrinsische Motivation zu akzentuieren, da ihr Einfluss auf die Lernleistungen mittlerweile in vielen Studien nachgewiesen wurde und diese als Ersatz für das Fehlen der extrinsischen Lernmotivation fungieren kann (vgl. Schiefele & Schreyer, 1994, S. 11).

2.5 Zum Stundenplan

Für alle Schulen gilt der Stundenplan, wie er durch den Runderlass 528/Fek/ 185/T. A‘/ 28-11-84 im Jahre 1984 festgelegt wurde. Dieser sieht für Schulen mit sechs- bis zwölf Lehrkräften, bezogen auf das Fach Mathematik, folgende Wochenstunden in den verschiedenen Klassen vor:

	Erste Klasse	Zweite Klasse	Dritte Klasse	Vierte Klasse
Wochenstunden Mathematik	4	4	3	3

Tabelle 8: Anzahl der Wochenstunden für Mathematik in Schulen mit 6 – 12 Lehrkräften

Falls in den Schulen der Sportunterricht nicht vom Klassenlehrer, sondern von einem Sportlehrer durchgeführt wird, steigen die Wochenstunden für Mathematik in allen Klassen um eine Stunde (Protokolln. F 12/921/G1/1058/31-8-95, S. 5-6). Schulen, die mit weniger als vier Lehrkräften ausgestattet waren, wurden nach Möglichkeit aufgelöst und zu einer größeren Schule mit mindestens sechs Lehrkräften zusammengelegt. Um eine höhere Akzeptanz bei den Eltern zu erreichen, stellte der Staat Busse für den Transport der Schüler zur Verfügung. In den Fällen, in denen diese Zusammenlegung nicht möglich war, blieben die kleinen Schulen erhalten und der Stundenplan wurde wie folgt differenziert:

Lehrkräfte in den Schulen	Wochenstunden Mathematik			
	Klasse 1	Klasse 2	Klasse 3	Klasse 4
1	2/2*	2/2	4/2	4/2
2	4/2	4/2	4/2	4/2
3	3/2	3/2	3	3

Tabelle 9: Anzahl der Wochenstunden in Mathematik in Schulen mit weniger als 4 Lehrkräften

* Die Bruchschreibweise deutet auf einen halbstündigen Unterricht, da in einer Stunde zwei Klassen unterrichtet werden.

Auch in den Schulen mit wenigen Lehrkräften werden dieselben Lehrbücher benutzt. Das Lehrpersonal muss den Lehrstoff entsprechend den zur Verfügung stehenden Unterrichtsstunden anpassen, das heißt unter Umständen einige Lehreinheiten verkürzen oder auslassen. Der Stundenplan enthält 5-10 Unterrichtsstunden mehr als die Unterrichtseinheiten dafür vorsehen, als Ausgleich bei Unterrichtsausfall (z.B. wegen Ausflügen, Unwetter, etc.).

2.6 Lernvoraussetzungen und Lernziele der Schüler

Mathematik ist eine Wissenschaft, die in hohem Maße auf Vorkenntnissen und Vorwissen beruht. Bei der Aneignung des neuen Wissens werden die entsprechenden älteren Informationen aktiviert, auf denen die neuen aufgebaut werden. So können z. B. Schüler die Operation der Division nicht begreifen, wenn sie vorher mit der Multiplikation, Addition und Subtraktion nicht vertraut waren. Ebenso ist es sinnlos, sich mit der Fläche des Rechtecks zu befassen, wenn der Begriff des Rechtecks unbekannt ist. Einige Fachleute und Wissenschaftler beschreiben diese Vorkenntnisse als Angelhaken oder Kettenringe oder als Fundament, auf denen sich das neue Wissen anhängt oder aufbaut (vgl. Kassotakis, 1981, S. 185).

Auch wenn eine Klasse fortgeschritten im Lehrstoff ist und festgestellt wird, dass bei den Schülern wichtige Vorkenntnisse und damit Lernvoraussetzungen nicht vorhanden sind, muss die nötige Lernzeit investiert werden, um diese Lücken zu füllen und nachzuholen. Bei dem Versuch, einen zielerreichenden Unterricht durchzuführen, ist es für den Lehrenden sehr hilfreich, den Lehrgegenstand zu analysieren. Er sollte sich der notwendigen Vorkenntnisse bewusst werden und sie hervorheben. Laut Gagné (1975) können Kinder alles erlernen, wenn sie vorher die notwendigen Kenntnisse erworben und assimiliert haben. Um den Schülern eine neue Regel vorzustellen oder sie mit dem Verfahren vertraut zu machen, mit dem man ein Problem löst, muss man zunächst feststellen, wie der Wissens- und Fähigkeitsstand der Schüler in diesem Bereich ist. Hierzu gehört auch die Frage, auf welcher Stufe sich die Lernbereitschaft der Schüler befindet. Die kognitive Fähigkeit des Schülers wird von dem, was er schon kann und von dem, was er noch dazulernen muss, bestimmt, um ein bestimmtes Lernniveau zu erlangen. In dieser Weise wird das Lernen als ein Phänomen der Kumulation charakterisiert. Mit der fortschreitenden Entwicklung des Individuums steigt die Assimilation kognitiver Fähigkeiten ständig. Der kumulative Charakter des Lernens ist die Basis der kognitiven Fundierung oder des kognitiven Potentials, die beim sich entwickelnden Individuum progressiv zunimmt (vgl. Petroulakis, 1981, S. 257). Petroulakis betont in den didaktischen Handlungen, die er für den Unterricht jedes Lehrgegenstandes empfiehlt, das Abrufen der nötigen verwandten Vorstellungen aus der Erinnerung. Es reicht nicht, dass Kenntnisse lediglich existieren. Sie müssen in diesem Moment abgerufen, wiederbelebt werden und parat sein (ebd.).

Bei der Planung des Erwerbes kognitiver Fähigkeiten sollten nach Petroulakis (1981, S. 274) folgende Punkte berücksichtigt werden:

a. Was wird der Schüler mit dem Erwerb einer bestimmten Fähigkeit erlernen?
b. Welche bekannten, bereits erworbenen Kenntnisse müssen abgerufen werden, um sich den neuen zu öffnen?
c. Welche Objekte, Medien oder Gegebenheiten aus der Umwelt der Kinder können als Motive dienen, um die neuen Fähigkeiten zu erwerben?

Der Abruf des Vorwissens erfolgt manchmal automatisch auf Seiten des Schülers, manchmal ist die Intervention des Lehrers mit gezielten Fragen erforderlich. Die Unerlässlichkeit dieser Vorkenntnisse wird von den Verfassern der Richtlinien durch den spiralförmigen Aufbau des Lehrstoffes zum Ausdruck gebracht. Die mathematischen Kenntnisse sind so strukturiert, dass sie dem Schüler erlauben, sich diese schrittweise anzueignen (beruhend immer auf schon erworbenem Wissen und alten Erfahrungen). Jedes Wissenselement wird auf bekannten Begriffen aufgebaut und in jedem weiteren Kapitel oder Jahrgang wird es ausgedehnt und erweitert, so dass das Spektrum seiner charakteristischen Merkmale entfaltet wird (vgl. Filippou & Christou, 1995, S.77).

An jedem Lernprozess sind allerdings immer zwei Personen beteiligt: der Lernende und der Lehrende. In letzter Zeit wird das „Lernen lernens" um den Aspekt des „Lehren lernen" erweitert. Um eine Lernsituation effektiv zu gestalten, sind nicht nur die Vorkenntnisse des Lernenden bedeutend, sondern auch die des Lehrenden. Damit ist der Wissens- und Erfahrungshintergrund des Lehrers gemeint. Von jedem „guten" und verantwortungsbewussten Lehrer wird erwartet, dass er selbst sein Unterrichtsthema gut beherrscht. Die eigentätige Auseinandersetzung mit dem Lehrinhalt erlaubt ihm eine Sachanalyse durchzuführen und eine klare Unterscheidung zwischen den vorhandenen Wissenselementen, die bei seinen Schülern aktualisiert werden, zu machen und den neuen Kenntnissen, die erworben werden sollen. Die Kenntnis des Lehrstoffes der jeweiligen Unterrichtseinheit bzw. des jeweiligen Jahrgangs reicht jedoch nicht aus. Der Lehrer sollte einen Überblick über die Reichweite des Unterrichtsstoffes der vorigen und der nächsten Klasse haben. Aus dem Lehrstoff der vorigen Klasse wählt er die Elemente heraus, auf denen sein Unterricht basieren wird. Der Lehrstoff der nächsten Klasse dient dazu, seine Themapräsentation zu begrenzen. Die Kenntnis des Lehrstoffes ermöglicht ihm weiterhin, das neue Wissen nach seinem Wert und seiner Relevanz für die Grundlagen der Mathematik zu platzieren, und über die Rolle zu entscheiden, die es zukünftig im Aufbauprozess des mathematischen Denkens spielen wird (Haupt- oder Nebenrolle). Gemäß dieser Bewertung des Lehrinhaltes hat er auch das weitere Vorgehen zu planen. Entweder muss er den Inhalt detailliert darstellen und auf einem tieferen Verständnis insistieren, oder er wird lediglich eine erste Kontaktaufnahme bezwecken und die Einheit schneller durchführen.

Viele Studierende und auch Lehrer waren - und sind heute immer noch - der Meinung, dass der Mathematikunterricht der Primarstufe wegen der Einfachheit des Lehrstoffes keine besonderen didaktischen Fähigkeiten und Kenntnisse vom Lehrenden erfordert. Piaget (1973b) bestreitet diese Ansicht, indem er eine Analogie zum Beruf des Kinderarztes zieht. Er betont, dass die Ausbildung zum Kinderarzt nicht qualitativ geringer einzustufen sei, als die des „normalen" Arztes, nur weil seine Patienten kleiner seien. Von den Lehrerkandidaten wird eine vertiefte Kenntnis der mathematischen Grundlagen erwartet. Nur so sind sie in der Lage, den Lehrstoff zu über- und zu durchblicken, d.h. dass sie die fundamentalen Ideen des Lehrstoffes beherrschen (vgl. Krauthausen, 1998, S. 33).

> „Lernen und [daher auch Lehren] haben notwendigerweise etwas mit Bewusstheit zu tun, die sich durch gewisse Maßnahmen gezielt sicherstellen, betonen oder intensivieren lässt“ (ebd., S. 103).

Solche Maßnahmen sind eine solide mathematische Ausbildung und eine gewisse fachmathematische Souveränität (vgl. Schweiger, 1992, S. 161,162), die es ermöglichen, Einsicht in die eigentümlichen Gesetzmäßigkeiten, also die Struktur des Faches zu erlangen (vgl. Oehl, 1962, S. 11). Der Einblick in die Zusammenhänge des Lehrstoffes erlaubt ein flexibles didaktisches Vorgehen und befähigt Transferleistungen. Somit kann der Unterricht ökonomischer, umfassender und transparenter auch für die Lernenden gestaltet werden.

Eine solide mathematische Ausbildung lässt sich nach Krauthausen (1998) nicht nur durch die Übernahme mathematischen Fertigwissens, sondern viel mehr durch die Selbsterfahrung im Mathematiktreiben (doing mathematics) erreichen (vgl. ebd., S. 59).

> „Darum sollte die künftige Grundschullehrerin besonders im elementarsten Bereich gute theoretische Orientierungen finden und viel selbst probiert haben – samt den nützlichen und oft verblüffenden Erfahrungen des Scheiterns -, um Kinder und ihre Schwierigkeiten besser verstehen zu können“ (Bauersfeld, 1992, S. 18).

Der Lehrer, der während des Mathematiktreibens Vieles versucht und ausprobiert hat und gleichzeitig oft verzweifelt und frustriert war, weiß es zu schätzen, wenn er zu Erkenntnissen gelangt, die ihm wie kleine Entdeckungen erscheinen. Er kann auch seine Schüler sicherer zum aktiv-entdeckenden Lernen anleiten. Hat der Lehrer aber keine eigenen Erfahrungen im Fach gemacht und das Wissen nicht selbst erworben, so ist es fast unmöglich, sich in die Lage des Lernenden und dessen Probleme hineinzuversetzen. Ist er selbst den Weg der Erkenntnis nicht gegangen, kann er auch keinen ausreichenden Enthusiasmus für das Fach aufbringen, das er unterrichtet. Eine solche Lehrperson vermag Mathematik nach Techniken und Rezepturen zu unterrichten, ohne sie vorher selbst verstanden oder ausprobiert zu haben. Sie ist daher meistens erfolglos. Denn „Verständnis kann man nicht >lehren<. Es muss von innen kommen.“ (Giles, 1987, S. 8).

Alle Bemühungen, die zum Aufbau der eigenen Fachkompetenz beitragen, haben einen weiteren positiven Effekt. Sie steigern die Autonomie des Lehrers und helfen ihm, den eigenen Ansprüchen und den Erwartungen dritter zu genügen. Dies lässt sich am leichtesten verwirklichen, wenn der Lehrkörper eine positive Einstellung zum Fach besitzt. Dies ist die grundlegende Voraussetzung für die Vermittlung einer positiven Beziehung zum Lernen bzw. zur Mathematik. Eigene Unsicherheiten im Fach lassen sich so kompensieren und Selbstvertrauen kann in die eigenen Fähigkeiten aufgebaut und Handlungssicherheit erworben werden.

> „Man kann schlichtweg keine Begeisterung oder Engagement für etwas initiieren, gegenüber dem man selbst Aversionen oder gar Angst empfindet“ (Krauthausen, 1998, S. 93).

Letzterem begegnet man leider zu oft in der Schulpraxis.

Ein motivierter Lehrer ist eher in der Lage, die Vorkenntnisse seiner Schüler zu aktivieren. Auf die Vorkenntnisse der Schüler bezieht sich der Teil der Lehrerbücher, der den Titel „Lernniveau“ trägt. Er macht auch eine der Innovationen dieser Schulbücher aus. Im

„Lernniveau“ werden Informationen über die Leistungsfähigkeiten der Schüler gegeben, die aus dem Stoff resultieren, den die Kinder in der vorigen Klasse erarbeitet haben. Aussagen zum Lernniveau fehlen in den Lehrerbüchern der ersten und zweiten Klasse. Obwohl die Kinder mit nicht festgelegten mathematischen Kenntnissen zur Schule kommen, werden in der ersten Klasse keine systematischen Vorkenntnisse erwartet. Auch wenn keine Grundlagen vorausgesetzt und entsprechend unterrichtet wird, ist Folgendes nicht zu bestreiten:

> „Der arithmetische Anfangsunterricht ist ein weiterführender, kein beginnender Unterricht. Er knüpft an die Erfahrungen an, indem er Kindern die Gelegenheit gibt, ihre vorhandenen, kontext- und handlungsgebundenen Fähigkeiten auf einen zunehmend größeren Bereich anzuwenden“ (Schipper, 1996, S. 14).

Für diesen Unterricht sind die Erfahrungen und Vorkenntnisse der Schüler, die sie in ihrem Leben vor der Einschulung erworben haben, unerlässlich. Ab der zweiten Klasse wird zu Beginn jeden Schuljahres der Lernstoff der vorigen Klasse wiederholt, danach folgt die Auseinandersetzung mit dem neuen Lehrstoff. So werden alle erworbenen Kenntnisse erneut vorgestellt und abgesichert. Die Informationen, die im Lehrerband unter dem Titel „Lernniveau“ enthalten sind, dienen besonders den jungen und unerfahrenen Lehrern, da sie sich nicht auf Unterrichtserfahrungen aus mehreren Klassen stützen können und keine Praxis mit dem Lernstoff der vorhergehenden und der nachfolgenden Klasse haben.

Im Folgenden werden die grundlegenden mathematischen Lernziele der vier ersten Klassen beschrieben, wie sie aus dem Studieren der Lehrerbände und der Schülerbücher resultieren. Der Stoff wird auch in den Richtlinien analysiert. In diesen schlägt jedoch die Mehrzahl der Lehrer selten nach (vgl. Vainas, 1993, S. 158). Als Hilfsmittel für den Unterricht werden hauptsächlich die Lehrerbände benutzt, die, wie schon erwähnt, jeden Schritt des Unterrichtsgeschehens detailliert beschreiben.

Die Lernziele der Mathematik in der <u>ersten Klasse</u>, die zugleich auch Lernvoraussetzungen für die zweite Klasse sind, umfassen folgende Punkte:

1. Den Zahlenbegriff und das Zahlenverständnis im Zwanzigerraum (Anzahlbestimmung, Zahlenzeichen / Symbole, Zahlennamen/Benennung)
2. Die Zerlegungen der einstelligen Zahlen, z. B. 7=3+4 oder 5+2=7.
3. Die Ergänzungen der einstelligen Zahlen für die Bildung des Zehners, z. B. 7+_=10.
4. Der Sinn und das Verfahren der Addition und Subtraktion durch Vorwärts-/ Weiterzählen bzw. Rückwärtszählen
5. Addition mit Zehnerübergang und Subtraktion mit Zehnerunterschreitung durch Bildung des Zehners. Diese Verfahren werden von manchen Schülern erst in der zweiten Klasse assimiliert.
6. Subtraktion mit Zehnerunterschreitung: Zerlegung des Subtrahenden in zwei Teilmengen zur Bildung des Zehners, z. B. 18-9=..., 18-8=10, 10-1=9. Auch dieses Verfahren wird von manchen Kindern erst in der zweiten Klasse assimiliert.
7. Halbieren und Verdoppeln im Zwanzigerraum.
8. Vertrautmachen mit dem Würfel-Viereck und dem Quader-Rechteck.

Das wichtigste Ziel ist jedoch das Verständnis der einstelligen Zahlen von allen Schülern. Die Lernziele der Mathematik in der <u>zweiten Klasse</u> beziehen sich auf folgende Bereiche:

1. Der Zahlenbegriff und das Zahlenverständnis im Hunderterraum (von 20 bis 100).
2. Addition mit Zehnerübergang und Subtraktion mit Zehnerunterschreitung durch Bildung des Zehners.
3. Nutzung der dekadischen Analogie.
4. Der Stellenwert der Zahlen.
5. Die Operationen der Addition und Subtraktion horizontal und senkrecht und ihre Umkehrung, Kommutativität der Addition.
6. Die Brüche, Hälfte und Viertel.
7. Das kleine Einmaleins und das inverse Einmaleins.
8. Erkennen der geometrischen Grundformen (Viereck, Dreieck und Rechteck) und Berechnen des Umfangs.

Das Hauptanliegen der Mathematik liegt in den zwei ersten Klassen bei den Relationen zwischen den einstelligen Zahlen, ihren Zerlegungen und ihren Ergänzungen zum Zehner und das Überschreiten des Zehners und seiner Vielfachen beim Vorwärts- und Rückwärtszählen.

Vor der Erläuterung der Lernziele für die dritte Klasse wird eine kurze Wiederholung des in der vorigen Klasse erlernten Stoffes durchgeführt. Danach folgen:

1. Der Zahlenbegriff, das Zahlenverständnis und der Stellenwert der Zahlen im Tausenderraum (101-1000)
2. Der erste Hunderter und seine Vielfachen, Vergleiche zwischen ihnen, Relationen und Rechenübungen
3. Überschreiten des Hunderters durch Vorwärtszählen oder Bildung des Hunderters und Unterschreitung des Hunderters durch Rückwärtszählen oder Bildung des Hunderters
4. Messungen verschiedener Größen
5. Rechengesetze der Addition (Kommutativ- und Assoziativgesetz) und schriftliche Addition, schriftliche Subtraktion nach der Erweiterungs- und Borgetechnik
6. Schriftliche Multiplikation mit ein- und zweistelligem Multiplikator und Division mit einstelligem Divisor, Divisionen mit und ohne Rest
7. Die Bruchzahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$.
8. Erkennen und Benennen der geometrischen Grundformen, Berechnen des Umfangs (im Rechteck und Viereck) anhand der Seitenlänge, Kennenlernen des rechten Winkels
9. Eine erste Vorstellung der Größenmaße: Quadrat- und Kubikmeter
10. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit und einfache statistische Daten

Der wesentliche Inhalt dieser Klasse sind die vier Rechenarten, ihre Verfahren und das Überschreiten des Hunderters und seiner Vielfachen.

In der vierten Klasse wird wiederum mit einer Wiederholung der oben angeführten Punkte begonnen und besonderes Gewicht auf die Folgenden gelegt:

1. Vorstellung der Kanten mit Hilfe des Quaders und Würfels
2. Vorstellung der Unterteilungen des Meters
3. Berechnen des Umfang und des Flächeninhalts im Viereck und Rechteck, Einführung in die Symmetrie
4. Messen von verschiedenen Größen wie Gewicht, Volumen, Zeit, Geld, Flächen

5. Mehrstellige Zahlen bis eine Million. Analyse nach ihrem Stellenwert, z. B. 150.231=1*100.000+5*10.000+0*1000+2*100+3*10+1*2
6. Zahlenbegriff und -verständnis. Zahlenvergleiche, Nachbarzahlen, Zählen in Schritten
7. Addition und Subtraktion mehrstelliger Zahlen, Formulieren von inversen Sachaufgaben, Anwenden und Benennen der Rechengesetze dieser zwei Operationen
8. Multiplikation und Division zwei- und dreistelliger Zahlen, Formulieren von Umkehraufgaben und Anwendung der Rechengesetze der Multiplikation
9. Gleichwertige Bruchzahlen, Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche
10. Schreibweise von den Dezimalzahlen, Addition und Subtraktion mit Dezimalzahlen, Sachrechnen
11. Vorstellen und Interpretation von Säulendiagrammen

Nach dieser kurzen Auflistung der Lernziele wird der Lehrstoff jeder Klasse auf den folgenden Seiten eingehender betrachtet.

2.7 Der Lehrstoff der vier ersten Klassen

Auf den folgenden Seiten wird eine grobe Übersicht über die einzelnen Rahmenthemen im Mathematikunterricht der vier ersten Schuljahre in der griechischen Schule und ihre Behandlung im Unterricht gegeben. Auf die entsprechenden Teilbereiche wird einzeln eingegangen. Jeweils nach der Besprechung der Themenbereiche im einzigen griechischen Lehrbuch des Bildungsministeriums „Meine Mathematik“, folgt eine kurze Bezugnahme auf das deutsche Lehrbuch „Das Zahlenbuch“ von Wittmann & Müller. Die Darstellung erfolgt zunächst ohne Kommentierungen. Ein systematischer Vergleich scheint auch nicht angebracht, da das griechische Lehrbuch aus dem Jahre 1980 ist und es sich bei dem deutschen um ein neueres Werk aus dem Jahre 1996 handelt. Allerdings regt die Andersartigkeit des deutschen Lehrbuchs Verbesserungen und Innovationen für den griechischen Mathematikunterricht nahe. Vorschläge, wie Ideen auch in Griechenland sinnvoll aufgegriffen werden könnten, werden unter Kapitel 3.8 aufgeführt. Einen ersten Überblick über die einzelnen Themenbereiche in den ausgewählten Lehrwerken soll folgende Tabelle vermitteln:

Rahmenthemen							
Klasse	Lehrbuch	Mengenlehre	Größen	Arithmetik	Geometrie	Statistik	Promathematik
Erste	M.M.*	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Zahl.**		✔	✔	✔	✔	
Zweite	M.M.	✔	✔	✔	✔	✔	✔
	Zahl.		✔	✔	✔		
Dritte	M.M.	✔	✔	✔	✔	✔	
	Zahl.		✔	✔	✔	✔	
Vierte	M.M.	✔	✔	✔	✔	✔	
	Zahl.		✔	✔	✔	✔	

Tabelle 10: Übersicht der Rahmenthemen in den ausgewählten Lehrwerken

M.M.* = steht hier für das griechische Lehrbuch „Meine Mathematik“.
Zahl.** = steht für das deutsche Lehrwerk „Das Zahlenbuch“.

Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, verzichtet das deutsche Lehrwerk auf einen promathematischen Teil und auf die Mengenlehre. Wie die verschiedenen Themen in den zwei Lehrwerken behandelt werden, soll auf den folgenden Seiten aufgezeigt werden.

2.7.1 Erste Klasse

2.7.1.1 Promathematische Begrifflichkeiten

„Meine Mathematik"
Vor der Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten werden die Schüler mit wichtigen promathematischen Begrifflichkeiten vertraut gemacht. Zunächst wird die Orientierung im Raum geschult. Mit den topologischen Begriffen werden die Lagebeziehungen im Raum festgelegt und die Lage von Objekten beschrieben. Anschließend werden die Größen Länge, Höhe und Rauminhalt thematisiert und von den Adjektiven vertreten, die diese Größen angeben. Die Schüler führen Vergleiche zwischen Gegenständen aus ihrer Umgebung durch und lernen die Begriffe groß/klein, lang/kurz und mehr/wenig zu unterscheiden, zu erkennen und richtig zu gebrauchen. Die Merkmale von Objekten, seien es die funktionellen oder die äußeren, werden als Kriterium genutzt, um Klassifizierungen zwischen ihnen durchzuführen. Die Schüler sollen ein gemeinsames Merkmal erkennen, anhand dessen sie bestimmte Objekte Gruppen zuordnen und diese Zuordnung auch begründen können. In diesem Rahmen werden zum ersten Mal geometrische Formen gezeigt, die nach ihrer Form, Größe oder Farbe gruppiert werden sollen. Erweitert wird dieser Sachverhalt durch die Bildung von Mengen anhand zweier Merkmale. Um die Anzahl von Objekten zu vergleichen, werden die Zuordnungen eingeführt. Mit Verbindungslinien stellen die Schüler fest, ob in den 1:1 Zuordnungen die Objekte, die in zwei gegenüberstehenden Reihen aufgestellt sind, zahlenmäßig gleich sind. Benutzt werden die Begriffe „soviel wie", „gleich wie" und ihre Negationen, um den Sachverhalt zu verdeutlichen. Dabei werden die Schüler ermutigt, nicht nur die gegenüberstehenden Objekte miteinander zu verbinden, sondern auch andere Alternativen auszuprobieren. Zuletzt werden Objekte nach ihrer Größe betrachtet und aufgereiht. Die Aufreihungen führen vom kleinsten zum größten und umgekehrt. Hier endet das Kapitel der promathematischen Begrifflichkeiten, das den Einstieg der Schüler in die Zahlenwelt mit grundlegenden Begriffen und Verfahren zu erleichtern versucht.

2.7.1.2 Mathematische Grundbegriffe

„Meine Mathematik"
Im Kapitel der mathematischen Grundbegriffe werden drei Bereiche eingeführt: die Mengenlehre, die geometrischen Grundformen und die graphischen Abbildungen.

In der Mengenlehre liegt das Gewicht in der Bildung, dem Erkennen und dem Vergleichen von Mengen. Die Schüler arbeiten mit Gruppen von beliebigen und bekannten Objekten (Schulsachen, Spielzeugen, geometrischen Grundformen, Haselnüssen). Sie werden aufgefordert, diese Objekte nach bestimmten Merkmalen Gruppen zuzuordnen und die gemeinsamen Merkmale zu benennen. Nachdem mehrere Mengen gebildet und erkannt werden, erfolgt der Vergleich der Mengen. Dafür werden die Elemente der Mengen einander zugeordnet und der Sachverhalt mit den Begriffen „weniger" und „mehr" beschrieben. Zum ersten Mal werden an dieser Stelle die Zahlen bis 5 verbal eingeführt, um die Anzahl der Elemente der Mengen genau zu bestimmen. Mit den Zahlennamen wird die Mächtigkeit der Mengen festgelegt, die Mengen werden danach verglichen und aufgereiht.

Es folgt das Kennenlernen der geometrischen Körper. Der Würfel, der Zylinder, der Quader und die Kugel werden betrachtet und aufgrund ihrer Form unterschieden. Auf ihren Flächen werden die Grundformen erkannt und vorgestellt. Für die geometrischen Körper und Grundformen sind Objekte abgebildet, denen sie zugeordnet werden. Das Erkennen der Grundformen wird an Zeichnungen geübt, in denen dieselben Formen unterschiedlicher Größe mit derselben Farbe bemalt werden müssen.

Im Abschnitt der graphischen Abbildungen lernen die Schüler, einen gegebenen Sachverhalt zeichnerisch darzustellen, bzw. Tabellen auszufüllen. Die Elemente von Mengen werden in Tabellen übertragen, indem jedes Element der Menge durch ein Zeichen symbolisiert und abgebildet wird.

2.7.1.3 Größen

„Meine Mathematik"
Im Abschnitt der promathematischen Begriffe hatten die Schüler die Gelegenheit, die Größen Länge, Höhe und Rauminhalt kennenzulernen und Objekte anhand dieser Größen zu vergleichen. Hier werden diese Größen wieder aufgegriffen, um empirische Messvorgänge durchzuführen. Die Maßeinheit für jede Größe wird nicht vorgegeben, sondern von den Schülern willkürlich ausgewählt. Als Messinstrumente werden diverse Gegenstände benutzt. Für die Längen- und Höhenmessungen nehmen die Schüler Streichhölzer, Stifte, Lineale, Stöcke, oder ihre eigene Hand- und Fußlänge. Für die Flächenberechnung benutzen sie ihre Handflächen, Hefte oder kleine Quadrate aus Pappe. Den Rauminhalt von Behältern stellen sie durch Umfüllen des Inhalts in Gläser oder kleine Flaschen fest. Das Ergebnis jeder Messung wird mit Maßzahlen festgehalten. Dabei handelt es sich um glatte Zahlen im Zehnerraum. Durch diesen Messungen lernen die Schüler die Größen empirisch zu erfassen und in Bezug zu den Maßeinheiten zu setzen.

Nach den Messungen werden zwei weitere Größen thematisiert, das Geld und die Zeit. Die Zeit wird in Verbindung mit dem Tagesverlauf angesprochen. Die Schüler werden aufgefordert, Ereignisse in Form von Bildergeschichten in ihre richtige zeitliche Abfolge zu setzen und zu verbalisieren. Sie versuchen dabei, die Zeitdauer jeder Situation richtig einzuschätzen und Zeitspannen zu vergleichen. Die ersten Erfahrungen mit Geld machen die Schüler mit Münzen. Alle im Umlauf befindlichen Münzen werden vorgestellt und betrachtet. Die äußeren Merkmale (Farbe, Größe) werden besprochen und das Erkennen der Münzen wird geübt. Anschließend wird die Anzahl von Münzen berechnet und in Tabellen übertragen.

„*Das Zahlenbuch*"
Im Größenbereich wird im Zahlenbuch zunächst die Länge behandelt. Um ein Gefühl und eine Vorstellung für die Einheit Meter zu bekommen, wird ein Meterlineal verwendet. Mit den Meterlinealen messen die Schüler verschiedene Strecken außer- und innerhalb des Klassenzimmers aus. Dabei wird die Erfassung von Längen durch Maßzahlen deutlich.

Die Arbeit wird mit der Größe Geld fortgesetzt. In dieser Klasse wird nur mit Münzen gearbeitet, von denen alle im Umlauf befindlichen vorgestellt werden. Die Schüler lernen sie kennen, indem sie sie betrachten, fühlen, ordnen und zählen. Sie lernen, die einheimischen von ausländischen Münzen zu unterscheiden, und sie nach Pfennigen und Marken zu sortieren. Mit den kleinen Münzen werden Geldbeträge bestimmt und Gesamtsummen ermittelt. In einer weiteren Phase kommen die übrigen Münzen dazu, die Schüler arbeiten nun mit allen Münzen. Der handelnde Umgang mit dem Geld wird in Sachsituationen (Einkaufssituationen) eingeübt. Das Verständnis für diese Situationen sowie das Herausfinden von Lösungsmöglichkeiten wird durch Rollenspiele unterstützt. Die Schüler arbeiten mit Rechengeld und berechnen Geldbeträge und das Wechselgeld. Mit kleinen Münzen wird auch das Thema Geldwechseln erarbeitet. Die Schüler werden aufgefordert, Beträge mit unterschiedlicher Anzahl von Münzen (je nach Wertigkeit der Münzen) zu legen. Ihre Kombinationen halten sie in Tabellen fest.

Schließlich wird die Größe Zeit mit der Behandlung der Uhrzeiten in Verbindung gebracht. Die Uhrzeiten (volle Stunden) werden mit dem Sonnenlauf koordiniert. Die Schüler beschreiben den Tagesablauf mit den Begriffen Morgen, Mittag und Abend und setzten diese in Verbindung mit den Uhrendarstellungen. Mit Hilfe von Lernuhren begreifen die Schüler den Aufbau einer Uhr und üben das Einstellen und Ablesen voller Stunden.

2.7.1.4 Geometrie

„Meine Mathematik"
Diese kurze geometrische Einheit thematisiert als erstes die verschiedenen Linienarten, das heißt die Geraden, die gebrochenen Linien und die Bogenlinien. Zu Beginn werden Bogenlinien und Geraden an Gegenständen der Umwelt erkannt, ohne diese als solche zu benennen. Dabei wird zwischen geschlossenen und offenen Bogenlinien unterschieden. Danach folgt eine weitere Stufe in Richtung Abstraktion, indem die Schüler Papierquadrate und Papierringe zerschneiden. Anhand dieser Teile wird die Aufmerksamkeit auf die Umrisse gelenkt und somit können die Begriffe Linien, gebrochene Linien und Bogenlinien bestimmt werden. Gebrochene Linien werden eingeführt, indem mehrere Geraden senkrecht aneinander gelegt werden. Um die neu eingeführten Linienarten zu üben, legen die Schüler Strecken aus und beschreiben diese.

Nach den Linienarten folgt das Begreifen der Dimensionen von Figuren und Körpern. Dafür werden Quadrate, Rechtecke, Quader und Würfel verwendet, welche den Schülern aus früheren Einheiten bekannt sind. Bei den Kindern hat dies einen Wiedererkennungswert bezüglich der Quadrate und der Rechtecke an diesen Körpern. Durch Abschneiden der Seiten der Quader und der Würfel ziehen die Schüler Schlüsse über die Anzahl und die Größe der Seiten dieser Körper. Um diese Figuren und Körper auch empirisch zu erfassen und ihre Dimensionalität begreiflich zu machen, werden diese zuletzt mit Streichhölzern nachgebaut.

„Das Zahlenbuch"
Eingeführt wird die Geometrie mit dem Kapitel der Symmetrie. Die ersten Erfahrungen diesbezüglich gewinnen die Schüler durch den handelnden Umgang mit dem Spiegel. Sie bekommen die Gelegenheit zu spielen und gleichzeitig zu experimentieren. So bilden sie ihre persönlichen Feststellungen über die Möglichkeiten, die ein Spiegel bietet: Muster zu verdoppeln und zu halbieren. Nach dem bloßen Probieren gehen die Schüler bewusster mit dem Spiegel um und versuchen, durch Veränderung der Lage des Spiegels bestimmte Muster und Anzahlen (in Punktmustern) zu erreichen. Mit Hilfe von Wendeplättchen und des Spiegelbildes wird im selben Kontext das Verdoppeln eingeführt.

In der Folge arbeiten die Schüler mit Faltpapier und folgen den Anweisungen des Lehrers. Durch Falten und Abschneiden von Flächen entstehen die ersten geometrischen Formen, die auch benannt werden: Quadrat, Rechteck, Dreieck und Viereck. Durch Zusammensetzen dieser Formen werden neue Figuren hergestellt, die die Schüler betrachten und benennen. Die erste geometrische Grundform, die die Schüler „begreifen", ist die Kugel. Sie stellen selber gleiche und unterschiedlich große Kugeln her, bringen Beispiele aus der Umwelt, die kugelförmig sind, und bauen eine Dreieckspyramide aus zwanzig Kugeln.

Als nächstes werden die Lagebeziehungen vorgestellt. Diese nutzen die Schüler, um Informationen aus Plänen zu entnehmen bzw. Pläne zu lesen. Sie verknüpfen Informationen miteinander und lernen, sich im Raum anhand von Karten zu bewegen. Mit topologischen Begriffen beschreiben sie die genaue Lage eines jeweiligen Objektes in Beziehung zu seiner Umgebung und finden die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten. Zur Schulung der Feinmotorik wurden folgende Übungen ausgedacht. Beginnend von der Seite ziehen sich durch das Schülerbuch Ornamentleisten, wobei die Schüler die Chance haben, periodische Muster fortzusetzen. Neben der Schulung ihrer Feinmotorik ist das die erste Auseinandersetzung mit den geometrischen Formen. Im selben Rahmen werden unterschiedliche Knoten vorgestellt, die die Schüler im täglichen Leben anwenden können.

2.7.1.5 Arithmetik

2.7.1.5.1 Der Zwanzigerraum

„*Meine Mathematik*"

Der Zwanzigerraum wird im griechischen Lehrbuch nicht ganzheitlich, sondern gestuft eingeführt. Zuerst wird das Zahlenverständnis im Zahlenraum bis fünf geschult, dann folgt die Erweiterung zum Zehner und zuletzt zum Zwanziger. Die ersten Erfahrungen mit den Zahlen (bis zu der Fünf) haben die Schüler im Kapitel der mathematischen Grundbegriffe gesammelt, um Mächtigkeitsvergleiche zwischen Mengen durchzuführen. Dort stand jedoch die Mengenlehre im Vordergrund und nicht das Zahlenverständnis wie hier.

Begonnen wird im ersten Intervall (1-5) mit den Kardinalzahlen. Um ein Verständnis für die Zahlen zu entwickeln, arbeiten die Schüler mit Mengen und Zahlenkarten. Als erstes werden die Zahlennamen vorgestellt und mit den Zahlensymbolen in Verbindung gebracht. Für das Kennenlernen der Zahlensymbole werden die Zahlenkarten hervorgeholt. Veranschaulicht werden die Zahlen mit konkretem Material, mit dem Mengen gebildet werden. Die Schüler bilden die Mengen selbst, denen sie dann die entsprechende Zahlenkarte zuordnen. Nach den Kardinalzahlen werden die Ordinalzahlen eingeführt, indem Plättchenmengen und die dazugehörigen Zahlenkarten auf einem leeren Zahlenstrahl platziert werden. Die Abfolge der Zahlen wird besprochen und die Zahlennamen (Ordinalzahlen) werden vorgestellt. Die Darstellung der Zahlen durch Plättchen soll verdeutlichen, dass jede Zahl um eine Einheit größer ist, als die vorherige Zahl, so dass jede Zahl die vorherige Zahl beinhaltet. Nachdem beide Zahlaspekte in diesem Raum erarbeitet wurden, folgen Übungen zur Vertiefung des Zahlenverständnisses. Geübt wird das richtige Erkennen von Zahlen: Zahlen auf Zahlenkarten erkennen, verdeckte Zahlen auf dem Zahlenstrahl erraten, Mengen nach ihrer Mächtigkeit aufreihen, nach vorgegebenen Zahlen Objekte bemalen. An dieser Stelle beginnt der Ziffernschreibkurs. Pro Unterrichtsstunde werden 2 Ziffern vorgestellt. Jede Ziffer wird mit der entsprechenden Anzahl von Steckwürfeln dargestellt. Während des Schreibkurses werden weitere Übungen für das Erkennen der Zahlen angeboren. Hierbei wird auf die ordentliche Schreibweise der Ziffer besonders geachtet.

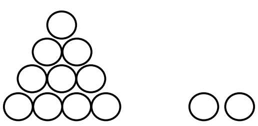
Um die Bildung jeder Zahl aus Einern/Einheiten zu verdeutlichen, werden die Schüler aufgefordert, jede Zahl mit der entsprechenden Anzahl von Einern/Einheiten zu verbinden, z.B. die Ziffer 7 soll in Verbindung mit 7 Einsen bzw. Schmetterlingen gebracht werden.
Bislang wurden die vorgestellten Zahlen separat betrachtet. Nun werden diese in Beziehung zueinander gesetzt und verglichen. Hierzu werden Mengen miteinander verglichen, indem ihre Elemente eins zu eins zugeordnet werden. Auch die Begriffe „mehr als", „weniger als", „kleiner als", größer als", „soviel wie" und „gleich wie" werden hier in Erinnerung gerufen. Sie sollen helfen, den Sachverhalt zu beschreiben. Die Gleichheit von Zahlen wird zunächst thematisiert und in diesem Zusammenhang das Gleichheitszeichen, abgelei-

tet von zwei parallelen Brettern, auf denen zwei gleich große Stapel von Büchern liegen. Die Schüler lernen, den Vergleich von gleichen Zahlen mit Rechensätzen auszudrücken und Gleichungen zu bilden. In Anlehnung dazu werden die Ungleichheit von Zahlen und die Kleiner- und Größerzeichen thematisiert. Auch dies geschieht an Hand von zwei unterschiedlich großen Stapeln von Büchern, die zwischen zwei schrägen Brettern liegen. Auch für ungleiche Mengen werden die entsprechenden Ungleichungen gebildet. Mit Übungen, in denen die Schüler die fehlenden Relationszeichen eintragen müssen, endet das Arbeiten mit den Zahlen in diesem Intervall.

Bevor der Zahlenraum bis zum Zehner erweitert wird, wird die Zahl Null eingeführt. Die Bedeutung der Null wird an leeren Mengen demonstriert und auch an Mengen, deren Elemente nacheinander entfernt werden. Zusammen mit dem Zahlennamen wird auch die Schreibweise dieser Zahl geübt und sie erhält ihren Platz auf dem Zahlenstrahl.

Im zweiten Intervall (6-10) erfolgt die Einführung aller Zahlennamen gleichzeitig. Die neuen Zahlen werden an Mengen veranschaulicht, in denen aufeinanderfolgend ein Element hinzugefügt wird. Nun sind alle Zahlen eingeführt und die Arbeit erfolgt im ganzen Zehnerraum. Mengen mit bis zu zehn Elementen werden gebildet und mit Zahlenkarten versehen. Das Ganze wird auf den Zahlenstrahl übertragen und die Zahlenfolge besprochen. Gleichzeitig werden auch die Ordinalzahlen eingeführt. Es folgen Übungen zur Vertiefung des Zahlenverständnisses (siehe dazu Intervall 1-5). Der Ziffernschreibkurs bis zur zehn wird in zwei Unterrichtsstunden abgeschlossen. Die Zahlendarstellungen mit Plättchen und geometrischen Figuren betonen das Entstehen jeder Zahl aus der vorherigen. Mit Ungleichheiten wird das Verhältnis zwischen den Zahlen ausgedrückt. Abgeschlossen wird mit dem Ergänzen von Zahlen oder Zahlendarstellungen, Aufreihungen und Vergleichen von Zahlen und das Übersetzen von Zahlendarstellungen in Zahlen.

Im dritten und letzten Intervall (10-20) steht zu Beginn die Erfassung von Mengen mit zehn und mehr Elementen. Durch die Zusammensetzung von immer zehn Elementen und den übrig gebliebenen Teilen (die jedoch keinen Zehner bilden), werden die Begriffe Zehner und Einer vorgestellt. An strukturierten und unstrukturierten Mengen üben die Schüler das Erfassen von Zehnern und Einern und tragen ihre Anzahl in den dafür vorgesehenen darunterstehenden Kästchen in das Buch ein. Schon in der ersten Stunde werden die Abkürzungen Z und E eingeführt. Nachdem das Verständnis für die neuen Begriffe entwickelt wurde, werden die Schüler aufgefordert, beginnend von der Zehn neue Zahlen zu bilden, indem sie jedes Mal einen Einer hinzufügen. Ausgeführt wird dies mit Steckwürfeln. Die Zehner werden von den Einern getrennt gehalten und ihre Anzahl in einer Stellenwerttafel notiert. Auf diese Weise ist es leicht, jede Zahl mit der vorherigen und der folgenden zu vergleichen. Aus der Schreibweise der Zahlen werden auch die Zahlennamen abgeleitet. Fortgesetzt wird die Arbeit mit Mengen, in denen der Zehner schon strukturiert ist und solchen, wo dies nicht der Fall ist. Nun sollen die Schüler nicht nur die Stellenwerte erkennen und hieraus die Zahl bilden, die sich ergibt. Ausgehend von diesen Stellenwerten wird die Anzahl der Menge durch einen Rechensatz ausgedrückt, in dem als erster Summand die Zehn steht, z.B.



Z	E
1	2

$10 + 2 = 12$

Abbildung 1: („M.M.“, Schülerbuch 1. Klasse, Bd. 2, S. 97)

Auf dem Zahlenstrahl oder einer abgebildeten Treppe werden auch die Ordinalzahlen vorgestellt. Nun ist die Einführung der Zahlen beendet und es können Übungen zu ihrer Vertiefung angeschlossen werden: Erkennen von Zahlen auf Zahlenkarten, Bestimmen von Nachfolger und Vorgänger, Erraten von verdeckten Zahlen, Platzieren der Zahlen auf dem Zahlenstrahl, Zahlenvergleiche und das Aufzeigen ähnlicher Zahlen wie 4 und 14, womit das Erarbeiten des Zwanzigerraums im griechischen Lehrbuch endet.

„*Das Zahlenbuch*“
Das Zahlenbuch führt den Zwanzigerraum ganzheitlich ein. Der Zahlenraum wird in zwei Intervalle unterteilt, von 1-10 und von 11-20, die rasch vorgestellt und in Analogie zueinander erarbeitet werden. Die Einführung der Zahlen bis 10 bildet den Schwerpunkt, weil sie als Grundlage für die Erweiterung der Zahlen bis 20 fungiert. Schon auf der ersten Seite werden die Zahlzeichen bis zehn präsentiert und mit Plättchenmengen dargestellt. Die Schüler zählen zusammengelegte Schulgegenstände (oder Mengen realer Gegenstände) und ordnen diesen das entsprechende Zahlzeichen zu. In einer zweiten Variante legen sie abgebildete Mengen mit Plättchen nach und wählen die dazugehörige Zahlkarte. Die Anzahl notieren sie auch mittels anderer Darstellungen: mit Strichlisten und Punktmengen, die angemalt werden. Nach diesen Zahldarstellungen werden die Zahlen an der Zahlenreihe geordnet. An dieser Stelle beginnt der Ziffernschreibkurs. Pro Unterrichtsstunde werden maximal zwei Ziffern vorgestellt. Der Zahl fünf wird eine grundlegende Bedeutung eingeräumt. „Die Fünf als noch simultan zu erfassende Einheit wird als eine Kraft bewusst, die hilft, größere Anzahlen geschickt zu strukturieren und zu erfassen“ (Wittmann & Müller, 1994b, Lehrerband 1. Klasse, S. 66). Alle Darstellungsmittel, die oben bereits erwähnt wurden und denen in der Folge begegnet wird, nutzen diesen Vorteil aus. Zusammen mit der Ziffer fünf wird auch die Zehn als Doppelfünfer eingeführt. Je fünf Objekte werden mit einer Farbe ausgemalt und zu einem Zehnerbündel verbunden. Während der Ziffernschreibkurs im ersten Intervall fortgesetzt wird, haben die Schüler Gelegenheit, in mehreren Situationen Anzahlen zu erfassen und sich mit dem Zählen und dem Erkennen von Zahlen auseinanderzusetzen. In Anlehnung an Bildergeschichten erzählen sie Geschichten, die eng mit Zahlen miteinander verbunden sind und in denen sich die Anzahl von Objekten fortschreitend verändert. Das richtige Benennen und Erkennen von Zahlen wird auch in Würfelspielen geübt. Angeregt durch Sternbilder werden die Schüler aufgefordert, zu vorgegebenen Zahlen verschiedene Zahlbilder als Muster zu zeichnen, zu zählen, mit Plättchen zu legen und als Darstellung der jeweiligen Zahl wiederzuerkennen.

Die bereits bekannten Zahlbilder bis zehn werden nun in einer Doppelreihe zum Zwanzigerfeld ausgebaut. Alle Zahlzeichen bis zwanzig werden vorgestellt und mit Plättchenmengen und Zahlbildern dargestellt. Die Schüler ordnen ungeordneten und strukturierten Zahlbildern die entsprechende Zahl zu. Dafür werden die Anzahlen immer in Fünfergruppen zusammengefasst und eingekreist, die Gesamtanzahl wird festgestellt und im Zwanzigerfeld mit Plättchen nachgelegt. Gleichzeitig werden auch die Zahlnamen bewusst gemacht. Außer dem Zwanzigerfeld wird ein weiteres Darstellungsmittel, die Zwanzigerreihe, eingesetzt (diese besteht aus zwanzig linear angeordneten Kreisen, wobei nach jeweils fünf Kreisen eine Gestaltlücke eingefügt ist.) Durch Belegen der Kreise mit Plättchen lassen sich Zahlen darstellen. An der Zwanzigerreihe werden verschiedene Übungen ausgeführt. Das Vor- und Rückwärtszählen, das Auffinden von Nachfolgern und Vorgängern und das Legen von Zahlen nach Regeln. Die Wendekarten werden eingesetzt, um das Erkennen der Zahlen zu üben. Gegenstände aus der Umwelt mit Zahlaufdrucken vermitteln den Schülern unterschiedliche Zahlschreibweisen und Zahlaspekte. Als Vorübung zur Addition werden handelnd mit Plättchen Zahlen unter Vorstellung und Verwendung des Pluszeichens additiv zerlegt. Die Zerlegungen werden sowohl mit konkretem (Plättchen), als auch mit zeichnerischem Material (Punktmuster) durchgeführt. Das Zerlegen von Zahlen wird an den Zahlenhäusern und mit den Wendekarten weitergefestigt, und es werden auch die ersten Ergänzungsaufgaben gelöst. Im selben Kontext wird das Erfassen einer Anzahl und ihre mögliche Darstellung am Zwanzigerfeld besprochen. Die Schüler sehen, dass dieselbe Zahl vielfältig gelegt, mit Plättchen gemalt und aufgeschrieben werden kann. Zuletzt werden die Ordnungszahlen für die eingeführten Zahlen vorgestellt, wobei auch auf die richtige Schreibweise (mit dem Punkt dahinter) geachtet wird.

2.7.1.5.2 Die Rechenoperationen
In der ersten Klasse bilden die Addition und Subtraktion die grundlegenden Rechenoperationen. Angesprochen wird auch die Multiplikation, welche erst in der folgenden Klasse systematisch erarbeitet wird.

„Meine Mathematik"
Die Addition wird in der ersten Klasse als Mengenvereinigung eingeführt. Zunächst arbeiten die Schüler im Zehnerraum. Die Elemente zweier Mengen werden zusammengelegt und das Ergebnis wird durch Weiterzählen ermittelt. Mit unterschiedlichem Material (Bleistiften, Nüssen, Plättchen) werden additive Handlungen erprobt und auf dem Zahlenstrahl veranschaulicht. Durch Verschieben der Elemente der ursprünglichen Mengen soll verdeutlicht werden, dass dieselbe Zahl durch die Vereinigung unterschiedlich großer Mengen gebildet werden kann. Zu Beginn wurden die Schüler aufgefordert, ihre Handlungen zu verbalisieren. Nun erfolgt die Verschriftlichung der Operationen. Dafür werden das bereits eingeführte Gleichheitszeichen und das neu vorgestellte Pluszeichen eingesetzt. Die Schüler lernen zu jedem additiven Vorgang den entsprechenden Rechensatz zu notieren. In Anschluß daran wird die schriftliche Addition thematisiert, so dass jeder Rechensatz horizontal und vertikal geschrieben wird. Die ersten Additionsaufgaben werden gelöst und auf dem Zahlenstrahl veranschaulicht. Durch Zuordnen bzw. Gegenüberstellen der Elemente zweier Mengen werden Vergleiche durchgeführt und durch Verschiebungen der Elemente von Mengen werden die unterschiedlichen Zerlegungsmöglichkeiten der Zahlen angesprochen. Auf diese Weise werden Ergänzungsaufgaben gelöst, Summen miteinander verglichen und Zahlen unterschiedlich zerlegt.

In Anlehnung daran wird die Subtraktion durch die Entfernung einer Teilmenge eingeführt. Auf dem Zahlenstrahl wird die Subtraktion durch Rückwärtszählen demonstriert. Durch die Einführung des Minuszeichens werden auch hier die Rechensätze verschriftlicht. Direkt danach wird die schriftliche Subtraktion bzw. die senkrechte Notation der Subtraktion thematisiert. In Situationen, in denen das Entfernen bzw. Verringern abgebildet wird, werden die Schüler aufgefordert, die entsprechenden Subtraktionsaufgaben zu notieren.

Bisher wurden die zwei Rechenoperationen getrennt behandelt. Nun werden sie als Umkehroperationen präsentiert. Demonstriert wird dies durch das Hinzufügen und das anschließende Entfernen derselben Menge. In diesem Zusammenhang wird zunächst die Aufgabe und dazu die Umkehraufgabe geschrieben. Zur Vertiefung beider Operationen werden verschiedene Aufgabenformate gelöst: additive Ergänzungsaufgaben und Subtraktionsaufgaben und das Platzieren der Ergebnisse auf dem Zahlenstrahl, Zuordnungen zwischen Zahlen und Differenzen bzw. Summen, Zuordnungen zwischen Summen und Differenzen und Eintragen von fehlenden Rechenzeichen. Nachdem die Addition und die Subtraktion in mehreren Anwendungssituation geübt wurden, werden an dieser Stelle die ersten Textaufgaben für den Zahlenraum bis 5 präsentiert. Die Schüler werden aufgefordert, die Situation nachzuspielen und die Aufgabe handelnd zu lösen. Erst dann wird der entsprechende Rechensatz notiert. In der Folge wird der Zahlenraum von 6-10 intensiv erarbeitet. Für alle Zahlen bis 10 werden alle Zerlegungsmöglichkeiten in Betracht gezogen. Dabei wird die Kommutativität der Addition betont, indem für jede abgebildete Zerlegungsmöglichkeit auch die Tauschaufgabe notiert wird. Mit Hilfe des Zahlenstrahls und anhand verschiedener Abbildungen werden Additions-, Ergänzungs- und Subtraktionsaufgaben gelöst.

Die Multiplikation wird zunächst durch die Wiederholung desselben Vorgangs eingeführt. Dafür wird das Wort „mal" vorgestellt und erläutert. Es werden Situationen abgebildet, in denen Kinder immer gleich viele Objekte tragen und diesen Vorgang mehrmals wiederholen. Es folgt der räumliche Aspekt, indem gleichmächtige Gruppierungen von denselben Objekten abgebildet werden. Die Objekte werden jedes Mal als Gruppierungen erfasst (z. B. 3 Zweiergruppen), das Ergebnis wird durch Addieren ermittelt und als Additionsaufgabe verschriftlicht (2+2+2=6). In einer weiteren Phase wird das Malzeichen „•" eingeführt und die Additionsaufgaben in Multiplikationsaufgaben umgewandelt und umgekehrt. Auf diese Weise sollen die Schüler begreifen, dass es sich bei der Multiplikation um eine verkürzte Addition handelt. Durch das unterschiedliche Einkreisen strukturierter Mengen wird die Kommutativität der Multiplikation demonstriert und die dazugehörige Tauschaufgabe notiert. Um das Verständnis für diese Operation zu fördern, werden die Schüler aufgefordert, zu vorgegebenen Multiplikationsaufgaben passende Rechengeschichten zu erfinden, geeignete Darstellungen herzustellen, Multiplikationsaufgaben mit Material zu legen und auf dem Zahlenstrahl zu veranschaulichen. Weitergeübt wird mit dem Vorwärtszählen in Schritten (2er, 3er, usw.) und dem Lösen von einfachen Multiplikationsaufgaben und Ergänzungsaufgaben für die Multiplikation. Bevor sich der Zehnerraum erweitert, werden Textaufgaben bezogen auf alle drei Rechenoperationen vorangestellt.

Ausgehend von einfachen und bereits bekannten Rechensätzen wird durch Nutzung der dekadischen Analogie der Zahlenraum zum Zwanzigerraum erweitert und diese Aufgaben am Zahlenstrahl veranschaulicht.:

a. 3 + 2 = _ ,	13 + 2 = _	und	5 - 2 = _ ,	15 - 2 = _
b. 4 + _ = 8,	14 + _ = 18	und	7 - _ = 5,	17 - _ = 15

(Schülerbuch, 1. Klasse, Bd. 2, S. 104ff.)

Mit Hilfe des Zahlenstrahls wird das Vorwärtszählen als erste Rechenstrategie für die Addition vorgestellt. Die Schüler werden auf die Kommutativität der Addition aufmerksam gemacht uns stellen fest, dass es leichter ist vom größten Summanden aus weiterzuzählen. In Anlehnung dazu wird für die Subtraktion das Rückwärtszählen vorgestellt. Beide Operationen werden am Zahlenstrahl veranschaulicht und auf ihre Umkehrbarkeit angesprochen:

7 + 5 = 12   12 - 5 = 7
5 + 7 = 12   12 - 7 = 5 (ebd., S. 119)

Als nächstes wird die Strategie Zehnerbildung für die Addition und die Subtraktion thematisiert, wobei die einzelnen Rechenschritte notiert werden müssen:

7 + 3 + 2 = 12 und 12 - 2 - 3 = 7 (ebd., S. 125)

Abschließend werden als Ausgangspunkt äquivalente Mengen (z. B. 6 + 6 = _, 6 + 7 = _) benutzt und darauf basierend Additionsaufgaben gelöst. Besonderer Stellenwert wird jedoch auf die Zehnerbildung gelegt, die an dieser Stelle erneut aufgegriffen und intensiv geübt wird.

„Das Zahlenbuch“
In der Arithmetik der ersten Klasse stehen die zwei Operationen Addition und Subtraktion im Vordergrund. Nach dem Spiralprinzip werden diese in mehreren Durchgängen behandelt. Im ersten Halbjahr findet die Orientierung und Einführung statt, im zweiten Halbjahr erfolgt die Vertiefung und Ergänzung. Kurz werden auch das Mini-Einmaleins und das Halbieren thematisiert, beides wird in der nächsten Klasse systematisch behandelt.

Die Addition wird als erste Rechenoperation an Sachsituationen eingeführt, die die zahlenmäßige Vergrößerung einer Menge durch Hinzufügen einer zweiten schildern. Die Situationen werden gespielt, besprochen und schriftlich notiert. Das ist möglich, da die additiven Zahlzerlegungen und das Pluszeichen den Schülern schon bekannt sind. Das Neue, das damit verbunden wird, ist das Gleichheitszeichen. Es entstehen Gleichungen in der Form 4+4=8. Die gleichen Sachsituationen werden mit verschiedenen Zahlen variiert, und es wird auf die richtige Schreib- und Sprechweise geachtet. Die systematische Erarbeitung der Addition erfolgt am Zwanzigerfeld. Darauf wird das Legen einer Additionsaufgabe in verschiedenen Darstellungsformen demonstriert. Das Legen der Aufgabe ermöglicht auch das Ablesen des Ergebnisses. Die Schüler suchen ihre eigenen Lösungswege, legen die Aufgaben, erklären ihre Strategie und schreiben die dazugehörigen Zahlaufgaben. Durch Umlegen der Wendeplättchen entstehen für dasselbe Ergebnis verschiedene Aufgaben. Auf diese Art wird das Gesetz von der Konstanz der Summe auf eine den Kindern angemessene Weise verdeutlicht. Nach dem Gleichheitszeichen erscheinen das Kleiner- und Größerzeichen, und es werden Zahlen und einfache Terme verglichen.

Im Gegensatz zur Addition wird die Subtraktion durch Wegnehmen eingeführt. Das Vorspielen von Situationen des Verringerns soll das Verständnis für diese Operation erhöhen. Parallel wird das entsprechende Rechenzeichen eingeführt und die dazugehörige Aufgabe an der Tafel notiert. Der Vorgang des Wegnehmens wird am Zwanzigerfeld durch Legen und Wegnehmen von Plättchen deutlich. Auch hier werden die unterschiedlichen Darstellungen der Aufgaben am Feld besprochen.

Am Zwanzigerfeld werden die zwei Operationen auch in Beziehung gesetzt. Nachdem sie getrennt eingeführt worden sind, werden sie nun als Umkehroperationen präsentiert. Die Schüler führen beide Operationen mit Plättchen hintereinander durch und schreiben dazu die Aufgabe und die Umkehraufgabe. In spielerischer Form (z. B. Eisenbahn fahren) werden ähnliche Situationen demonstriert, und die Schüler notieren die entsprechenden Rechensätze (Plus- und Minusaufgaben). Die Umkehrbarkeit der Operationen wird genauso wie am Zwanzigerfeld auch an der Zwanzigerreihe verdeutlicht. In der Folge werden Aufgabenserien behandelt, die operativ verändert werden, d. h. der eine oder beide Faktoren werden nach bestimmten Regeln abgeändert. Durch geschicktes Legen der Aufgaben an der Zwanzigerreihe lernen die Schüler, die Zusammenhänge zu erkennen und somit das Ergebnis zu finden.
Zur Übung und Festigung der Addition und Subtraktion werden bestimmte Übungsformate eingesetzt. Dies sind erstmals die Zahlenmauern, bei denen jeder Stein die Summe der beiden Steine, auf denen er liegt, bilden muss. Es folgen die Rechendreiecke, in denen die Summe je zwei benachbarter Zahlen im Inneren des Dreiecks die Zahl ergeben muss, die auf jeder Seite außerhalb des Dreiecks steht. Ein weiteres Format ist das Zauberquadrat. Es handelt sich um ein 3×3 Quadrat, bei dem die Summen aller Zahlen in den Reihen, Spalten und Diagonalen ausgerechnet werden. Diese Dreiersummen werden auch operativ abgeändert. Geübt wird an Hand von vielen Aufgaben, die durch konkretes Operieren mit Material gelöst werden können. In Wiederholungsaufgaben wird mit mehreren Summanden in Plus- und Minusaufgaben gerechnet. Weiterhin werden Summen und Differenzen mit Zah-

len verglichen. Aus drei gegebenen Zahlen sollen die Schüler alle möglichen Aufgaben bilden und ausrechnen. Gegen Ende des Schuljahrs werden durch Ausprobieren mit Wendekarten Ungleichungen mit einer Variablen gelöst. Als letztes Arbeitsmittel für die Vertiefung von Addition und Subtraktion wird die „Einspluseinstafel“ eingesetzt. Auf dieser Tafel sind alle hunderteinundzwanzig Aufgaben des Einspluseins systematisch und nach didaktischen Aspekten farbig untergelegt dargestellt. Die Schüler lernen, sich an der Tafel zu orientieren und arbeiten schrittweise an kleinen Abschnitten der Tafel. Durch parallele Betrachtung der am Zwanzigerfeld mit Wendeplättchen gelegten und an der Plustafel lokalisierten Aufgaben erschließen die Schüler die Gesetzmäßigkeiten der operativen Aufgabenserien.

Nachdem die Operationen geübt wurden, folgt die erste Auseinandersetzung der Schüler mit dem Sachrechnen. Sie betrachten Abbildungen im Buch, interpretieren die dargestellte Situation und finden die geeignete Rechenoperation, die den Sachverhalt mit symbolischen Rechenzeichen ausdrückt. In verschiedenen Sachsituationen (Einkaufssituationen beim Bäcker, auf dem Flohmarkt und beim Ausflug) werden einfache Textaufgaben gelöst. In diesem Rahmen lernen die Schüler Daten zu erfassen, führen Strichlisten und werten die Ergebnisse aus. Für das Lösen von Sachaufgaben wird das Legen von Plättchen vorgeschlagen. Durch das Operieren und Verschieben von Plättchen kann die jeweilige Aufgabe simuliert, operativ bearbeitet und schrittweise gelöst werden. Dabei werden auch die Begriffe *mehr* und *weniger* gründlich besprochen und geklärt.

Nach der analytischen Behandlung der zwei Grundrechenarten wird das Halbieren thematisiert. Mit konkretem Material in beliebigen Anzahlen bis zwanzig führen die Schüler handelnd Halbierungen durch. Die Ergebnisse werden versprachlicht und in Tabellen systematisch zusammengefasst. Dabei stellen die Schüler fest, dass sich manche Zahlen gerecht oder fast gerecht in zwei Teile zerlegen lassen. Durch das Legen von Zahlen mit Plättchen und deren Halbierungen ergeben sich „aufgehende“ und „nicht aufgehende“ Zweierreihen. An dieser Stelle werden die Bezeichnungen *gerade* und *ungerade* Zahlen eingeführt. Die Schüler erhalten die Möglichkeit, mit diesen neuen Zahlen zu operieren und zu erkennen, wann gerade oder ungerade Ergebnisse zustande kommen. Sofort nach dem Halbieren wird der Zwanzigerraum durch Zählen in Schritten strukturiert und das Mini-Einmaleins behandelt. Anhand strukturierter Anzahlen werden die Schüler aufgefordert, ihre Anordnung zu betrachten, zu beschreiben, sie in Feldern einzukreisen und mit Wortbildern (Zehner, Fünfer, Zweier usw.) zu beschreiben. Gleichzeitig wird ihnen auch geholfen, die entsprechende Malaufgabe mit dem Wort „mal“ zu schreiben. Das Bilden von Gruppierungen wird ebenfalls an der Zwanzigerreihe mit den Wendeplättchen geübt. Derselbe Vorgang wird auch an unstrukturierten Mengen durchgeführt.

Auf den letzten Seiten des Buches wird ein Ausblick über den Zwanzigerraum hinaus geliefert. Die Schüler sollen eine Vorstellung vom Hunderterraum bekommen. Zuerst wird das Bündeln als Strategie zum leichteren Abzählen größerer Anzahlen vorgestellt, und zwar die Bildung eines Zehnerbündels aus zwei Fünfern. Die Struktur des Hunderters wird an der Hundertertafel und dem Hunderterfeld deutlich. Als Ankerpunkte werden im neuen Raum die Zehnerzahlen identifiziert, deren Schreib- und Sprechweise geübt wird. In Analogie zu den Einern wird auch mit den Zehnern gerechnet. Angedeutet wird in der Folge die Fünferstruktur des Hunderters, die durch die russische Rechenmaschine verkörpert wird. Nach diesem Ausblick auf den weiteren Zahlenraum endet das Kapitel der Arithmetik und auch das „Zahlenbuch“ für die erste Klasse.

2.7.2 Zweite Klasse

2.7.2.1 Promathematische Begriffe und Verfahren

„Meine Mathematik"
Als Einführung in die mathematischen Verfahren werden Klassifizierungen, Zuordnungen und Aufreihungen durchgeführt. In den Klassifizierungen dieser Klasse lernen die Schüler, aus einer Menge von Objekten, die zur selben Kategorie gehören, die Gesamtgruppe (übergeordnete Klasse) und weitere Teilmengen zu erkennen. Es werden Objekte nach drei gemeinsamen Merkmalen klassifiziert, wobei die Klassifizierungen aus den äußeren Eigenschaften der Objekte erschlossen werden. Diese sind natürliche Merkmale wie Größe, Farbe, Form, Material und funktionelle Merkmale wie Transportmittel, Menschen, Produkte. Festgehalten werden diese Klassifizierungen erstens in Tabellen mit zwei Eingängen und zweitens in Baumdiagrammen. Im Bereich der Zuordnungen wird mit 1:1 und 1:2 Zuordnungen begonnen, die die Schüler bereits in der vorigen Klasse durchgeführt haben. Dabei werden sie ermutigt, nicht immer die gegenüberstehenden Objekte miteinander zu verbinden (die Zuordnungen werden mit Pfeilen dargestellt), sondern auch andere Alternativen auszuprobieren. Besondere Bedeutung gewinnt hier die Invarianz der Quantität. Die Schüler sollen Einsicht in diese Gesetzmäßigkeit gewinnen, die durch Umwandlung des Abstandes zwischen den geordneten Mengen demonstriert wird. Es folgen 1:3 und größere Zuordnungen. Neben dem konkreten Material und den Abbildungen, mit denen die Schüler arbeiten, erscheinen auch arithmetische Übungen. Zahlen werden additiv zerlegt, die Terme werden zueinander in Beziehung gesetzt, verglichen und in Tabellen notiert. Zuletzt werden in diesem Kapitel die Aufreihungen thematisiert. Mengen werden nach ihrer Anzahl und Objekte nach ihrer Größe verglichen. Pfeile werden eingesetzt, um die Verhältnisse und Beziehungen der Objekte zu verdeutlichen. Vom Größten zum Kleinsten werden Pfeile gezeichnet und die Beziehungen verbal analysiert. Abschließend werden Zahlen nach ihrer Mächtigkeit verglichen und aufgereiht.

2.7.2.2 Mathematische Grundbegriffe

„Meine Mathematik"
In diesem Kapitel werden die Mengenlehre, die geometrischen Figuren und Körper und die graphischen Darstellungen behandelt. Erster und wichtigster Bereich, der den Einstieg in die Zahlentheorie erlaubt und veranschaulicht, ist die Mengenlehre. Die Schüler arbeiten mit differenziertem Material und bilden Mengen mit Spielzeug, geometrischen Formen und Schulsachen. Für jede gebildete Menge wird das Merkmal erwähnt, nach dem diese Klassifikation durchgeführt wurde. Die Mengen werden miteinander verglichen, indem ihre Elemente 1:1 zugeordnet werden oder die Anzahl ihrer Elemente gegenübergestellt wird, und die entsprechenden Relationszeichen werden eingesetzt. Ausgehend von einer Gesamtmenge werden aufgrund eines oder mehrerer Merkmale (Geschlecht, Formen, Farben oder Kombinationen) Teilmengen erkannt und gebildet.

Nach diesem Bezug auf die Mengenlehre folgt eine Auseinandersetzung mit der Geometrie. Die geometrischen Körper Zylinder, Würfel, Quader und Pyramide werden in der Umwelt wahrgenommen und verschiedenen Objekten zugeordnet. Am Beispiel des Quaders werden die Maße Höhe, Länge und Breite vorgestellt. Zur Vertiefung werden die Maße unterschiedlicher Quader verglichen. Die Körper werden halbiert, nebeneinandergelegt und die neu entstandene Form wird zuerst erraten und dann benannt. Ähnlich werden die Körper mit Steckwürfeln gelegt. Nach den Erfahrungen mit den geometrischen Körpern befassen sich die Schüler mit den Grundformen. Sie erklären, welche Formen auf den Körpern zu sehen sind. Sie besprechen deren Eigenschaften (Anzahl der Seiten, Ecken), die Maße (Länge, Breite), vergleichen diese miteinander und operieren mit ihnen wie mit den geometrischen Körpern. Zum Abschluss werden die Figuren am Punktmuster gezeichnet.

Nun werden die graphischen Abbildungen behandelt. Da im Alltag das Format der graphischen Darstellungen jedem begegnet, wurde es für sinnvoll erachtet, die Schüler bezüglich Herstellung und Interpretation von Darstellungen zu informieren. Die Schüler führen 1:1 Zuordnungen an den Elementen einer Menge durch und bilden die entsprechende Tabelle. Das Interpretieren der Tabelle wird geübt und es werden weitere Informationen besprochen, die man ableiten kann (z. B. wenn Reihen der Tabelle in Beziehung gesetzt werden). Die Tabelle wird in Bezug zu dem Pfeildiagramm gebracht und in ein solches umgewandelt und umgekehrt. Danach wird die Tabelle mit 1:1 Zuordnungen behandelt, interpretiert und von den Schülern selber hergestellt.

2.7.2.3 Statistik

„Meine Mathematik"
An dieser Stelle wird die relative Häufigkeit, mit der verschiedene Ereignisse geschehen, in Betracht gezogen. Auf eine beliebige Frage können Menschen unterschiedliche Antworten geben, wobei viele von ihnen derselben Meinung sein werden. Hiervon ausgehend notieren die Schüler eine ihnen beliebige Frage und erforschen die Antworten ihrer Mitschüler. Die Ergebnisse der Umfrage werden registriert und in eine graphische Darstellung mit Säulendiagrammen übertragen. Gestützt auf diese Daten wird über die Häufigkeit der Erscheinung gesprochen, und die Ergebnisse werden mit den Prognosen der Schüler vor der Ausführung der Umfrage verglichen. Ziel ist, dass die Schüler Daten registrieren lernen, diese systematisch verarbeiten, Vermutungen anstellen und sich im Wahrscheinlichkeitsraum bewegen.

2.7.2.4 Größen

„Meine Mathematik"
Im Bereich der Größen werden die Rahmenthemen Länge, Zeit und Geld wie folgt unterschieden:

Die Größe Länge wird als erste aufgegriffen und erweitert. In der ersten Klasse haben die Schüler Messungen mit willkürlichen Maßeinheiten durchgeführt. (Als Maßeinheiten wurden Nadeln, Bleistifte, Haarspangen und Ähnliches benutzt). Dies wird hier wieder aufgegriffen. Von den willkürlichen Maßeinheiten erfolgt der Übergang zu den konventionellen. Das Lineal und das Maßband werden eingeführt, die Schüler lernen die Maßeinheit Zentimeter kennen und üben das genaue Abmessen von Strecken und Gegenständen im Klassenzimmer. Nach den Längenmessungen wird der Inhalt von Flächen und das Volumen von Behältern thematisiert, ohne dass der Begriff des Flächeninhaltes eingeführt wird. Als Maßeinheiten werden bei den Flächen kleine Quadrate und bei den Behältern Becher benutzt. Die Anzahl der benötigten Quadrate und Becher dient dem Vergleich von Flächen und Behältern.

Die Zeit wird als zweite Größe behandelt. Ereignisse des Alltags werden besprochen und in die richtige Reihenfolge gesetzt. In Anlehnung daran werden die Begriffe für die Beschreibung von zeitlichen Angaben eingeführt (z. B. nach, vor, heute, gestern, gleichzeitig). Durch Abschätzen und Vergleichen von Zeitspannen sollen die Schüler ein Zeitgefühl entwickeln. Sie entdecken die Beziehung zwischen Zeit und Geschwindigkeit (je höher die

Geschwindigkeit ist, desto mehr verringert sich die Zeit), die invers ist. Die Zeit wird auch in Beziehung zum Alter gesetzt, das Alter von Personen im Familienkreis und im Umfeld wird besprochen und verglichen. Mit einer Lernuhr, die am Ende des Buches eingelegt ist, lernen die Schüler die Funktion der Uhrzeiger zu unterscheiden und üben das Ablesen der Uhrzeit.

Hier endet der Zeitabschnitt und die letzte Größe, das Geld, wird eingeführt. In dieser Klasse werden alle Münzen vorgestellt. Ziel ist, dass die Schüler die einzelnen Münzen unterscheiden und ihren Wert in Bezug auf die Einheit erfassen. In Sachsituationen üben sie das Berechnen des richtigen Zahl- und Rückgeldes. Ein Geldbetrag wird in allen möglichen Kombinationen von Münzen ausgelegt.

„Das Zahlenbuch“
Im Zahlenbuch wird der Hunderterraum von verschiedenen Größen her beleuchtet. Man erkennt drei Bereiche, die erarbeitet werden: Länge, Geld und Zeit.

Die Länge wird mit dem Meterstab und seine Unterteilungen in Zentimeter eingeführt. Durch Herstellung eines Metermaßes durch die Schüler und mehrere Messungen an Strecken wird der Umgang mit dem Maßband und das genaue Abmessen geübt. Die Schüler bestimmen ihre eigenen Konfektionsgrößen bei der Bekleidung, den Schuhen und den Handschuhen und betrachten das Wachsen von Pflanzen.

Das Geld ist die zweite Größe, die behandelt wird. Als erstes werden die Scheine bis zum Hunderter vorgestellt. Es folgen alle im Umlauf befindlichen Scheine und Münzen. Anhand der Farbe und der Größe lernen die Schüler diese zu unterscheiden und einen Betrag in verschiedenen Kombinationen zu legen. Die Vertiefung der Wertigkeit der unterschiedlichen Geldstücke wird in entsprechenden Sachkontexten angestrebt. Bestellungen werden aufgegeben, Preise ermittelt, Rechnungen gelesen und bezahlt, das Rückgeld berechnet, Gebühren und Gebührenautomaten zusammen mit ihrer Bedienung vorgestellt. In diesem Kontext werden die verschiedenen Schreibweisen 3 DM; 3,- DM; 3,00 DM; 3.00 DM oder auch einfach 3,00 auf Kassenbons angesprochen. Neben dem rechnerischen Aspekt ist das Ziel, den Schülern den unterschiedlichen Wert von DM und Pf bewusst zu machen.

Der dritte und letzte Größenbereich ist die Zeit. Die Stunde wird in 60 Minuten eingeteilt, wobei auch die Viertelstunde als Gliederungseinheit berücksichtigt wird. Das Ablesen und Einstellen der Uhrzeit und die digitale und analoge Möglichkeit zur Benennung der Nachmittagsstunden wird besprochen. Durch Vergleichen und Berechnen von Zeitspannen sollen die Schüler ein Gefühl für die Zeitdauer entwickeln. Es folgt die Gliederung der Woche in Tage und des Jahres in Monate. Die Monatsnamen werden erlernt, die Monatsabfolge besprochen und die Dauer der Monate mit der „Knöchelmethode“ präsentiert.

2.7.2.5 Geometrie

„Meine Mathematik“
Die geometrischen Figuren und Formen, die in der ersten Klasse vorgestellt wurden, sind Ausgangspunkt auch in dieser Klasse. Die Kenntnisse der Schüler werden vertieft, indem die Eigenschaften und die Struktur der Figuren eingehend studiert werden. Die Anzahl der Seiten und Ecken, die Seitenlänge und die Summe der Länge aller Seiten (der Umfang) wird für jede Figur berechnet und notiert, wobei die Schüler die Erfahrungen mit den Messungen nutzen können. Basierend auf ihren Feststellungen vergleichen die Schüler die verschiedenen Formen (Dreieck, Quadrat, Rechteck und Kreis). In einer weiteren Phase sollen

sie die Figuren selber herstellen. Das geschieht zuerst durch das Umfahren von Gegenständen und das Zeichnen des Umrisses auf ein leeres Blatt. In einer höheren Abstraktionsstufe zeichnen die Schüler ohne Hilfsmittel die Figuren auf ein Punktmuster. Das Erkennen der Figuren wird geübt, indem die Schüler mit den Figuren operieren, diese halbieren und die entstehenden Formen benennen. Durch Drehen der Figuren stellen sie fest, dass sowohl der Umfang als auch die Fläche unverändert bleibt. Abschließend werden die in der ersten Klasse eingeführten Linienarten kurz wiederholt.

„Das Zahlenbuch“
Im Zahlenbuch stehen die geometrischen Figuren und Körper im Vordergrund. Die Schüler nehmen in ihrer Umwelt unterschiedliche geometrische Formen wahr: Rechtecke, Kreise, Quadrate, Vielecke. Umrisse von Gegenständen werden gezeichnet und die entstandenen Figuren werden betrachtet und benannt. Im Bereich der praktischen Geometrie werden durch Falten und Schneiden Rechtecke und Quadrate hergestellt und diese in unterschiedlichen Fliesenmustern zusammengelegt. Die Muster entsprechen oder entspringen der Phantasie der Schüler. Auf diese Weise wird die Zusammensetzbarkeit der Formen deutlich. Mit dem Spiel Tangram lassen sich 7 geometrische Formen (Dreiecke, Quadrate und Parallelogramme) immer neu zusammensetzen, so dass schematische Darstellungen entstehen. Dabei werden die Längen und Flächen der Figuren zueinander in Beziehung gesetzt. Das räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler wird durch das Basteln einer würfelförmigen Geschenkschachtel und einer Pyramide aus Kugeln geschult. Neben der Auseinandersetzung mit den geometrischen Formen und Körpern werden auch die Orientierung im Raum und die Beschreibung der Lagebeziehungen mit topologischen Begriffen gefördert. Anhand eines Planes werden Punkte und Lagebeziehungen nach den Himmelsrichtungen beschrieben. Es werden Wege beschrieben, der kürzeste Weg wird ermittelt und Rundwege erkannt.

Schließlich folgt die Symmetrie. Die Schüler gehen handelnd mit dem Spiegel um und erweitern somit ihre Kenntnisse. Durch Bewegen des Spiegels werden die Lagebeziehungen des Bildes und des Spiegelbildes verändert. Die Spiegelachse wird gesucht und eingezeichnet. Bilder und ihre Zielfiguren werden angegeben, und die Schüler werden aufgefordert, die Spiegelachse zu finden.

2.7.2.6 Arithmetik

Der Lehrstoff der Arithmetik umfasst in der zweiten Klasse den Zahlenraum von 20 bis 100. Begonnen wird jedoch mit einer Wiederholung des Zahlenraumes bis zwanzig, der in der ersten Klasse erarbeitet wurde.

2.7.2.6.1 Wiederholung

„Meine Mathematik“
Begonnen wird mit der Erarbeitung des Zahlenraums bis 20. Die Zahlen werden in zwei Intervallen 0-10 und 10-20 behandelt und mit der Mengenbildung eingeführt. Mengen werden gebildet und die Anzahl ihrer Elemente wird mit den entsprechenden Zahlen ausgedrückt. Am Zahlenstrahl erfolgt die lineare Anordnung der Mengen und Zahlen, die beim Ordnen und Vergleichen von Zahlen hilft. Neben den Kardinalzahlen werden auch die Ordinalzahlen besprochen. Nach der Wiederholung der Zahlen wird zu den Rechenoperationen übergegangen. Die Addition wird mit der Vereinigung von Mengen eingeführt und das Kommutativgesetz durch das Vertauschen der Summanden angesprochen. Analog zur Addition wird die Subtraktion durch die Entfernung von Mengen dargestellt. Direkt

anschließend wird diese Handlung rückgängig gemacht und es entsteht die ursprüngliche Additionsaufgabe. So sollen die Schüler die Umkehrbarkeit der beiden Operationen begreifen. Alle Aufgaben werden mit Steckwürfeln gelegt. Für alle Zahlen bis zum Zehner werden ihre additive Zerlegungen aufgeschrieben. Auf dem Zahlenstrahl wird der Vergleich der Zahlen durchgeführt, indem ihre Ergänzungen und Differenzen berechnet werden. Zuletzt wird die Multiplikation eingeführt. Zur Vorbereitung werden Zweier- und Dreiergruppierungen gebildet und das Ergebnis als Summe und Produkt notiert (die Multiplikation erscheint als verkürzte Addition). Im zweiten Intervall fungiert die 10 als Basis. Hier wird besonders die dekadische Analogie (3+3=..., 13+3=...) berücksichtigt.

Mit den Operationen werden auch die Rechenwege vorgestellt. Bei der Addition erkennt man zwei Rechenwege:

1. Das Vorwärtszählen (horizontal und senkrecht)
   z. B. bei der Additionsaufgabe 8+4 wird gerechnet

   8 – 9 – 10 – 11 – **12,**

   $\begin{array}{r} 8 \\ +\underline{\ 4\ } \end{array}$ und die Tauschaufgabe $\begin{array}{r} 4 \\ +\underline{\ 8\ } \end{array}$

2. Als Ausgangspunkt werden gleichwertige Mengen benutzt,
   z. B. von den Aufgaben
   6+6=12 7+7=14 und 5+5=10 werden die Nachbaraufgaben

   6+7=... 7+9=... und 5+8=... gerechnet

Bei der Subtraktion wird analog das Rückwärtszählen angewendet,
z. B. bei der Aufgabe 12-5 wird gerechnet

12 – 11 – 10 – 9 – 8 – **7**

In der Folge werden beide Operationen als Umkehroperationen am Zahlenstrahl behandelt und eine dritte Strategie für beide vorgestellt. Diese ist die Bildung des Zehners bei der Zehnerüberschreitung, bzw. Unterschreitung, z. B. die Aufgabe 8+5 wird analysiert in 8+2=10 10+3=13 und ähnlich für die Subtraktion wird die Aufgabe 15-7 in 15-5=10 10-2=8 analysiert.

„Das Zahlenbuch“
Als Einstieg in die Arithmetik werden im Zahlenbuch die Aufgaben und Rechengesetze des ersten Schuljahrs im Zahlenraum bis 20 wieder aufgegriffen. Dies geschieht in einem multikulturellen Rahmen. Rechenaufgaben aus englischen und italienischen Mathematikbüchern werden präsentiert, die Schüler können mögliche Unterschiede und Gemeinsamkeiten, wie die Notation der Rechenoperationen über Landesgrenzen betrachten. Verschiedene Übungsformate verdeutlichen den Zusammenhang von Addition und Subtraktion und fördern das Entdecken von Zusammenhängen und Lösungsstrategien: Zahlenmauern, Zauberdreiecke, operative Päckchen. Die Schüler legen Tabellen und addieren, subtrahieren, ergänzen und erkunden. Die Sachverhalte werden mit Plättchen gelegt. In der Folge wird die Multiplikation als kurze Addition wiederholt. An strukturierten Mengen werden Reihen und Spalten eingekreist, und die entsprechende Malaufgabe und Additionsaufgabe wird darunter geschrieben.

2.7.2.6.2 Die Zahlen – Orientierung im Hunderterraum

„Meine Mathematik"
Nach der Wiederholung des Zahlenraumes bis 20 folgt der eigentliche Lehrstoff der zweiten Klasse, das Erschließen des Raumes von 20 bis 100. Zuerst werden die Zahlen vorgestellt, danach werden die Rechenoperationen erarbeitet.

In einer ersten Phase werden alle Zehnerzahlen ganzheitlich bis 100 vorgestellt. Ausgangspunkt und Basis ist die 10. Durch Zehnerbündelungen werden alle Zehner mit Stäbchen gelegt. Der Name und die Schreibweise jeder Zahl werden parallel besprochen. Gleichzeitig werden die Zahlenkarten eingesetzt, und die Schüler üben das Erkennen und Benennen von Zahlen. Alle Zahlen werden auf den Zahlenstrahl übertragen und Mächtigkeitsvergleiche durchgeführt. Ungleichungen werden gebildet und die entsprechenden Relationszeichen eingesetzt. Damit deutlich wird, dass alle Zehnerzahlen Vielfache der Zehn sind, wird jeder Zehner als Produkt mit der 10 ausgedrückt. Es folgen Additions- und Subtraktionsaufgaben und die Berechnung von Ergänzungen und Differenzen zwischen den verschiedenen Zehnerzahlen.

Nach dem Erlernen der Zehnerzahlen wird das Beherrschen aller Zehner-Einer-Zahlen im Rahmen von 20 bis 100 angestrebt. Diese Zahlen werden separat für jeden Zehner bis 50 behandelt. Man kann also drei Intervalle erkennen: 20 - 30, 30 - 40 und 40 - 50.

Die neuen Zahlen werden mit den bereits erlernten Zehnern (in Bündeln) und dem Anhang von Einern (einzelne Stäbchen) gebildet und dargestellt. Der Zahlenname (Ordinal- und Kardinalzahlen) und das arithmetische Symbol werden aufgeschrieben. Die Schüler sollen begreifen, dass jede folgende Zahl durch das Hinzufügen eines Einers zu der vorigen entsteht. Besonders wird auf die Schreibweise und die Bedeutung der Stellenwerte geachtet. Für jedes Intervall werden die Zehner-Einer-Zahlen auf dem Zahlenstrahl ausgelegt und aufgereiht. Das Vor- und Rückwärtszählen in Schritten wird geübt und Mächtigkeitsvergleiche werden durchgeführt. Es werden Zahlen in Termen mit plus und minus analysiert und ebenso in Termen mit Produkten, z. B. 34+3=30+(4+3), 68=(6*10)+8. Auch Ergänzungen und Differenzen werden berechnet: 20+□= 28, 21-7=□, 2*10+□=23. Diese Übungen werden für alle Intervalle wiederholt und gefestigt. Gestützt auf diese erworbenen Kenntnisse können die Schüler das vierte Intervall, die Zahlen von 50 bis 100, ähnlich, d. h. ganzheitlich erfassen.

Nun sind alle Zahlen bis 100 eingeführt. Um die Struktur der Zahlenreihe und des Hunderters zu vertiefen, werden Übungen im ganzen Raum durchgeführt. Schüler finden die Nachbarzahlen einer Zahl und aller Zahlen, die sich zwischen zwei vorgegebenen Zahlen befinden. In verschiedenen Schritten wird vor- und rückwärts gezählt und alle Zahlen werden in ihren Stellenwerten analysiert und verglichen. Die Schüler erweitern ihre Kenntnisse durch das Nutzen der dekadischen Analogie: 12+3=15, 22+3=..., 32+3=... oder 90-5=85, 85-5=..., 75-5=... . Die Zehner- und Einerziffern werden getauscht und die Schüler beschreiben die Veränderung der Ergebnisse. Mit der Beschreibung der Zehnerzahlen als Vielfache der Zehn wird die Multiplikation vorbereitet. Mit der Analyse der Zahlen in Zehner und Einer wird die Addition vorbereitet.

Nach dem Erarbeiten der Zahlen des Hunderterraumes folgt eine andere thematische Einheit, die Brüche. Eingeführt werden hier die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{4}$. Veranschaulicht werden diese mit der aufeinanderfolgenden Teilung von geometrischen Formen. Die Hälfte und das Viertel werden als Begriffe vorgestellt und die entsprechende Schreibweise erläutert. Die Schüler operieren mit Papier und Plastilin, benennen die Teile und verbinden alle miteinander, um den Bezug zum Ganzen zu erfassen. Sie erkennen an Objekten die Brüche und vergleichen diese miteinander. Derselbe Vorgang erfolgt, wenn die zu teilende Einheit aus mehreren Objekten besteht, d. h. wenn es sich um eine Menge handelt.

„Das Zahlenbuch“

Die Orientierung im Hunderterraum beginnt im Zahlenbuch mit dem strukturierten Zählen. Um größere ungeordnete Anzahlen zu zählen, werden diese in kleinen Teilgruppen zusammengefasst. So entstehen die Zehnerbündelungen. Die Schüler führen Bündelungen mit konkretem und zeichnerischem Material durch. Die Zahlennamen werden in der Stellenwertschreibweise geschrieben und benannt. Für die Herstellung des Zehners wird das Erfassen in zwei Fünfern empfohlen. Am Hunderterfeld werden alle Zehnerzahlen vorgestellt und abgelesen sowie der Hunderter in Zehnerzahlen unter Berücksichtigung der wichtigen (dekadischen) Analogie zerlegt. Nach den Zehnerzahlen lernen die Schüler alle Zahlen bis 100 kennen. Das geschieht an der Hundertertafel, auf der jede Zahl eingetragen ist (und ihren eindeutigen Platz hat), was den ordinalen Aspekt betont. Auf einer leeren Hundertertafel sollen die Kinder durch das Suchen und Notieren der fehlenden Zahlen den systematischen Aufbau des Hunderters verinnerlichen.

Es werden Zahlen in Zeilen, eventuell Spalten abgelesen, Nachbarzahlen besprochen und das Zählen in Schritten geübt. Der Darstellung der Zahlen durch den Zahlwinkel folgt die ikonische Darstellung, mit der die Strukturierung des Zehners besonders deutlich wird. Die Zehner werden als horizontale Striche, die Einer als Punkte darunter gezeichnet. Diese Darstellung ist eine große Hilfe für die Addition und Subtraktion und das Verständnis der Wertigkeit der Ziffern. Die Orientierung im Hunderter wird weiterhin an der Hunderterreihe geübt. Die Schüler können das Anschauungsmittel selbst für die Darstellung der Zahlen auswählen. Es folgen Übungen zur Vertiefung der Zahlvorstellung und der Struktur des Hunderters. Nachbarzahlen und -zehner werden bestimmt, Ergänzungen zum nächsten Zehner, Subtraktionsaufgaben und multiplikative Zerlegungen des Hunderters durchgeführt.

2.7.2.6.3 Die Rechenoperationen

„Meine Mathematik“

Nach der Wiederholung der Addition, Subtraktion und der Multiplikation am Anfang des Schuljahrs wird der Zahlenraum erweitert. Im neuen Zahlenraum werden dieselben Operationen wieder aufgegriffen und vertieft. Bei der Addition und Subtraktion werden dieselben Kategorien unterschieden, in denen sich der Schwierigkeitsgrad steigert. Diese sind folgende: a. zweistellige Zahl + einstellige Zahl und b. zweistellige Zahl + zweistellige Zahl. Im Buch wird der Stoff so strukturiert, dass zuerst Aufgaben ohne Übertrag mit den unten aufgeführten Strategien für die Addition, dann für die Subtraktion behandelt werden. Danach folgen Aufgaben mit Übertrag. Es werden verschiedene Rechenstrategien vorgestellt. Die Schüler werden von der horizontalen Schreibweise zu der senkrechten geführt. Da bestimmte Rechenstrategien in beiden Schreibweisen und andere in der einen oder anderen Schreibweise aufgeführt werden, ist es hilfreich, dies durch eine Auflistung zu verdeutlichen.

<u>Rechenstrategien für die Addition</u>

Horizontal	Senkrecht
1. Stellenwerte extra	I. Analyse in Einer
2. Analyse in Zehner und Einer	II. Analyse in Zehner und Einer
3. Zehner erst	III. Kurzform
4. Bildung des Zehners	

Es folgen einige Beispiele aus dem Schulbuch *„Meine Mathematik“*, Band 2 zu den einzelnen Strategien:

1. Stellenwerte extra: 23 + 32= (20 + 3) + (30 +2)
20+30...50
3+ 2... 5...55 (S. 11)

2. Analyse in Z und E: a. 25+14= 3Z+9E=39 (S. 12)

b. 26+8
$$\begin{array}{l} 2Z+6E \\ \underline{+\quad\ \ 8E} \\ 2Z+14E \\ 3Z+4E=34 \end{array}$$
(S. 40)

3. Zehner erst:
$$13 \xrightarrow{+10} 23 \xrightarrow{+2} 25$$
13 + 12 = 25 (S. 13)

4. Bildung des Zehners: 18+9
18+2...20+7...27 (S. 36)

I. Analyse in Einer: 45+34
$$\begin{array}{r} 40 + 5 \\ \underline{+\ 30 + 4} \\ 70 + 9 = 79 \end{array}$$
(S. 16)

II. Analyse in Z und E: 58+23
$$\begin{array}{l} 5Z+\ \ 8E \\ +\underline{2Z\quad 3E} \\ 7Z+11E \\ 8Z+\ \ 1E=81 \end{array}$$
(S. 49)

III. Kurzform:
$$\begin{array}{rcr|l} & & Z & E \\ & & 1 & \\ 29 & = & 2 & 9 \\ \underline{+58} & = & +5 & 8 \\ \hline & & 8 & 7 \end{array}$$
(S. 52)

Nachdem alle Fälle der Addition besprochen sind, werden die Kommutativität und die Assoziativität durch Tausch der Summanden bei den senkrechten Aufgaben verdeutlicht. Einfache Textaufgaben beenden die Auseinandersetzung mit der Addition.
Bei der Subtraktion werden dieselben Kategorien unterschieden und ähnliche Rechenstrategien vorgestellt:

Rechenstrategien für die Subtraktion

Horizontal
1. Stellenwerte extra
2. Analyse in Zehner und Einer
3. Erst Zehner weg
4. Bildung des Zehners
5. Analyse des Minuenden

Senkrecht
I. Stellenwerte extra
II. Borgetechnik
III. Erweiterungstechnik

Die Rechenstrategien, die in beiden Lehrplänen angewendet werden und daher leicht verständlich sind, werden nicht vorgeführt, sondern nur namentlich erwähnt. Nur für die Strategien, die Unterschiede aufweisen, werden Beispiele aus dem Lehrbuch („Meine Mathematik", 2. Klasse, Band 2) angeführt.

Beispiele zu den senkrechten Strategien:

I. Stellenwerte extra:

$$\begin{array}{rl} 54 = & 50 + 4 \\ -\underline{23} = & -\underline{20 + 3} \\ & 30 + 1 = 31 \end{array}$$

(S. 31)

II. Borgetechnik:

$$\begin{array}{r} 22 \\ \underline{-\ \ 5} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \boxed{1}\ \boxed{12} \\ \cancel{2}\,\cancel{2} \\ \underline{-\ \ 5} \\ 1\ 7 \end{array}$$

Ausgeliehen wird ein Zehner von den Zehnern derselben Zahl (S. 65)

und

$$\begin{array}{r} 52 \\ -\ \underline{24} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \quad\boxed{4}\quad\ \boxed{12} \\ \ \ \cancel{5}Z + \cancel{2}E \\ \underline{-2Z\ + 4E} \\ \ \ 2Z\ + 8E\ = 28 \end{array}$$

(S. 71)

III. Erweiterungstechnik

$$\begin{array}{c} Z\ E \\ 2\ 2 \\ \underline{-\ \ 5} \\ ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} Z\ 1\ E \\ 2\ \ \ 2 \\ \underline{-\ 1\ \ 5} \\ 1\ \ \ 7 \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \underline{+10\ E} \\ \leftarrow \underline{+\ \ 1\ Z} \\ \\ \end{array}$$

Wir addieren dieselbe Zahl

(S. 67)

und

$$\begin{array}{r} 32 \\ \underline{-\ 18} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\ \ \ \\ 3\ \ 2 \\ 1\ \underline{-\ 1\ \ 8} \\ 1\ \ 4 \end{array}$$

Sprechweise:
- „8 von 2 kann nicht subtrahiert werden.
  8 von 12 … 4.
- 1 + 1 …2, von 3 …1".

(S. 76)

Um Subtraktionsübungen mit Überträgen lösen zu lernen, gibt es eine Lektion, die die Schüler darauf vorbereiten soll. Zweistellige Zahlen werden so additiv zerlegt, dass bei den Einern Zehner-Einer-zahlen stehen, d. h.:

$$31 = 3Z + 1E = 2Z + 11E$$
$$46 = 4Z + 6E = 3Z + 16E$$
$$70 = 7Z + 0E = 6Z + 10E$$

Dadurch sollen die Schüler verstehen, dass dieselbe Zahl erhalten bleibt. Beide Strategien sollen sie danach bei der schriftlichen Subtraktion anwenden können. Dem Erarbeiten aller Fälle der Subtraktion folgt die Behandlung beider Aufgaben als Umkehraufgaben und das Lösen von Sachaufgaben bezogen auf diese Rechenoperationen.

Bei der Multiplikation dient die Vereinigung äquivalenter Mengen als Ausgangspunkt. Registriert wird das Ergebnis der Vereinigung in Form von Summen und Produkten. Durch das Einkreisen von strukturierten Mengen in Reihen und Spalten wird das Kommutativgesetz auch für diese Operation verdeutlicht. Das Kartesische Produkt ist ein weiterer Stützpunkt für die Schüler. Mit den Elementen zweier Mengen werden alle möglichen Paare gebildet und diese in eine Tabelle mit zwei Eingängen eingeordnet.

Als Vorbereitung auf das kleine Einmaleins werden Zahlenfolgen gebildet, die jedes Mal mit einer neuen Startzahl beginnen. Danach folgt die Erarbeitung des Einmaleins. Die 2er- und 3er-Reihe sowie die 4er- und 5er-Reihe werden jeweils gleichzeitig behandelt. Alle anderen Reihen bis zur der 9er Reihe werden separat erarbeitet. Die Produkte der jeweiligen Reihe werden mit Pfeilen am Zahlenstrahl angezeigt. Mit Punktmustern oder Steckwürfeln wird eine Skala oberhalb des Zahlenstrahls gebildet, die auch die Produkte veranschaulichen soll. Nachdem die letzte Reihe (Reihe der 9) behandelt wurde, folgt eine kurze Bezugnahme auf das Distributivgesetz. Eine strukturierte Menge wird mit einem Strich in zwei Teilmengen geteilt und die Schüler berechnen die Summe der Teilprodukte. Das Kapitel der Multiplikation schließt mit darauf bezogenen Sachaufgaben, die die Schüler auch mit Punktmuster darstellen. (Beispiele: a. Die Schüler unserer Klasse pflanzten 6 Reihen mit Nelken. Jede Reihe hat 7 Pflanzen. Wie viele Nelken sind es insgesamt? b. Die Schüler unserer Klasse kauften 26 Tulpen. Nun überlegen sie, wie sie diese in Reihen anpflanzen können. Wie viele Möglichkeiten gibt es?)

Die Division wurde in den vorherigen Klassen durch folgende Verfahren vorbereitet: Bei der Einführung der Brüche haben die Schüler ein Ganzes (sei es eine Menge oder eine Einheit) in zwei und in vier gleiche Teile zerlegt. Bei der Multiplikation haben sie äquivalente Mengen vereinigt und diese Vereinigung als Produkt beschrieben. Umgekehrt haben sie eine Gesamtmenge in äquivalente Teilmengen zerlegt und Gleichungen gelöst, in denen unter anderem der eine Faktor der Multiplikation unbekannt war. Diese drei Voraussetzungen bilden die Basis für das Verständnis der Division (vgl. Lehrerband der 2. Klasse, S. 313).

Diese Operation wird zuerst mit der Zerlegung einer Menge in äquivalente Teilmengen eingeführt. Die Schüler finden durch Ausprobieren alle möglichen multiplikativen Zerlegungen von Mengen und Zahlen. Weiterhin werden Situationen des Aufteilens und Verteilens geschildert, um die Division und ihre Anwendungsgebiete zu veranschaulichen. In dieser Stufe wird die Division als fortlaufende Subtraktion interpretiert. Alle Schritte von der ersten bis zur letzten Subtraktion werden notiert, und das Ergebnis wird mit dem Algorithmus der Division ausgedrückt:

Beispiel: 18:6

18	
- 6	1. Mal
12	
- 6	2. Mal
6	
- 6	3. Mal
0	

Also 18:6=3 (S. 136)

In der Folge wird die Division als Umkehroperation der Multiplikation dargestellt. Wenn ich die 8 durch 2 dividiere heißt es, wie oft muss ich die 2 malnehmen, um die 8 zu erhalten?
1*2=2, 2*2=4, 3*2=6, 4*2=8 also muss ich die Zwei 4 mal nehmen, um 8 zu erhalten. Diese Umkehrung der Multiplikation wird auch am Zahlenstrahl verdeutlicht. Oberhalb der Zahlenreihe werden die Produkte der Einmaleinsreihen aufgeschrieben und unterhalb die entsprechenden Divisionen:

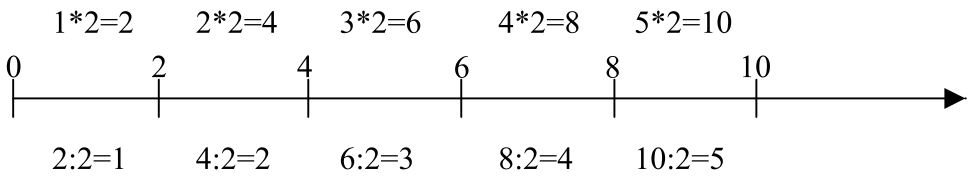


Abbildung 2: Darstellung von Multiplikations- und Divisionsaufgaben auf dem Zahlenstrahl in „*Meine Mathematik*“

Diese Divisionstabellen werden von den Schülern für alle Zahlen bis 10 gebildet. Das Kapitel der Division endet mit Textaufgaben, die Aufteilungs- und Verteilungssituationen beschreiben.

„Das Zahlenbuch“
Hier wird die Addition ganzheitlich und nicht gestuft behandelt. Es werden keine leichten Aufgabentypen unterschieden, die neu eingeführt, besprochen, eingeübt werden und die dann zu schwierigeren führen. Kriterien wie Zahl der Ziffern der Summanden, Existenz von Übertrag spielen hier keine Rolle. Angefangen wird mit dem schwierigeren Fall, d. h. mit der Addition von zweistelligen Zahlen, wobei auch der Übertrag bei den Einern erfolgt. An diesem Beispiel werden die Rechenstrategien vorgestellt:

1. Stellenwerte extra
2. Zehner erst und
3. Einer erst

Angewendet wird das halbschriftliche Verfahren. Die zu lösende Aufgabe wird notiert und unterstrichen. Unter diesem Strich werden die Nebenrechnungen (Zwischenschritte) und die Teilergebnisse festgehalten. Anhand der notierten Nebenrechnungen sind auch die Rechenwege leicht zu durchblicken. Das Ergebnis wird in einer Gleichungskette hinter der Aufgabe oberhalb des Striches ermittelt. Für jede Aufgabe erfolgt die zeichnerische Darstellung durch Zehnerstriche und Einerpunkte, was später nach Wunsch des Schülers entfallen kann. In einem ersten Durchgang werden die Zahlen mit Hilfe konkreter Materialien addiert. Die Aufgaben können z. B. durch Zusammenlegen von entsprechenden Geldbeträgen, mit dem Hunderterfeld durch Einfärben der Summanden oder durch Darstellen und Zusammenschieben der Zahlen an den verschiedenartigen Rechenmaschinen gelöst werden. In einem zweiten Durchgang werden die Rechenwege notiert und bewusst gemacht. Aus den aus dem ersten Durchgang bekannten Rechenwegen wird die Strategie „Stellenwerte extra" hervorgehoben, die auch in der nächsten Klasse bei der schriftlichen Addition verwendet wird. Dazu wird eine vierte Variante, das „Vereinfachen" vorgestellt. Das Kommutativgesetz wird in Form von Tauschaufgaben angewendet.

Analog zur Einführung der Addition im Hunderterraum wird die halbschriftliche Subtraktion eingeführt. Auch hier wird mit komplexeren Aufgaben, der Subtraktion von zweistelligen Zahlen, begonnen. Allerdings besteht hier keine Zehnerunterschreitung. Anschließend folgen Aufgaben mit Zehnerunterschreitung. In einem ersten Durchgang werden am konkreten Material verschiedene Lösungsmöglichkeiten eingeführt:

1. Zehner weg
2. Einer weg
3. Stellenwerte extra

Die Zeichnung wird als Lösungshilfe benutzt. Mit Hilfe von Materialien werden die Aufgaben gelöst und zeichnerisch dargestellt. Die dekadische Analogie wird bei geeigneten Aufgaben genutzt.

In einem zweiten Durchgang werden die Rechenwege notiert und vertieft. Es werden die wichtigsten Rechenstrategien ohne und mit Zehnerunterschreitung vorgestellt. Die Strategie „Zehner weg, dann Einer" wird besonders betont und geübt. Als weitere Rechenstrategie wird die Methode „Vereinfachen" thematisiert. (Entweder wird der Subtrahend erhöht und die Differenz subtrahiert, oder es werden beide Faktoren erhöht.)

Nachdem Addition und Subtraktion getrennt eingeführt wurden, wird der Zusammenhang zwischen den zwei Operationen in integrierten Übungen deutlich, indem für jede Aufgabe ihre Umkehraufgabe gebildet wird. Dieser Aspekt wird am Zahlenstrahl verdeutlicht.

In der ersten Klasse wurde die Multiplikation als verkürzte Addition eingeführt. Dies wird auch in dieser Klasse übernommen, wobei für das Wort „mal" das mathematische Zeichen „•" eingesetzt wird. Anfangs werden multiplikative Situationen in der Umwelt erkannt. Einige dieser Situationen werden mit Plättchen in Feldform, linear oder als Muster gelegt. Die zum Feld geordneten Plättchen bereiten die Übungen mit Hunderterfeld und Malwinkel vor. Die Darstellung der Malaufgaben am Hunderterfeld ermöglicht die Erarbeitung wichtiger Rechengesetze, wie das Kommutativ- und das Distributivgesetz. Beim Arbeiten mit dem Malwinkel liegt der Akzent auf der additiven Zerlegung von Aufgaben. An dieser Stelle beginnt das Erarbeiten der Einmaleins-Reihen unter Berücksichtigung der Tauschaufgaben. Als Stützpunkte oder Fundamente dienen die Malaufgaben mit 2, mit 10 und mit 5, die sogenannten Kernaufgaben. Die Malaufgaben mit 2 sind den Schülern schon vom Verdoppeln bekannt, mal 10 ist das Zehnfache einer Zahl und mal 5 durch Halbieren der Zehnfachen zu erreichen. Die Malaufgaben mit 1, mit 2, mit 5 und mit 10 bilden die sogenannten „kurzen" Reihen. Aus diesen vier Reihen lassen sich alle anderen Ergebnisse durch Addition und Subtraktion ermitteln. Für die systematische Erarbeitung des Einmaleins wird ein neues Mittel, der Mal-Plan eingesetzt, auf dem sich die Ergebnisse von Einmaleinsaufgaben deutlich ablesen lassen. Um dies verständlich zu machen, scheint eine Beschreibung des Mal-Planes der Autoren des Lehrwerkes hilfreich:

> “Auf dem Mal-Plan...sind alle Reihen linear dargestellt. ... Jede Reihe ist dreifach unterteilt: In der Mitte verläuft eine farbig gegliederte Punktereihe. Sie wird begleitet von einem oberen Streifen, der Zahlenreihe mit eingetragenen 5er- und 10er-Zahlen, und einem unterem Streifen mit den Markierungen der zugehörigen Reihenzahlen“ (Wittmann & Müller, 1995b, Lehrerband, 2. Klasse, S. 126).

Die Erarbeitung des Einmaleins erfolgt nicht Reihe für Reihe, sondern von den Kernaufgaben aus unter Nutzung von Beziehungen. Begonnen wird mit den leichten Reihen Zweier-, Fünfer- und Zehnerreihe, es folgen die untereinander verwandten Dreier-, Sechser- und Neunerreihe, danach die Vierer- und Achterreihe und isoliert die Siebenerreihe. Zur Vertiefung des Einmaleins wird die Einmaleins-Tafel eingeführt, auf der alle Einmaleinsaufgaben ganzheitlich aufgestellt sind. In dieser Tafel sind die Kernaufgaben sowie zusätzlich die Quadratzahlaufgaben farbig hervorgehoben. Mit Hilfe dieser Tafel wird die operative Struktur des Einmaleins im Zusammenhang verdeutlicht und die ökonomische Automatisierung des Einmaleins vorbereitet. Von den 100 Aufgaben des Einmaleins müssen nach Abzug des Mini-Einmaleins und der Kernaufgaben bei Beachtung des Vertauschungsgesetzes nur noch 18 Aufgaben gelernt werden. Schließlich folgt die Automatisierung des Einmaleins von den Kernaufgaben. Diese wird bis in das 3. Schuljahr fortgesetzt. An einem geeignetem Aufgabenformat, den Maltabellen, wird die Umkehroperation vorbereitet, auf die jetzt näher eingegangen wird.

Auch die Division wird wie alle anderen Operationen ganzheitlich eingeführt. Angesprochen wird die Division als Umkehroperation der Multiplikation im Zusammenhang mit dem Mal-Plan. Zu einer vorgegebenen Zahl werden die Zerlegungsmöglichkeiten am Mal-Plan gefunden, z. B. für die Zahl 21

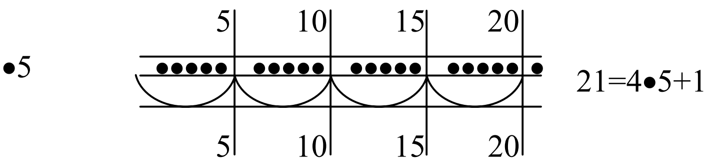


Abbildung 3: Darstellung einer Multiplikationsaufgabe am Mal-Plan im „*Zahlenbuch*“ (Wittmann & Müller, 1995, S. 140)

Um die Handlung der Division, das Teilen, zu verdeutlichen, werden Aufteilungs- und Verteilungssituationen besprochen und mit Plättchen nachgelegt. So können Schüler ein Verständnis für das Wort „durch“ und das Zeichen „:“ entwickeln. In beiden Vorgängen können beim Dividieren Reste auftreten. Als Abschluss werden mit Hilfe des Einmaleins-Planes Zerlegungs- und Divisionsaufgaben gelöst. Aus der bekannten Zerlegungsform, die auch im obigen Beispiel zu sehen ist, wird die Restschreibweise abgeleitet, z. B. 25=8•3+1, 25:3=8 Rest 1 (ebd., S. 183).

2.7.3. Dritte Klasse

2.7.3.1 Mengenlehre

„Meine Mathematik"
Der Lehrstoff der dritten Klasse beginnt mit einer kurzen Bezugnahme auf die Theorie der Mengen. Aus den Klassifizierungen, Zuordnungen und Aufreihungen der vorigen Klasse werden hier nur die Klassifizierungen aufgegriffen und vertieft. Es wird die Fähigkeit der Kinder geschult, verschiedene Objekte Gruppen zuzuordnen. Die Bildung einer Gruppe setzt voraus, dass die Schüler gemeinsame Merkmale oder Eigenschaften erkennen und an Hand dieser Merkmale Objekte in Gruppen ordnen. Ihre Erkenntnisse halten die Schüler in Tabellen mit zwei Eingängen fest, in denen auf der Eingangszeile die Objekte und auf der Eingangsspalte ihre Merkmale eingetragen werden. Fortschreitend steigt die Anzahl der Eigenschaften, nach denen die Klassifizierungen durchgeführt werden. Die Schüler stellen fest, dass gleichzeitig die Objekte, die alle diese Merkmale aufweisen, weniger werden. In der Folge wird das Gewicht auf die Theorie der Mengenlehre gelegt. Bis zu diesem Punkt haben die Schüler empirisch mit den Mengen gehandelt. Nun werden sie mit der Fachsprache vertraut. Es werden die Begriffe Menge, Teilmenge, Element und Umriss eingeführt und die richtige Anwendung dieser Begriffe geübt. Mengen werden gebildet und das Kriterium für die Zuweisung eines Objektes zu dieser Menge wird bestimmt. Aus diesen Mengen werden weitere Teilmengen erkannt und unterschieden.

2.7.3.2 Statistik

„Meine Mathematik"
In der vorigen Klasse haben die Schüler grundlegende statistische Kenntnisse erworben. Sie haben Daten registriert, Tabellen angelegt und interpretiert. Hier werden sie mit den Begriffen der Wahrscheinlichkeit und des Zufalls, des Sicheren und des Unmöglichen konfrontiert. Sie beschreiben Ereignisse, die als solche erfasst werden können. Dadurch wird die Statistik wieder aufgegriffen. Gestützt auf Abbildungen und arithmetische Daten erstellen sie Tabellen und Säulendiagramme und lernen, diese zu interpretieren. Sie sprechen über die Häufigkeit von Ereignissen und ihren Präferenzen.

2.7.3.3 Größen

„Meine Mathematik"
Die Einheit der Größen wird von dem Größenbereich Länge eröffnet. Im zweiten Schuljahr wurde der Meterstab in cm unterteilt. Mit dieser Einheit wurde die Länge verschiedener Strecken gemessen. In dieser Klasse werden neben der Länge auch die anderen Maße, Höhe und Breite, vorgestellt und unterschieden. Die Schüler vergleichen durch Messungen die Maße verschiedener Gegenstände. Die Einheit dm wird eingeführt und die Ergebnisse der Messungen werden mit gemischten Zahlen (Kombinationen von m, dm und cm) oder mit einfachen Zahlen (nur cm) geschrieben.

Nach den Maßen wird die Größe Gewicht behandelt. Sie wird in Bezug zu der Waage und dem Gewichtssatz gebracht und Wiegeübungen werden durchgeführt. Die Einheiten, die verwendet werden, sind Kilogramm und Gramm. Die Schüler sollen die Relation zwischen Gramm und Kilogramm begreifen. Dafür werden Kilogramm in Gramm verwandelt und umgekehrt und leichte Textaufgaben (Additions- und Subtraktionsaufgaben) mit Gewichten gelöst.

Das Kapitel der Zeit folgt, das Hauptthema in dieser Klasse ist die Berechnung von Zeitdauer und -raum. Bestimmte Zeitpunkte (Zeitpunkt vor und nach dem Vollenden eines Ereignisses) werden miteinander verglichen, und es wird der Zeitraum, der zwischen ihnen liegt, berechnet. In einer zweiten Variation wird eine erste Zeitangabe und die Dauer eines Verfahrens angegeben, und gefragt ist die Zeitangabe nach dem Abschluss des Verfahrens. Außer der Zeitdauer werden die Begriffe Hälfte und Viertel sowie die Schreibweise der Minuten (mit ´) und der Sekunden (mit ´´) besprochen. Das Kapitel der Größen schließt mit dem Größenbereich Geld. Hier werden alle Geldstücke und -scheine erarbeitet. Geldbeträge werden in unterschiedlichen Kombinationen gelegt. Die Schüler berechnen in Kaufsituationen das Zahl- und Rückgeld und vergleichen abgebildete Beträge.

„Das Zahlenbuch“

Im Bereich der Größen werden im Zahlenbuch die Themen Geld, Länge, Volumen, Zeit und Gewicht behandelt. In diesem Schuljahr wird die Kommaschreibweise von Geldbeträgen thematisiert und vertieft. Die Geldbeträge werden zuerst so gelegt, dass die Schüler zu einem inhaltlichen Verständnis des jeweiligen Geldbetrags geführt werden. Die Beträge werden in einer Stellentafel nach Stellenwert eingetragen und zuletzt in Kommaschreibweise aufgeschrieben. Dabei werden alle üblichen Sprechweisen angeführt. Zur Übung werden Beträge verglichen, halbiert und verdoppelt. Nach der Verwendung der Dezimalschreibweise folgt eine gezielte Betrachtung und das Kennenlernen aller Geldscheine. Die jeweiligen Abbildungen auf der Vorder- und Rückseite sowie die Sicherheitsmerkmale werden betrachtet und besprochen. Die Schüler arbeiten mit Rechengeld, bestimmen den Wert von vorgegebenen Beträgen oder legen diese auf unterschiedliche Weise.

Bezogen auf den Größenbereich Länge wurde in der vorigen Klasse die Unterteilung des Meterstabes in cm durchgeführt. Hier werden die Einheiten Kilometer, Dezimeter und Millimeter behandelt. Großer Wert wird auf den Aufbau einer realistischen Vorstellung des Kilometers (durch Erwandern) gelegt, so dass die Schüler die Gleichung 1 km = 1000 m begreifen. Ähnlich sollen die Schüler die Dezimeter und Millimeter als Teile des Meters und als Vielfache oder Unterteilungen des Zentimeters erfassen. Auch hier wird die Stellentafel benutzt, um die Einheiten abzutrennen und zu verdeutlichen, sowie die Kommaschreibweise vorzubereiten. Die Maßeinheit Millimeter wird in Zusammenhang zu den DIN-Formaten gesetzt und als feinere Maßeinheit begriffen. In diesem Kontext werden der Umgang mit dem Lineal und das genaue Messen sowie das Zusammenstellen von ermittelten Daten in einer Tabelle geübt.

Im Bereich der Zeit werden Zeitpunkte und Zeitspannen berechnet. Die Einteilung des Tages in Stunden und der Stunde in Minuten werden wiederholt, und die Tageslänge wird an Hand des Zeitpunktes des Sonnenunterganges (SU) und -aufgangs (SA) in Stunden und Minuten berechnet. Die Abkürzungen SU, SA und h werden besprochen. Die Schüler lernen, mit dem Kalender bewusst zu arbeiten, sich darin zu orientieren und ihn zu gebrauchen. Die Ferien- und Schultage werden abgelesen, addiert und ihre Gesamtzahl ermittelt und verglichen. Neben dem Kalender lernen die Schüler, Tabellen zu lesen und auszuwerten.

Es folgt eine kurze Auseinandersetzung mit dem Volumen. Mit Hilfe des Messbechers werden die Volumeneinheiten Liter und Milliliter eingeführt und praktische Erfahrungen mit Messvorgängen gesammelt. Die Schüler gießen den Inhalt von verschiedenen Gefäßen in einen Messbecher und erfahren den Rauminhalt durch das Ablesen der ml am Messbecher. Das Schätzen geht dem genauen Abmessen voran. Die Schüler sollen sich die Gleichung 1 l = 1000 ml einprägen und merken. Verschiedene Konsumartikel werden bereitgestellt, an denen die Schüler die ml ablesen und ihre Schätzungen diskutieren.

Die letzte Größe, die in dieser Klasse behandelt wird, ist das Gewicht. Sie wird zusammen mit den Messgeräten für Gewichte, den Waagen, eingeführt. Verschiedene Waagen, die bestimmte Gewichtsbereiche ausmessen, werden im Buch vorgestellt (Brief-, Personen-, Küchenwaagen) und ihre Funktion wird besprochen. Anschließend werden die Gewichte des Gewichtssatzes vorgestellt. Die Schüler erfahren die Einheiten Gramm und die verschiedenen Werte bis zu 1000 g, die alle Gewichte des Gewichtssatzes ergeben. An dieser Stelle wird die Einheit Kilogramm eingeführt. Die Schüler wiegen vorgegebene und selbst gewählte Gegenstände. Wichtig ist, dass die Gegenstände erst in die Hand genommen werden, so dass das Gewichtsgefühl geschult wird. Danach werden diese ausgewogen und in einer Tafel notiert, wobei die gemischte Schreibweise mit kg und g verwendet wird. Gewichte werden miteinander verglichen, der Größe nach geordnet und Stellenwerttabellen mit Werten von Gewichten werden im Anschluss interpretiert.

2.7.3.4 Geometrie

„Meine Mathematik“
Zum ersten Mal befassen sich die Schüler mit Winkeln. Winkeln, die sich in der Umwelt (im Raum oder auf Objekten) bilden, werden wahrgenommen und gezeigt. Am Beispiel der Uhr konstruieren die Schüler selber Winkel mit den zwei Uhrzeigern. Im selben Zusammenhang wird der rechte Winkel vorgestellt. Dieser wird von größeren und kleineren Winkeln erst optisch unterschieden und mit Hilfe des Geodreiecks bestätigt. In der Folge arbeiten die Schüler mit den geometrischen Formen Kreis, Quadrat, Rechteck und Dreieck. In unterschiedlichen Größen werden diese Formen nebeneinander gelegt und ihre Gemeinsamkeiten und Unterschiede besprochen (rechte Winkel bei Quadrat und Rechteck, alle Seiten identisch beim Quadrat und je zwei gegenüberliegende Seiten gleich beim Rechteck). Zuletzt wird der Umfang für diese Formen (außer der des Kreises) berechnet. Geometrische Formen, die neu eingeführt werden, sind die Raute und die Vielecke. Die Eigenschaften der Raute werden in Bezug auf die bisher bekannten regelmäßigen Vielecke analysiert und bestimmt. Das Zeichnen von Rauten und die Berechnung des Umfangs von Rauten und anderen Vielecken beenden die Auseinandersetzung mit den geometrischen Formen. Es wird mit den geometrischen Körpern fortgesetzt. Neben dem Quader, dem Würfel und der Kugel werden die Pyramide, der Zylinder und der Kegel präsentiert. Objekte der Umwelt werden abgebildet und diesen Formen zugeordnet. In den Flächen dieser Formen werden die Grundformen erkannt. Gestützt auf das Quadrat und den Würfel werden für das Messen von Flächen und Rauminhalt die Einheiten Quadrat- und Kubikmeter eingeführt. Beide haben die Dimensionen eines Meters. Mit der Anwendung dieser beiden Einheiten werden verschiedene Flächen und Körper gemessen.

„Das Zahlenbuch“
Die geometrischen Figuren, die in der ersten und zweiten Klasse erarbeitet wurden (Kreis, Dreieck, Rechteck und Quadrat), werden in dieser Klasse wiederholt. Neu vorgestellt werden die Vielecke, das regelmäßige Fünfeck, Sechseck und Achteck. Die neuen Figuren werden beschrieben, in Abbildungen erkannt und gezeichnet. In Anlehnung an das Quadrat und die Längeneinheit 1 m erstellen die Schüler Meterquadrate und nutzen sie für das Messen von Flächeninhalten. Bezogen auf die geometrischen Formen falten die Schüler nach Anweisungen einen Würfel und haben die Möglichkeit, seine Kanten, Seiten und Ecken handlungsorientiert zu erfahren. Ein zweiter Körper, der gebaut wird, ist der Quader. Auf Gitterpapier werden Kippbewegungen des Quaders nach Plan ausgeführt und beschrieben.

2.7.3.5 Arithmetik

Der Zahlenraum, der in der 3. Klasse erarbeitet wird, ist der Tausenderraum. Bevor die Schüler den ihnen bekannten Hunderterraum in dieser Richtung erweitern, wird dieser durch eine Wiederholung sichergestellt.

2.7.3.5.1 Wiederholung

„Meine Mathematik“
Diese Wiederholung umfasst auf einer ersten Ebene das Erfassen der Zahlen und die Vertiefung der Zahlvorstellung bis 100. Auf einer zweiten Ebene werden die Rechenoperationen in diesem Raum behandelt. Es werden dieselben Schwerpunkte wie in der vorigen Klasse gesetzt, fortschreitend steigt jedoch der Schwierigkeitsgrad.

Bei den Zahlen wird mit einstelligen Zahlen begonnen, es folgen die Zehnerzahlen und anschließend werden alle Zahlen bis 100 behandelt. Der Akzent liegt auf additiven Zerlegungen, der Berechnung von Ergänzungen und Differenzen sowie Additions- und Subtraktionsaufgaben. Mit der Stellenwertschreibweise soll den Schülern die Bedeutung der Stellenwerte der Ziffern bewusst werden. Gesondert werden die Ordinalzahlen besprochen und notiert. Das Kapitel der Zahlen endet mit einer vergleichenden Erarbeitung der Zahlen. Mächtigkeitsvergleiche werden mit den entsprechenden Relationszeichen ausgedrückt, wobei Gleichungen und Ungleichungen entstehen.

Es folgen die vier Rechenoperationen im Hunderterraum. Den größeren Raum nehmen die Addition und Subtraktion ein. So gewinnen die Schüler gleichzeitig Einsicht in die Rechenwege für beide Operationen, die einzeln vorgestellt werden. Zu Beginn wird mit den „leichten“ Fällen, den einstelligen Zahlen operiert. Von den Aufgaben ohne Übertrag wird man zu den Aufgaben mit Übertrag geführt. Dann folgen die „schwierigeren“ zweistelligen Zahlen. Auch hier wird zuerst ohne, danach mit Übertrag gerechnet. Anfangs wird horizontal, in der Folge senkrecht gerechnet. Die Rechenwege sind dieselben, die in der 2. Klasse vorgestellt wurden und werden hier namentlich erwähnt:

ADDITION		SUBTRAKTION	
Horizontal	Senkrecht	Horizontal	Senkrecht
Bildung des Z*	Analyse in Z, E*	Bildung des Z	Analyse in Z, E.
Stellenwerte extra	kurze Form	Stellenwerte extra	Borgetechnik
Z erst			Erweiterungstechnik

Z* steht für Zehner, E* für Einer

Es folgen Textaufgaben mit Addition, Subtraktion und deren Kombination.
Fortgefahren wird mit der Behandlung der Multiplikation als verkürzte Addition und ihrer Gegenüberstellung zur Division. Das Kommutativgesetz (für die Multiplikation) und das Distributivgesetz (für die Multiplikation und die Division) werden an Beispielen wie 2*14=(2*10)+(2*4)=20+8=28 und 24/2=20/2+4/2=10+2=12 verdeutlicht und das Einmaleins für alle Zahlen separat aufgefrischt.

Von den verschiedenen Rechenwegen für jede Rechenoperation wird die Kurzform (Endform) hervorgehoben und die entsprechende Sprechweise dazu notiert. In der Folge werden Beispiele für alle Rechenoperationen aus dem griechischen Lehrbuch „Meine Mathematik“ der dritten Klasse, Band 1, aufgeführt, die entsprechenden Seitenzahlen sind angegeben:

Addition

$$\begin{array}{r} 46 \\ +\,37 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 4 & 6 \\ +\,3 & 7 \\ \hline 8 & 3 \\ & (1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 46 \\ +\,37 \\ \hline 83 \end{array}$$

Sprechweise:
„ 7 plus 6...13. Wir schreiben die 3 und behalten die 1. 1 der Übertrag plus 3...4 plus 4...8“. (S. 54)

Subtraktion

a. Borgetechnik

$$\boxed{\begin{array}{r} 62 \\ -15 \\ \hline \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} (60+2) \\ -(10+5) \\ \hline \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} (50+12) \\ -(10+\ 5) \\ \hline (40+\ 7)=47 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rr} {}^{5}\cancel{6} & {}^{1}\cancel{2} \\ -\,1 & 5 \\ \hline 4 & 7 \end{array}}$$

Sprechweise:
- „5 von 2 geht nicht.
- Wir leihen uns einen Zehner von den 6 Z. 5 von 12...7.
- 1 von 5...4.“ (S. 56)

b. Erweiterungstechnik

$$\boxed{\begin{array}{r} 66 \\ -47 \\ \hline \end{array}} \begin{array}{c} (+10) \Rightarrow \\ (+10) \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{r} (60+16) \\ -(50+\ 7) \\ \hline (10+\ 9)=19 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rr} 6 & {}^{1}6 \\ -\,{}^{5}\cancel{4} & 7 \\ \hline 1 & 9 \end{array}}$$

Sprechweise:
- „7 von 6 geht nicht. Wir addieren 1 Zehner zu den 6. 7 von 16...9.
- Wir addieren auch zu der vier einen Zehner. 5 von 6...1.“ (S. 57)

Multiplikation

$$\boxed{\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 4 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} (20+3) \\ (20+3) \\ (20+3) \\ +\ (20+3) \\ \hline 80+12=92 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}}$$

Sprechweise:
- 4*3...12 wir schreiben die 2 und behalten die 1.
- 4*2...8 + 1 der Übertrag...9. Wir schreiben auch die 9.“ (S. 80)

Division

$$\boxed{\begin{array}{r|l} 36 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 12 \\ \cline{1-1} 06 & \\ -6 & \\ \cline{1-1} \end{array}} \Rightarrow \boxed{30+6 \ \begin{array}{|l} \underline{3} \\ 10+2=12 \end{array}} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 36 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 12 \\ \cline{1-1} 06 & \\ -6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Gesprochen wird:
- „Der Divisor hat eine Ziffer, eine teilen wir links vom Dividenden und sagen:
- Die 3 geht in die 3 einmal. 1*3...3 von 3...0.
- Wir holen die 6 runter und sagen: die 3 geht in die 6 zweimal. 2*3...6 von 6...0.“ (S. 81)

Bemerkung:
Nur bei den senkrechten kurzen Rechenwegen (Endform) wird die Sprechweise analysiert.

„Das Zahlenbuch"
In dieser Klasse werden grundlegende Einheiten vom Lehrstoff der zweiten Klasse wiederholt und vertiefend erweitert. Am Hunderterfeld werden Malaufgaben gelegt, die durch Addition oder Multiplikation ermittelt werden. Der Hunderter wird mit Hilfe eines Kreuzes in vier Malaufgaben zerlegt, die in ein Malkreuz eingetragen werden. Diese ist eine strukturierte Übungsform für das kleine Einmaleins und für die Veranschaulichung des Distributivgesetzes in der Multiplikation. Die Einführung der Einmaleinszahlen soll den Kindern helfen, Zahlen als Ergebnisse von Einmaleinszahlen zu erkennen. Im Bereich der Addition und Subtraktion werden die drei Rechenwege „Stellenwerte extra", „Zehner erst" und „Einer erst" hervorgehoben. Die Aufgaben werden zuerst am Hunderterfeld, an der russischen Rechenmaschine oder mit Rechengeld gelegt. Dann werden die Zahlen mit Punkten und Strichen dargestellt und als letztes folgt die halbschriftliche Notation in einem der genannten Rechenwege. Wesentlich ist, dass die Strategien verstanden und gefestigt werden. In dieser Klasse wird ein neues Anschauungsmittel, der Rechenstrich, eingeführt, wobei alle Schritte zum Lösen der Aufgabe verdeutlicht werden. Auf diese Weise werden Summen, Differenzen und Ergänzungen berechnet. Nach der Addition und Subtraktion werden die Multiplikation und die Division als Umkehraufgaben behandelt. Am Punktfeld wird auch die Division mit Rest wiederholt und vertieft. Bekannte Übungsformate (wie Zauberquadrate, Tabellen mit Einmaleinsreihen, Rechenketten und (Un)Gleichungen mit Termen) werden wiederholt, da sie das Entdecken von Zusammenhängen fördern und gleichzeitig die Rechenoperationen festigen.

2.7.3.5.2 Der Zahlenraum bis 1000

„Meine Mathematik"
Analog zu der Behandlung des Hunderterraums erfolgt die Behandlung des Tausenderraums. Zunächst werden der neue Zahlenraum und danach die Rechenoperationen erarbeitet. Die Zahlen beginnen mit dem bekannten Hunderter, und wie in der zweiten Klasse die Zehnerzahlen werden hier die Hunderterzahlen vorgestellt. Das Prinzip der Bündelung wird beibehalten und soll der Zahlerfassung dienen. Zehn Zehnerbündel werden zu einem Hunderter zusammengesetzt. Ähnlich werden alle Hunderter gebildet und ihre Benennung als Kardinal- und Ordinalzahlen erlernt. Die Hunderter werden in Zehner und Einer analysiert, als Produkte geschrieben, additiv zerlegt und miteinander verglichen. Es folgt die systematische und vollkommene Behandlung aller Zahlen bis 1000, die in drei Intervallen durchgeführt wird. Das erste Intervall umfasst die Zahlen 101-120, das zweite den Bereich 121-200 und das letzte den Bereich 201-1000. In jedem dieser Intervalle werden die Zahlen mit Bündelungen dargestellt und ihre Stellenwerte analysiert. Sie werden am Zahlenstrahl platziert und miteinander verglichen. Zahlenfolgen werden gebildet, das Vor- und Rückwärtszählen in bestimmten Schritten geübt und Subtraktions- und Additionsaufgaben gelöst.

„Das Zahlenbuch"
Die Zahlen werden im Zahlenbuch wie in den vorigen Klassen ganzheitlich eingeführt. Die Orientierung im Tausender beginnt mit dem Schätzen von großen Anzahlen in diesem Raum. Für das Schätzen werden Anhaltspunkte gegeben und durch Hochrechnen ein möglichst genaues Schätzergebnis erhalten. Nach dem Schätzen erfolgt die systematische Erarbeitung. Das Bündelungsprinzip zum Zehner wird am konkreten Material durchgeführt und die Stellenwertschreibweise mit Hundertern, Zehnern und Einern erarbeitet. Als Fortsetzung des Hunderterfeldes wird das Tausenderfeld eingesetzt, welches aus zehn Hundertern besteht. So können die Schüler ihre Kenntnisse aus dem Hunderterraum übertragen. Bei der Darstellung der Zahlen mit Strichen und Punkten wird das Quadrat□ für die Hunderter

hinzugefügt. Erneut werden Zahlen gezeigt, gelegt, mit zeichnerischer Darstellung gedeutet, verbalisiert und in einer Stellentafel notiert. Der Tausender wird in alle möglichen Kombinationen zerlegt, und die Schüler berechnen einfache Additions-, Multiplikations- und Divisionsaufgaben. Nach dem Tausenderfeld wird das Tausenderbuch, das aus zehn quadratischen Seiten besteht, vorgestellt. Darin sind nicht alle Zahlen eingetragen, es ermöglicht das entdeckende Lernen der Zahlen. Die geometrischen Bewegungen innerhalb der Seiten werden mathematisch gedeutet. Nach unten und rechts sind „Plusbewegungen", nach oben und links sind „Minusbewegungen". Das Verständnis zum Aufbau des Tausenders wird durch verschiedene Aufgaben vertieft: Nachbarzahlen, -zehner und –hunderter und Schnapszahlen (z. B. 11, 22, 33 oder 111, 222, 333) werden bestimmt und Analogieaufgaben (z. B. 2+...=10, 20+...=100, 200+...=1000) werden berechnet. Um die lineare Ordnung der Zahlen zu verdeutlichen, wird der Tausenderstrahl eingeführt. An diesem werden Zahlen und Zahlenfolgen gesucht und Ergänzungsaufgaben in bestimmten Schritten ausgeführt. Nach dem systematischen Erarbeiten der Zahlen wird besonderer Wert auf die Bedeutung der Stellenwerte gelegt. Mit Plättchen werden Zahlen in eine Stellentafel gelegt und umgekehrt. Zudem soll die Einsicht in den Zahlenraum durch die Variation von Zahlen gestützt werden. Das geschieht durch Verschieben, Hinzufügen oder Wegnehmen von Plättchen, wobei neue Zahlen gewonnen werden.

2.7.3.5.3 Die Rechenoperationen

„Meine Mathematik"
Die Rechenoperationen im Tausenderraum werden einzeln behandelt. Angefangen wird mit der Addition. In dieser Klasse wird mit dreistelligen Zahlen operiert. Es werden nach der Existenz von Überträgen vier Fälle unterschieden. Der erste Fall ist die Addition von Zahlen ohne Übertrag, es folgen Zahlen mit Übertrag nur bei den Einern, danach nur bei den Zehnern und schließlich sowohl bei den Einern als auch bei den Zehnern. Am Ende wird die Addition mehrerer Summanden geübt. In allen Fällen werden drei Rechenwege vorgeschlagen:

a. Analyse aller Ziffern der Summanden in Einer
b. Analyse aller Ziffern in ihren Stellenwerten
c. Kurzform

Es folgen Beispiele zu den einzelnen Strategien (vom Lehrbuch „Meine Mathematik", 3. Klasse, Band 2):

$\boxed{\text{a. } 365 + 128}$

$$\begin{array}{rrrrr} & 300 + & 60 + & 5 & \\ + & 100 + & 20 + & 8 & \\ \hline & 400 + & 80 + & 13 & \\ \hline & 400 + & 90 + & 3 & = 493 \end{array}$$

(S. 36)

$\boxed{\text{b. } 637 + 196}$

$$\begin{array}{rlll} & 6H & 3Z & 7E \\ + & 1H & 9Z & 6E \\ \hline & 7H & 12Z & 13E \\ \hline & 7H & 13Z & 3E \\ \hline & 8H & + 3Z + & 3E = 493 \end{array}$$

(S. 41)

$\boxed{\text{c. } 795 + 87}$

$$\begin{array}{rccc} & H & Z & E \\ & 7 & 9 & 5 \\ + & {}_1 & 8_1 & 7 \\ \hline & 8 & 8 & 2 \end{array}$$

(S. 41)

Derselben Buchseite wird auch die Sprechweise für die kurze Form der Addition entnommen: „Wir addieren die Einer und sagen: 7 + 5 = 12. Wir schreiben die 2 und behalten die 1. 1 der Übertrag plus 8...9 + 9 = 18. Wir schreiben die 8 und behalten die 1. 1 der Übertrag plus 7...8. Wir schreiben die 8" (ebd., S. 41).

Das Kommutativ- und Assoziativgesetz für die Addition und das Gesetz der Subtraktion wird wiederholt, ohne dass die Schüler diese Begriffe benutzen.
Bei der Subtraktion werden wieder dieselben Fälle unterschieden und dieselben Rechenwege vorgestellt:

a. Analyse aller Ziffern in Einern
b. Analyse aller Ziffern in ihren Stellenwerten
c. Kurzform

Wenn die Ziffer der Minuenden kleiner als die Ziffer der Subtrahenden ist, wird die Erweiterungstechnik (basierend auf der Konstanz der Differenz) angewendet:

$\boxed{\text{a. } 783 - 347}$

$$\begin{array}{r} 700 + 80 + 3 \\ -\ 300 + 40 + 7 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 700 + 80 + 13 \\ -\ 300 + 50 + 7 \\ \hline 400 + 30 + 6 = 436 \end{array}$$

(S. 44)

$\boxed{\text{b. } 648 - 375}$

$$\begin{array}{r} 6H\ 4Z\ 8E \\ -\ 3H\ 7Z\ 5E \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 6H\ 14Z\ 8E \\ -\ 4H\ 7Z\ 5E \\ \hline 2H\ 7Z\ 3E = 436 \end{array}$$

(S. 48)

$\boxed{\text{c. } 626 - 367}$

$$\begin{array}{rccc} & H & Z & E \\ & {}^{1}6 & {}^{1}2 & {}^{1}6 \\ - & \cancel{3}_{1} & \cancel{6}_{1} & 7 \\ \hline & 2 & 5 & 9 \end{array}$$

„Wie wir subtrahieren
a) Wir subtrahieren die Einer und sagen… 7 von 6 kann man nicht abziehen. Wir addieren zu 6 einen Zehner und sagen: 7 von 16...9.
b) Wir addieren zu der 6 der Zehner einen Zehner und sagen: 1 plus 6...7 von 2 kann man nicht abziehen. Wir addieren zu der 2 einen Hunderter und sagen: 7 von 12...5.
c) Wir addieren zu der 3 der Hunderter einen Hunderter und sagen 1 plus 3...4 von 6...2.“ (S. 52)

Neben diesen drei wichtigen Strategien wird eine vierte, „Hunderter erst“, vorgestellt, die aber nicht systematisch geübt wird:

478 + 221		626 - 258	
478 + 200 + 20 + 1		626 – 200 – 50 – 8	
678 + 20 + 1		426 – 50 – 8	
698 + 1 = 699	(S. 29)	376 – 8 = 368	(S. 50)

Nach der Behandlung dieser Operationen folgen Sachaufgaben, die auf diesen Operationen basieren. Sie werden auch im Sachkontext Handel weitergeübt und gefestigt. Begriffe wie Kaufpreis, Verkaufspreis, Verlust, Netto-, Bruttogewicht, Tara, mehr und weniger werden in Sachaufgaben vorgestellt und erarbeitet.

Auch in der Multiplikation werden bestimmte Fälle unterschieden. Kriterien sind die Anzahl der Ziffern des Multiplikators und die Überträge. Im ersten Fall ist der Multiplikator einstellig und es gibt keinen Übertrag, im zweiten Fall gibt es einen Übertrag und im dritten Fall werden zweistellige Zahlen multipliziert. Es werden drei Rechenwege empfohlen:

a. Analyse des Multiplikanden in Einer und stellenweise Multiplikation
b. Analyse des Multiplikanden in seine Stellenwerte und stellenweise Multiplikation
c. Kurzform

Es folgen Beispiele zu diesen Strategien:

a. 3 * 123

3 * (100 + 20 + 3)
3 * 100 + 3 * 20 + 3*3)
300 + 60 + 9 = 369 (S. 61)

b. 68 * 5

	6Z	8E
		× 5
	30Z	40E
	34Z	0E
3E	4Z	0E

(S. 66)

c. 68 * 5

Z	E
6	8
	× 5
34	$_4$0

Sprechweise:
- „5 mal 8...40. Wir schreiben die Null und behalten die 4.
- 5 mal 6...30 plus 4...34“ (S. 66)

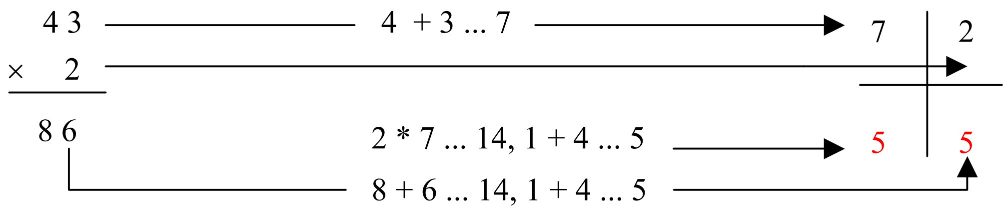
Beim zweistelligen Multiplikator wird nur diese letzte Form vorgestellt und analysiert:

$$\boxed{\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 12 \\ \hline \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 12 \\ \hline 6 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 12 \\ \hline 56 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 12 \\ \hline 56 \\ 8 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 12 \\ \hline 56 \\ +28 \\ \hline 336 \end{array}}$$

Sprechweise:

- „2 mal 8...16. Wir schreiben die 6 und behalten die 1.
- 2 mal 2...4 plus 1...5.
- 1 mal 8 ...8. 1 mal 2...2.
- Wir addieren die Teilprodukte und finden das gesamte Produkt 336.“

Für die Kontrolle oder Probe der Multiplikation wird das „Kreuz“ eingeführt:



(S. 64)

Mit Sachaufgaben, die sich auf die Multiplikation und auf die vorhergehenden Operationen beziehen, endet das Kapitel der Multiplikation.

Als Einstieg in die Division werden die Schüler mit Situationen des Verteilens und Aufteilens vertraut gemacht. Sie operieren mit Mengen und lösen über das Kopfrechnen leichte Aufgaben mit und ohne Rest als inverse Anwendung des Einmaleins. Der Divisor ist immer einstellig und der Dividend anfangs zweistellig. Auf der nächsten Stufe wird schriftlich gerechnet und der Dividend ist dreistellig. Zuerst werden Aufgaben ohne Rest, danach mit Rest behandelt. Es werden folgende Rechenwege vorgeschlagen:

a. Analyse des Dividenden in Einer und stellenweises Dividieren
b. Analyse des Dividenden in seine Stellenwerte und stellenweises Dividieren
c. Kurzform

$\boxed{\text{a. } 642 : 2}$

$$\begin{array}{rcrcr|l} 600 & + & 40 & + & 2 & 2 \\ \cline{6-6} -\,600 & - & 40 & - & 2 & 300 + 20 + 1 \\ \cline{1-1}\cline{3-3}\cline{5-5} 000 & & 00 & & 0 & \boxed{321} \end{array}$$

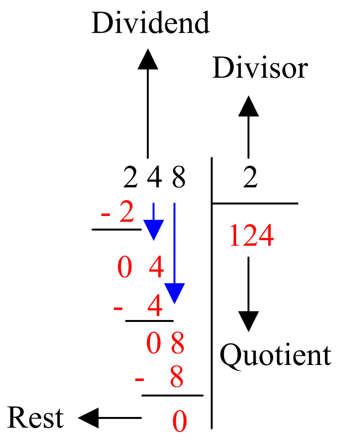
(S. 85)

$\boxed{\text{b. } 248 : 2}$

$$\begin{array}{ccc|l} 2H & 4Z & 2E & 2 \\ \cline{4-4} -\,2 & -\,4 & -\,8 & 1H,\ 2Z,\ 4M \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{124} \end{array}$$

(S. 86)

c. 248 : 2



Sprechweise:

- „Eine Ziffer hat der Divisor, eine teilen wir vom Dividenden (die Hunderter). Die 2 geht in 2 einmal. 1 * 2 ... 2, von 2...0.
- Wir holen die nächste Ziffer runter (die Zehner). Die 2 geht in die 4 zweimal. 2 * 2 ... 4, von 4...0.
- Wir holen die nächste Ziffer runter (die Einer). Die 2 geht in die 8 viermal. 4 * 2...8, von 8... 0.“ (S. 86)

Bei der Kurzform der Division wird der Quotient durch das Produkt des Quotienten mit dem Divisor bestätigt. z. B. 124×2=248. Wir haben den Dividenden gefunden. Die Division ist also richtig.

Es werden auch Sonderfälle der Division erarbeitet, z. B. der Divisor ist größer als der Teildividend, Null im Dividenden, Teildivisionen mit Rest. An diesem Punkt endet der Lehrstoff der Rechenoperationen. In dieser Klasse werden die Fachbegriffe aller Faktoren der Grundrechenarten (Divisor, Dividend, usw.) vorgestellt.

Die Division gilt als Anlass, die Behandlung der Brüche weiterzuführen. Im Bereich der Brüche werden die $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ und danach $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ eingeführt. Diese werden an Mustern, geometrischen Figuren, Mengen erkannt und gezeichnet. Die Schüler berechnen diese Brüche für bestimmte Zahlen und vergleichen die Brüche untereinander. Sie lösen leichte Sachaufgaben und berechnen die genaue Anzahl von Mengen. Aus diesen Brüchen entstehen durch Addition gleichnamige Bruchzahlen. Die Schüler lernen leichte gleichnamige Brüche zu addieren und zu subtrahieren. Sie übertragen diese Brüche auf Diagramme und erstellen Säulendiagramme.

„Das Zahlenbuch“
Bei der Addition und Subtraktion im Tausenderraum sind im Zahlenbuch zwei Formen zu unterscheiden: das halbschriftliche und das schriftliche Verfahren. In einem ersten Durchgang werden die halbschriftliche Addition und Subtraktion aus dem Hunderterraum fortgesetzt. Die Rechenschritte und Teilergebnisse werden unter der Ausgangsaufgabe notiert und von ihr durch einen Strich abgesondert. Die Hauptstrategien, die in der 2. Klasse mit zweistelligen Zahlen behandelt wurden, werden jetzt auf dreistellige Zahlen übertragen:

- Stellenwerte extra (Hunderter plus/minus Hunderter, Zehner plus/minus Zehner, Einer plus/minus Einer)
- Schrittweise - Hunderter dazu/weg (Hunderter dazu/weg, dann Zehner dazu/weg, dann Einer dazu/weg)
- Schrittweise - Einer dazu (Einer erst, dann Zehner, dann Hunderter dazu)
- Vereinfachen

Die Aufgaben werden mit Rechengeld gelegt oder graphisch dargestellt. Die erste Darstellung umfasst die ikonische Darstellung der Zahlen durch Quadrate, Striche und Punkte und die zweite das Zeichnen des Rechenstriches, an dem die Rechenschritte ersichtlich werden. Schwere Aufgaben werden auf leichtere zurückgeführt, indem man die Zahlen angemessen rundet und das Überschlagsrechnen nutzt (Strategie „Vereinfachen"). Da sich das Runden aus dem Sachzusammenhang ergibt, wird auch hier kein festes Rundungsverfahren gefordert. In integrierten Übungen werden beide Operationen anwendungsbezogen geübt und der Zusammenhang zwischen ihnen stärker aufgezeigt.

Von den halbschriftlichen Strategien lassen sich die schriftliche Addition und Subtraktion leicht einführen. Die schriftliche Addition baut auf die halbschriftliche Strategie „Stellenwerte extra" auf, wenn man bei den Einern anfängt und Überträge notiert. Das Verfahren lässt sich sehr gut mit der Stellentafel sichern. Die schriftliche Subtraktion ergibt sich aus der halbschriftlichen Strategie des „stellenweisen Ergänzens". Der Subtrahend wird vom Minuenden weggenommen und die verbleibende Differenz wird durch stellenweises Ergänzen des Subtrahenden zum Minuenden ermittelt. Die Überträge werden dabei überzeugend erklärt. Die Schüler arbeiten zunächst an der Stellentafel, dann werden die Algorithmen mit der entsprechenden Sprechweise erlernt. Für beide Operationen werden Übungen in Sachkontexten durchgeführt und der Überschlag zur schnellen Überprüfung der Ergebnisse vorgestellt.

In der Multiplikation ist die wichtigste halbschriftliche Strategie das Malkreuz. Dieses stellt die Zerlegung einer Malaufgabe in Teilaufgaben dem Distributivgesetz entsprechend dar. Bei der additiven Zerlegung nur eines Faktors in zwei Summanden hat es zwei Felder, bei der Zerlegung beider Faktoren in zwei Summanden vier Felder. Das Malkreuz mit zweistelligen Faktoren wird systematisch am Vierhunderterfeld (analog zum Hunderterfeld) eingeführt und geübt. Besonderer Raum wird dem Zehner-Einmaleins und seiner Beziehung zum kleinen Einmaleins gegeben. Bei Anwendung des Distributivgesetzes im Kopf oder halbschriftlich können die Aufgaben des großen Einmaleins mit Hilfe des kleinen Einmaleins gelöst werden, z. B.

$$\begin{array}{l} \underline{3 \bullet 14} = 30 + 12 = 42 \\ 3 \bullet 10 \\ 3 \bullet \ \ 4 \end{array}$$

(Wittmann & Müller, 1996b, S. 142)

Die Behandlung der halbschriftlichen Multiplikation wird fortgesetzt. Der Akzent liegt dabei auf Malaufgaben mit 2, 5 und 10, dem kleinen Einmaleins wieder in Verbindung mit dem großen Einmaleins und auf der Lösung großer Malaufgaben mit dem Malkreuz. Als Rechenstrategien werden das Malkreuz, „schrittweise" und die Kurzform freigestellt.

Als Umkehrung der Multiplikation wird die Division erkannt und behandelt. Abgestützt auf Punktfelder werden Malaufgaben, Tauschaufgaben und die dazugehörigen Umkehrungen zueinander in Beziehung gesetzt. (z. B. 4 * 6 = 24, 6 * 4 = 24, 24 : 4 = 6, 24 : 6 = 4). Die Division mit Rest schließt sich an, wobei auf die Verteilung einer Plättchenmenge auf Punktfelder zurückgegriffen wird.

Im Zusammenhang mit der Multiplikation wird die Division erneut aufgegriffen. Die Division durch 10 wird als Umkehrung der Multiplikation mit 10 erfasst (10 * 10 = 100, 100 : 10 = 10) und die Umkehrung des Zehner-Einmaleins analog zur Umkehrung des Einmaleins durchgeführt (18 : 6 = 3, 180 : 6 = 30, 180: 60 = 3). In der Folge wird die halbschrift-

liche Division behandelt. Der Grundgedanke dabei ist die schrittweise Abspaltung leicht teilbarer Summanden vom Dividenden und das Notieren der entsprechenden Teilaufgaben. Es wird auch die verkürzte Schreibweise vorgestellt, bei der die Reste nicht notiert werden.
z. B.

	858 : 6 =	100 + 20 + 20 + 3 = 143
	600 : 6 =	100
Rest	258	
	120 : 6 =	20
Rest	138	
	120 : 6 =	20
Rest	18 : 6 =	3

Kurz:	858 : 6 =	143
	600 : 6 =	100
	120 : 6 =	20
	120 : 6 =	20
	18 : 6 =	3

(Müller & Wittmann, 1996, S. 15)

Nach der Division werden die Brüche weitergeführt. Halbe, Viertel und Dreiviertel werden bei bekannten Größen systematisch berechnet.

2.7.4 Vierte Klasse

Das griechische Lehrbuch der vierten Klasse wurde 1992 neu erarbeitet und hat seither die heutige Form bekommen. Die Bezugnahme auf die Mengenlehre wurde ausgelassen, dafür wurden einige Seiten mit Geometrie hinzugefügt, u. a. ein Kapitel über Symmetrie.

2.7.4.1 Größen

„Meine Mathematik“
Thematisiert werden in dieser Klasse die Größen, die die Schüler bisher kennengelernt haben, d. h. Maße, Flächen, Gewichte, Rauminhalte und Geld. Im Vordergrund stehen hier Messungen, bezogen auf diese Größen. Angefangen wird mit Längenmessungen. Die Schüler schätzen mit dem Auge Entfernungen und bestätigen ihre Vermutungen mit konkreten Messungen. Gestützt auf den Meterstab und die Einheit Meter lernen sie, mit den kleineren und größeren Einheiten umzugehen. Die Schüler wählen für jeden Messvorgang eine bestimmte Einheit aus und begründen ihre Wahl mit der Größe der Strecke, die sie abmessen möchten. Die Ergebnisse werden in einer Stellentafel festgehalten, an der die dekadische Struktur der Einheiten deutlich wird. Es tauchen auf diese Weise gemischte Zahlen auf (Meter + Dezimeter, Meter + Zentimeter, Zentimeter + Dezimeter), die in einfache Zentimeter umgewandelt werden. An dieser Stelle werden ohne Vertiefung der Maßstab und das Lesen einer Zeichnung vorgeführt.

Es folgt die Einführung des Umfangs am Beispiel des Quaders. Alle Seiten werden separat abgemessen und nacheinander zu einer Strecke zusammengelegt. Nachdem die Schüler Verständnis für diesen additiven Vorgang erworben haben, berechnen sie den Umfang von ihren Körperteilen sowie von verschiedenen Objekten mit Hilfe des Maßbandes. Es folgt das Ausmessen von Flächen. Auch hier findet zuvor das Abschätzen des Flächeninhaltes einer Fläche der genauen Abmessung statt. Für die Flächenberechnung wird die Einheit Quadratdezimeter verwendet, für größere Flächen auch Quadratmeter, mit denen die Flächen ausgelegt werden. Nach dem Flächeninhalt werden die Begriffe Volumen und Rauminhalt erarbeitet. Das Volumen lässt sich mit Füllen und Leeren von Behältern, das Gewicht mit dem Auswiegen von Objekten erfassen. Die Maßeinheiten Kubikmeter, Liter und Kilogramm werden angewendet, um Messvorgänge durchzuführen.

Als letzte Größe wird das Geld behandelt. Die Schüler erkennen und unterscheiden die Münzen und Geldscheine untereinander und legen bestimmte Geldbeträge in unterschiedlichen Möglichkeiten. Dabei sind nicht nur die Geldwerte, sondern auch die jeweilige Anzahl der Münzen bedeutend.

„Das Zahlenbuch“
In der vierten Klasse werden drei Größen behandelt: die Zeit, die Gewichte und das Volumen. Bevor die Behandlung der einzelnen Größen beginnt, findet sich auf einer Doppelseite ein Überblick über die dekadischen Größenbereiche Anzahl, Gewicht, Rauminhalt und Länge. Zu jeder Größe ist ein Repräsentant angegeben. Durch die Multiplikation mit der Zehn wird der Übergang zur nächstgrößeren Maßeinheit klargestellt und umgekehrt. Durch diese Anordnung erhalten die Schüler eine Übersicht über die dezimale Struktur der Größen. Fortschreitend führen die Beispiele von der Zahl 3 (bei den Anzahlen) zu der Zahl 3 Millionen, von 1 Gramm (bei den Gewichten) zu 1000 Kilogramm=1 Tonne, von 1 Milliliter (bei dem Rauminhalt) zu 1000 Liter, von 1 Millimeter (bei der Länge) zu 100 Meter und von 1 Kilometer=1000 Meter zu 1000 Kilometer.

Im Bereich der Zeit wird als letzte gängige Einheit die Sekunde eingeführt. Diese wird zu den schon bekannten Zeiteinheiten (Stunden und Minuten) in Beziehung gesetzt. Die Schüler berechnen die Zeitangabe nach dem Vergehen bestimmter Sekunden und finden heraus, aus wie vielen Sekunden eine Stunde, eventuell ein Tag besteht. Mit verschiedenen Aktivitäten (durch den Bau eines Sekundenpendels oder durch Mitzählen mit einer Sekundenanzeige) werden Körpererfahrungen über die Sekunde ermöglicht.

Fortgefahren wird mit der Größe Gewicht, wobei die Tonne thematisiert wird. Es wird versucht, den Kindern eine Vorstellung von dem Gewicht einer Tonne zu vermitteln. Die Beziehungen zwischen Kilogramm und Tonne wird mit Umwandlungen von Gewichten in diesen Einheiten klargestellt. Dabei wird immer auf die richtige Schreibweise geachtet. Am Beispiel von LKW-Ladungen werden die Begriffe „Leergewicht", „Gesamtgewicht" und „Gewicht der Ladung" geklärt und Additions- und Subtraktionsaufgaben gelöst, in denen diese Größen berechnet werden müssen.

Abschließend wird das Volumen thematisiert. Ein Meterwürfel wird hergestellt und mit dem Dezimeter- und Zentimeterwürfel verglichen. Hierbei wird untersucht, wie viele kleinere Würfel in die größeren passen.

2.7.4.2 Geometrie

„Meine Mathematik"
Die den Schülern bekannten geometrischen Körper Kugel, Quader, Zylinder, Würfel und Pyramide werden zunächst aufgegriffen. Es geht hier um das Erkennen dieser Formen. Außerdem werden abgebildete Gegenstände im Buch oder Objekte in der Umwelt betrachtet und den entsprechenden Formen zugeordnet. Die Schüler operieren mit den Formen, legen diese auf- und nebeneinander und benennen die neu entstandenen Formen. Aus diesen Körpern werden der Quader und der Würfel näher betrachtet. Ihre Struktur (die Fläche und die Maße) wird untersucht und verglichen. In Verbindung mit diesen Körpern werden ihre Netze vorgestellt und aufgrund dieser die Körper mit Pappe, mit Strohhalmen oder mit Plastilin nachgebaut.

Ein neues Thema, das in dieser Klasse behandelt wird, sind die Linien und Winkel. Angefangen wird mit der Erläuterung der Begriffe Punkt, Gerade, Halbgerade, Strecke und rechter Winkel. Die Schüler beschreiben, bei welchen geometrischen Körpern oder Gegenständen im Klassenzimmer Linien und Winkel anzutreffen sind. Am Beispiel der geometrischen Körper sollen diese Begriffe nun vertieft werden. Zur Konstruktion der Linien und Feststellung der Winkel wird das Geodreieck und das Lineal eingesetzt. In der Folge werden die Schüler mit dem Begriff der Parallelität vertraut gemacht sowie mit dem Erkennen von parallelen Linien auf Körpern und in der Umwelt. Ausgehend von den Linien werden der Bogen, der Kreis, und die gebrochene Linie eingeführt. Auch hierzu führen die Schüler angemessene praktische Beispiele an.

Die Vorkenntnisse der Schüler über gebrochene Linien und Strecken werden genutzt, um die Vielecke einzuführen und diese zu beschreiben. Gestützt auf die Anzahl der Ecken und Seiten benennen die Schüler die verschiedenen Vielecke. Sie untersuchen diese und stellen ihre Gemeinsamkeiten und Unterschiede bezogen auf die Parallelität und Größe ihrer Seiten sowie die Größe ihrer Winkel fest. Sie legen mit den Vielecken neue Figuren aus und beschreiben diese. Zum Abschluss zeichnen sie Vielecke mit Hilfe des Lineals.

Im Bereich der Symmetrie werden Figuren vorgegeben und mit einem Spiegel verdoppelt. In einer weiteren Variation ist die Endfigur gegeben und die Spiegelachse wird gesucht (dabei handelt es sich nicht immer um symmetrische Figuren). Die Symmetrie erfahren die Schüler auch durch Falten von Papier und das Betrachten der beiden geteilten Flächen. So endet das Kapitel der Geometrie in dieser Klasse.

„Das Zahlenbuch"
Die Themen, die in dem Kapitel der Geometrie in dieser Klasse behandelt werden, sind vielfältig und aus unterschiedlichen Bereichen ausgewählt worden. Aus der elementaren Topologie wurde das Durchlaufen von Netzen gewählt. In Zeichenspielen erkunden die Schüler, ob sich eine Figur in einem Zug ohne Absetzen und doppelte Striche zeichnen lässt und finden diesen Weg experimentell heraus. Im Bereich der Symmetrie arbeiten die Schüler mit zwei Spiegeln, die sie zu einem Spiegelbuch zusammenkleben. Damit versuchen sie aus einer Ausgangsfigur vorgegebene Muster herzustellen und betrachten die dabei entstehenden Spiegelbilder. Neue geometrische Körper, die in dieser Klasse vorgestellt werden, sind der Kegel, der Zylinder und die Pyramide. Diese Körper werden mit Knetmasse nachgebaut und in Gegenständen aus der Umwelt erkannt. Wichtig ist weiterhin, die schon bekannten Grundflächen Kreis, Quadrat, Rechteck und Dreieck als Seitenflächen oder Schnittflächen von Körpern wiederzuerkennen. Nach den Körpern werden die klassischen Zeichengeräte Zirkel und Geodreieck und ihre Handhabung vorgestellt. Handelnd erfahren die Schüler die Begriffe Radius, Mittelpunkt und Durchmesser. Das Geodreieck wird in Zusammenhang mit den Begriffen senkrecht, waagerecht, parallel, Strecke, Strahl und Gerade eingesetzt. Mit Hilfe von Gitterpapier werden die Operationen „Vergrößern" und „Verkleinern" nach einem bestimmten Maßstab eingeführt. Mit dem Maßstab und der Größe des Modells lernen die Kinder die Originalgröße des Modells zu berechnen. Die regelmäßigen Vielecke der vorigen Klasse werden wieder aufgegriffen und daraus (mit einer Zeichenuhr) die platonischen Körper hergestellt. Dabei wird auf den Zusammenhang der Körpernamen mit der Anzahl der benötigten Vielecke hingewiesen. In der Folge wird das räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler gefördert. Drei Quadrate werden nach vorgegebenem Grundriss aufgestellt und ihre Seitenansichten betrachtet. In einem weiteren Schritt wird eine wirkliche Seitenansicht in einer gezeichneten Ansicht umgesetzt. Danach werden ein Plan mit Hilfe eines Luftbildes gelesen und die Ansichten der jeweiligen Blickrichtung zugeordnet. Zur Schulung der geometrischen Kombinationsfähigkeit und analog zu dem Tangram-Spiel der vorigen Klasse, bauen die Schüler aus 27 Holzwürfeln den sogenannten Soma-Würfel.

2.7.4.3 Arithmetik

Bevor sich die Schüler im Millionenraum orientieren, wird der Tausenderraum durch eine Wiederholung sichergestellt. Die dreigliedrige Einer-/Zehner-/Hunderterstruktur wird betont und mit adäquaten Darstellungsmitteln unterstützt.

2.7.4.3.1 Wiederholung

„Meine Mathematik"
Zu Beginn steht die Bildung der Zahlen im Vordergrund, wobei das Bündelungsprinzip zum Zehner angewendet wird. Als didaktisches Material werden die Steckwürfel benutzt, die sich zum Bündeln eignen. Es werden 1 Zehner (1 Reihe mit 10 Steckwürfeln), 1 Hunderter (1 Stapel mit 10 Reihen) und 1 Tausender (10×10 Stapel) gebildet. Nachdem die Zehnerstruktur des Tausenders erarbeitet ist, operieren die Schüler mit Zahlen, um ihr Zahlenverständnis zu vertiefen. Zahlen werden in den untergeordneten Klassen analysiert

(Hunderter in Zehner und diese in Einer) und miteinander verglichen. In der Folge wird auf die Stellenwertschreibweise mit Hundertern, Zehnern und Einern Wert gelegt. Das Verständnis des Stellenwertes im Tausender gewinnt eine große Bedeutung. Das Legen der Zahlen in eine Stellentafel unterstützt diese Einsicht. Die Bedeutung der Null wird an allen Stellen erläutert. Die Stellung der Ziffern wird getauscht und die Schüler beschreiben die Auswirkungen der Modifikationen. Für das Schreiben einer Zahl werden unterschiedliche Möglichkeiten vorgestellt,

z. B. 548 = 5H + 4Z + 8E
= (5*100) + (4*10) + (8*1)
= 500 + 40 + 8
= 550 – 2 in der Form einer Differenz
= (6*100) – 52 als Differenz und Produkt
(„Meine Mathematik“, Lehrerband, 4. Klasse, S. 42)

Außer mit der Stellentafel arbeiten die Schüler auch mit der Rechenmaschine. Als Kriterium für den Vergleich der Zahlen beachten die Schüler die Ziffer der größten Klasse (Hunderter) und schrittweise die Ziffer der nächstkleineren Klasse, wenn die ersten Ziffern identisch sind. Nach den Erfahrungen, die die Schüler mit der Zehnerstruktur des Zahlensystems gemacht haben, führen sie Umformungen an Zahlen durch. Auf diese Weise wandeln sie die analytische Schreibweise einer Zahl (dargestellt durch ihre Stellenwerte) in die Kurzform um, z. B. 4H 5Z 14E= 4H 6Z 2E= 462 und entdecken die versteckten Zahlen.

„Das Zahlenbuch“
In einem multikulturellen Rahmen wiederholen die Kinder den Tausenderraum und die Rechengesetze von Addition und Subtraktion. Bekannte Übungsformate aus dem dritten Schuljahr (wie Aufgaben im Zehnerpack und Hüpf im Päckchen) werden wiederholt. Der Lösungsweg, der dabei angewendet wird, ist den Schülern überlassen. Sie können zwischen der schriftlichen Notation oder den halbschriftlichen Strategien entscheiden. Eingebettet in Aufgaben ist das Lesen und Interpretieren von Säulendiagrammen und das Übertragen der Informationen in Tabellen. Miteinbezogen werden Überschlagsrechnungen, wobei das Zeichen „≈“ eingeführt wird. Außer Additions- und Subtraktionsaufgaben halbieren und verdoppeln die Schüler im Tausenderbereich und betrachten Analogien zwischen dem Einer- und Zehner- Einmaleins. Anschließend wird die halbschriftliche Multiplikation thematisiert, die Schüler lösen Malaufgaben auf unterschiedlichen Rechenwegen: Malkreuz, schrittweise und kurz. Alle Rechenwege werden noch mal besprochen und in Erinnerung gerufen. In der Folge wird die halbschriftliche Division mit und ohne Rest wiederholt. Einerseits kann schrittweise dividiert werden, bis kein oder kein zu teilender Rest mehr übrig bleibt. Auf der anderen Seite kann kurz dividiert werden, wobei man die Summe der geteilten Zahlen im Kopf ausrechnen muss. Auch für die Probe gibt es verschiedene Strategien: das Malkreuz oder die schriftliche Multiplikation. Eingeführt wird ein weiteres Übungsformat, der Rechenbaum. Die Schüler üben das Zeichnen und Lösen von Rechenbäumen. Betont wird dabei die wichtige Vereinbarung, dass Rechenbäume immer von oben nach unten gelöst werden. Im dritten Schuljahr haben die Schüler Sachaufgaben frei erfunden. Hier geht es darum, zu vorgegebenen Rechenbäumen passende Fragen zu finden. Letzter Punkt, der in dieser Wiederholung hervorgehoben wird, ist das Lösen von Sachaufgaben. Als Strategie wird zunächst das Auflisten von Zahlendaten präsentiert. Als wertvolles Hilfsmittel und Grundlage wird die Anfertigung von Überlegungsskizzen angeboten. Die Schüler zeichnen Sachaufgaben nach, überlegen und erst dann rechnen sie diese aus und erfinden auch eigene Sachaufgaben.

2.7.4.3.2 Der Zahlenraum - Orientierung im Millionenraum

„Meine Mathematik“
Der Zahlenraum erweitert sich in der vierten Klasse über den Tausender hinaus bis zur Million. Die Million wird nicht einheitlich, sondern gestuft eingeführt. Es werden vier Intervalle gebildet, in denen man schrittweise den breiten Zahlenraum erarbeitet. 1.000-2.000, 2.000-10.000, 10.000-100.000 und 100.000-1.000.000

<u>Intervall 1.000- 2.000</u>
Um die Zahlen über dem Tausender zu veranschaulichen, werden zwei Streifen Millimeterpapier benutzt, die zusammen 2.000 kleine Vierecke abbilden. Jede neue Zahl wird zuerst als Summe mit der 1.000 beschrieben (1.000+1=1.001). Es wird angestrebt, dass die Schüler (durch diese Streifen) den Tausender als eine neue Einheit wahrnehmen und erfassen. Die Zahl erhält weiterhin ihren Platz in der Zahlenreihe und in der Stellentafel. Hier wird die Schreibweise der Zahl analysiert, die Stellenwerte der Ziffern erläutert und der Zahlenname geübt. Der Dreieraufbau des dekadischen Systems wird wiederum betont, indem 10 Einheiten einer Stufe eine Einheit der nächstgrößeren Stufe bilden. Im Schulbuch findet man weitere Zahlendarstellungen. Die Tausender werden mit einem Quadratwürfel = 10 Platten mit Quadratwürfeln, die Hunderter mit einer Platte (1 Platte = 10 Reihen), die Zehner mit einer Reihe (1 Reihe = 10 Würfel) und die Einer mit einzelnen Würfeln dargestellt. Außer den Würfeln werden die Zahlen an der Rechenmaschine dargestellt, und es wird auch mit Geld gerechnet. Die Schüler interpretieren die Zahlendarstellungen, benennen die Zahlen und schreiben diese auf. Sie analysieren die Stellenwerte und schreiben die Zahl als Summe von Produkten. Es werden ebenfalls Übungen zur Kombinatorik der Zahlen durchgeführt, wobei die Schüler möglichst viele Möglichkeiten finden müssen, Zahlen aus vorgegebenen Ziffern zu bilden. Es wird vor- und rückwärts in Schritten gezählt, Zahlenfolgen werden gebildet, Bruchteile von Hunderterzahlen und die analytische Schreibweise der Zahlen in die Kurzform umgewandelt (z. B. 1T 6H 14E = 1654).

<u>Intervall 2.000-10.000</u>
Gegeben werden die Ziffern 0-9 und die Schüler werden aufgefordert, daraus vierstellige Zahlen zwischen 2.000 und 10.000 zu bilden. Die Darstellung der Zahlen an der Rechenmaschine hilft, über die Stellenwerte zu sprechen und den Zahlennamen herzuleiten. Die Zahlen werden miteinander verglichen wobei das Kriterium des Vergleichs (die entscheidende Ziffer) erklärt wird. Die Bedeutung der Null wird an allen möglichen Stellen interpretiert. Auch hier werden außer der Rechenmaschine die Steckwürfel als Darstellungsmittel eingesetzt. Es folgen dieselben Übungen, bezogen auf die Zahlen wie sie im vorigen Abschnitt beschrieben wurden.

<u>Intervall 10.000-100.000</u>
In den zwei letzten Abschnitten kann man feststellen, dass dieselben Handlungen durchgeführt werden, um die Zahlen über den Tausender vorzustellen. Erst werden die Zahlen anhand der Darstellungsmittel (Würfel, Rechenmaschine und Stellentafel) veranschaulicht, und es folgen Übungen, die das Zahlenverständnis vertiefen sollen. Dies geschieht für die beiden weiteren Intervalle (10.000-100.000 und 100.000-1.000.000), bis der ganze Zahlenraum durchgearbeitet ist. Bis zum ersten Halbjahr werden die Zahlen bis 10.000 eingeführt. In der zweiten Hälfte des Schuljahrs wird der Zahlenraum bis zur Million erweitert und nachdem die Schüler auch in diesem Intervall rechnen, schließt der Stoff mit den Bruch- und Dezimalzahlen.

Bruch- und Dezimalzahlen

Das Kapitel der Brüche wird nach den Rechenoperationen behandelt. Basierend auf dem Wissen, das die Schüler über Hälften und Viertel in der dritten Klasse erworben haben, werden nun alle Stammbrüche vorgestellt. Ein Ganzes wird in gleich große Teile zerlegt, wobei die Anzahl der Teile von 2 bis 12 reicht. So bilden die Schüler verschiedene Stammbrüche. Durch Zusammensetzen derselben Stammbrüche entstehen die Bruchzahlen. Es werden die Fachtermini „Teiler“ und „Nenner“ vorgestellt und die Bruchschreibweise als Division interpretiert (die Bedeutung der Operatoren beschrieben). In der Folge werden diese Stammbrüche auf Größen und Zahlen übertragen. Geldbeträge, Gewichte und Zeitspannen werden berechnet, Flächen gefärbt, Anzahlen festgelegt und Diagramme erstellt. Durch diese Handlungen können die Schüler, Vergleiche zwischen den Stammbrüchen und den Bruchzahlen durchführen und ihre Mächtigkeit feststellen. Danach werden die gleichwertigen Brüche besprochen, und die Schüler lernen, derartige Brüche zu bilden. Anhand von gleichnamigen Bruchzahlen werden die Addition und Subtraktion von Bruchzahlen vorgestellt. In Sachaufgaben werden die Schüler aufgefordert, Bruchteile von Dingen oder Zahlen in Brüche zu übersetzen.

Mit den Dezimalbrüchen wird der Übergang zum nächsten Thema, den Dezimalzahlen eingeleitet. Die Dezimalbrüche werden in drei Abstufungen behandelt. Zuerst die Zehntel, dann die Hundertstel und zuletzt die Tausendstel. Die Veranschaulichung dieser Brüche erfolgt am Meterstab, der dazu geeignet ist, da diese Unterteilungen darauf eingezeichnet sind. Für jeden Dezimalbruch wird die entsprechende Kommaschreibweise und Dezimalzahl vorgestellt. Mit diesen neuen Zahlen werden verschiedene Handlungen beschrieben: die Schüler messen Längen aus, berechnen Gewichte und Flächen und schreiben ihre Ergebnisse als Dezimalzahlen auf. Sie wandeln Dezimalbrüche in Dezimalzahlen um. Betont wird dabei die Stelle des Kommas und die Stellenwerte nach dem Komma. Um das Verständnis der Stellenwerte rechts vom Komma zu sichern, werden Dezimalbrüche analysiert, z. B.:

$^{706}\!/_{100} = 7 + {^{0}\!/_{10}} + {^{6}\!/_{100}}$ oder $7 + {^{6}\!/_{100}}$,

$^{35}\!/_{10} = 3 + {^{5}\!/_{10}}$, $^{8.062}\!/_{1000} = 8 + {^{0}\!/_{10}} + {^{6}\!/_{100}} + {^{2}\!/_{1000}}$ oder $8 + {^{62}\!/_{1000}}$

Das Lesen und Schreiben von Dezimalzahlen wird an einer Stellentafel geübt und die Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen kurz vorgestellt.

„Das Zahlenbuch“

Die Einführung in dem Millionenraum geschieht ganzheitlich. Als Demonstrationsmittel wird hierfür das Millionbuch angewendet. Dieses ist aus tausend Tausenderbüchern aufgebaut, wie das Tausenderbuch aus tausend Einern. Mit Hilfe des Millionbuches werden die Zahlen in diesem Raum strukturell erfasst. Zunächst wird die Struktur der ersten Seite erarbeitet, die Schüler belegen die hundert Teilquadrate der ersten Seite mit Tausenderbüchern. Jede Zahl wird in volle Tausender und angefangene Einer im nächsten Tausender zerlegt. Aus dieser Zerlegung wird auch die Sprechweise der Zahlen hergeleitet. Dieser Prozess wird bis zur Million weiter fortgeführt. Nach der Erarbeitung des Zahlenaufbaus des Zahlenraums bis zur Million wird nun mit Zahlen aus diesem Raum gearbeitet, indem sie der Größe nach geordnet oder zum Bestimmen von Anzahlen (Anzahl von Millimeterquadraten auf Millimeterpapier) genutzt werden. Nachdem die Schüler ihre Zahlvorstellung aufgebaut haben, führen sie Zerlegungen und Größenvergleiche von Zahlen, sowie Additionen und Subtraktionen durch. Zur Veranschaulichung wird stets das Millionbuch herangezogen. In der Folge werden weitere Darstellungsmittel zum Erfassen der Million eingeführt: die Stellentafel und die Zahlenreihe. Dabei geht es nicht nur um das bloße Darstellen einzelner Zahlen, sondern um Operationen zur Veränderung von Zahlen. An der Stellentafel werden Zahldarstellungen mittels Plättchen in Zahlen übersetzt und umgekehrt. Die Schüler nutzen die Kombinatorik, um aus vorgegebenen Ziffern verschiedene Zahlen zu bilden und setzen Zahlenfolgen und Muster fort. An der Zahlenreihe werden immer nur Abschnitte des Millionenstrahls dargestellt. Darauf zeigen die Schüler Zahlen, bestimmen deren Platz, zählen in Schritten und ergänzen fehlende Zahlen. Schließlich werden Zahlen in Sachzusammenhängen betrachtet und aus Zeitungsartikeln interpretiert.

Aus dem dritten Schuljahr kennen die Schüler bereits die Bruchgrößen ½, ¼ und ¾. Nun kommen Drittel, Fünftel, Sechstel, Achtel und Zehntel hinzu. Durch das Zerlegen eines Kreises in drei, fünf, sechs, acht und zehn gleiche Teile erfahren die Schüler die neuen Brüche. Um die Beziehungen der Brüche untereinander zu verdeutlichen, wird der Kreis aus verschiedenen Bruchteilen zusammengefügt. Danach werden diese Bruchzahlen auf die Größen Zeit, Länge und Gewichte übertragen.

In der vorigen Klasse haben die Schüler die Schnapszahlen gelernt. Zahlenmuster, die ihnen neu begegnen, sind die Anna- Zahlen (z. B. 6336, 7227, 5885, usw.), die EAN-Nummern und die römischen Zahlen. Neben der Auseinandersetzung mit Zahlen werden in diesem Schuljahr arithmetische Gesetzmäßigkeiten untersucht. Bekannte Übungsformate werden aufgegriffen und unter dem Aspekt „Zahlenmuster“ betrachtet. Zunächst wird gerechnet, und im Rückblick auf das gewonnene Zahlenmaterial werden Zahlenmuster entdeckt, beschrieben und begründet. Beim Ausrechnen großer Summen wird das geschickte Zusammenfassen von Summanden ausgenutzt, so dass prägnante Zwischensummen entstehen. Zahlenreihen werden nach bestimmten Regeln fortgesetzt (Fibonacci-Folgen) und dabei Beziehungen zwischen den Start- und Zielzahlen (operative Veränderung der Startzahlen) untersucht.

Nachdem in dieser Klasse der Millionenraum eingehend studiert wurde, bekommen die Kinder einen kleinen Ausblick auf den Zahlenraum, der sich über die Million hinaus erstreckt. Alle darauf folgenden großen Zahlen Milliarden, Billionen, Billiarden und Trillionen werden an einer Stellentafel platziert. Der Dreieraufbau M ZM HM / Md ZMd HMd / B ZB HB / Bd ZBd HBd / T soll den Aufbau des neuen Zahlenraums verdeutlichen und eine Verbindung zu der sich wiederholenden Tausenderstruktur verschaffen.

2.7.4.3.3 Die Rechenoperationen

„Meine Mathematik“
Wie in jeder Klasse wird bei den Rechenoperationen mit der Addition und Subtraktion begonnen. Diese zwei wurden in der vorigen Klasse analytisch behandelt: einzelne Fälle wurden unterschieden (mit und ohne Übertrag) und verschiedene Rechenstrategien vorgestellt. Neu in dieser Klasse ist, dass die Schüler nun mit vierstelligen und größeren Zahlen rechnen. Die Benennung der Faktoren der Addition und Subtraktion wird vorgestellt. Beim Rechnen werden zwei Rechenstrategien angewendet. Die erste ist das horizontale Rechnen „Stellenwerte extra“, die das Kopfrechnen trainieren soll. Die zweite ist die übliche senkrechte Kurzform. Auch hier wird mit Aufgaben ohne Übertrag angefangen, erst danach werden solche mit Übertrag behandelt.

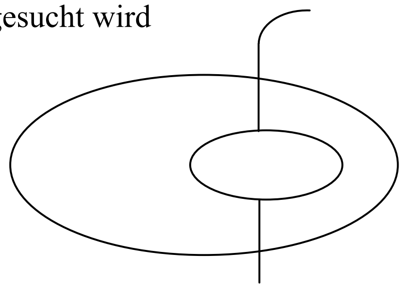
Gleichzeitig werden die Proben beider Operationen thematisiert, wobei bekannte Rechengesetze genutzt werden. Bei der Addition zweier Zahlen erfolgt die Probe durch Anwenden des Kommutativgesetzes und analog hierzu bei der Addition mehrerer Summanden durch

Anwendung des Assoziativgesetzes. Bei der Subtraktion werden zwei Rechenkontrollen zur Probe vorgestellt:

(1) Kontrolle über die Addition: Die Summe aus Subtrahend und Differenz muss den Minuenden ergeben.
(2) Kontrolle über die Subtraktion: Die Differenz aus Minuend und der als Lösung gefundenen Differenz muss den Subtrahenden ergeben.

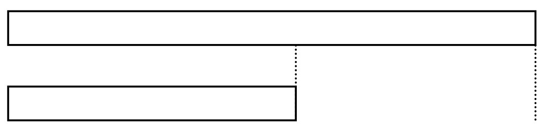
Um das Verständnis der Subtraktion zu stärken und ihre Anwendung in passenden Kontexten zu sichern, werden drei fundamentale Situationen vorgestellt. Es handelt sich um Sachsituationen, in denen erstens die Restmenge, zweitens die Differenz und drittens die Ergänzung berechnet werden. Ein passendes Schema wird dem Lehrerband der 4. Klasse entnommen.

a. Wenn der Rest gesucht wird



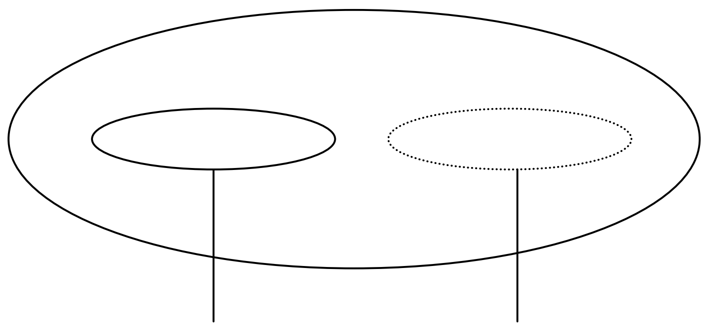
... - ... = ..?

b. Wenn der Unterschied gesucht wird



... - ... = ..?

c. Wenn die Ergänzung gesucht wird



... - ..? = ...

(aus „Meine Mathematik“, Lehrerband, 4. Klasse, S. 131)

Nach dem Erarbeiten der Addition und Subtraktion werden Sachaufgaben gelöst.

In dieser Klasse gewinnt das Sachrechnen die größte Bedeutung. Für die Lösung einer Aufgabe werden bestimmte Schritte eingehalten, die hier in Form eines Schrittmodells geschildert werden.

Verfahren des Problemlösens:

1. Die Schüler lesen den Text der Aufgabe.
2. Sie versuchen den Inhalt mit eigenen Worten wiederzugeben.
3. Sie listen die vorgegebenen (bekannten) und gefragten (unbekannten) Daten auf.
4. Es folgt die schematische Darstellung, die die logische Seite des Problems ausmacht.
5. In das Schema werden Zahlen und Operationen notiert, die arithmetische (quantitative) Struktur der Aufgabe. In dieser Phase überlegen die Schüler, wie sie zur Lösung kommen können, mit welchen Zahlen und wie sie operieren müssen.
6. Die Operationen werden durchgeführt.
7. Das Ergebnis wird aufgeschrieben und kontrolliert.

Außer dem Lösen einer Sachaufgabe lernen die Schüler, zu einer gegebenen Sachaufgabe die „inverse“ (wie sie im Lehrbuch benannt werden) Aufgabe oder Umkehraufgabe zu formulieren. Die Angaben zur Aufgabe werden so modifiziert, dass das ursprünglich Bekannte zum Unbekannten wird und von den übrigen Daten her berechnet werden soll. (Anfangs werden z. B. zwei Daten gegeben, aus diesen wird eine dritte berechnet. In der Folge wird die erste und dritte Größe als bekannt angenommen, nun soll die zweite Größe berechnet werden). Auf diese Weise werden alle, auch die vorgegebenen Daten in Frage gestellt und berechnet. Die Umstrukturierung der Angaben und die Formulierung einer inversen Aufgabe soll den Schülern Einsicht in die Struktur von Sachaufgaben und in den Weg zu ihrer Lösung vermitteln.

Fortgefahren wird mit der Multiplikation und der Division. Bei der Multiplikation findet eine kurze Wiederholung dessen statt, was in der dritten Klasse behandelt wurde: die Darstellung der Multiplikation als verkürzte Addition gleicher Summanden und der schriftliche Algorithmus der Multiplikation bei einstelligem und zweistelligem Multiplikator. Es werden sowohl das analytische als auch das kurze Verfahren in Erinnerung gerufen, Beispiele mit einstelligem Multiplikator für beide Verfahren wiederholt:

$\boxed{7 * 16}$

$$\begin{aligned} 7 * 16 &= 7 * (10 + 6) = (7 * 10) + (7 * 6) \\ &= 70 + 42 \\ &= 112 \end{aligned}$$

und kurz:

$\boxed{16 * 7}$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

$\boxed{142 * 6}$

$$\begin{array}{r} 142 \\ \times\ 6 \\ \hline 12 \\ 240 \\ +600 \\ \hline 852 \end{array}$$

(„Meine Mathematik“, 4. Klasse, Bd. 1, S. 102-103)

Beim zweistelligen Multiplikator wird nur das senkrechte Verfahren angewendet. Das analytische Verfahren wird im Alltag nicht benutzt. Das ist der Grund, weshalb in der Regel und in den nächsten Klassen die Multiplikation nur senkrecht durchgeführt wird. Es folgen zwei Beispiele zu diesen Verfahren:

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ \ 12 \\ \hline 14 \\ 40 \\ 70 \\ +\ 200 \\ \hline \mathbf{324} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 27 \\ \times\ \ 12 \\ \hline 54 \\ +27 \\ \hline \mathbf{324} \end{array}$$

(ebd., S. 105)

Die Benennung der Faktoren der Multiplikation, die Vorstellung der Probeverfahren, der Rechengesetze und ihre Anwendung beim Problemlösen bilden den neuen Stoff. Die erste Proberechnung wird aus dem Kommutativgesetz hergeleitet und mit dem Tausch der Faktoren der Multiplikation realisiert (statt 36 mal 28, wird 28 mal 36 gerechnet). Die zweite Proberechnung heißt „Kreuz“ (siehe S. 87) und wurde in der dritten Klasse vorgestellt. In der Folge werden die Rechengesetze für die Multiplikation behandelt: das Assoziativgesetz für die Multiplikation dreier oder mehrerer Faktoren und das Distributivgesetz für die Multiplikation einer Summe mit einer Zahl. In beiden Fällen soll der Einsatz von Rechenbäumen das Rechnen erleichtern.

Nun folgt die Division. Schon zu Beginn wird zwischen Aufteilen und Verteilen unterschieden. Die Schüler werden aufgefordert, diese Vorgänge in Beispielsituationen zu erkennen. Aus der vorigen Klasse wird die Division mit ein- und zweistelligem Divisor sowie die Proberechnung wiederholt. Vorgeführt werden die senkrechten Endformen. Anhand der Beispiele erlernen die Schüler die Benennung der Faktoren der Division. Als Hilfe für die Division lernen die Schüler, den Quotienten mit Überschlag zu berechnen. Es folgt das Distributivgesetz für die Division einer Summe oder einer Differenz durch eine Zahl. In Sachaufgaben lernen die Schüler zu unterscheiden, ob es sich um Aufteilen oder Verteilen handelt. Auch hier folgt die Umstrukturierung der Aufgaben und der Tausch der bekannten und unbekannten Daten. So entsteht aus einer Aufteilungsaufgabe eine Verteilungsaufgabe und umgekehrt:

Aus der Aufteilungsaufgabe „Ein Handwerker arbeitete 25 Tage und erhielt 180.000 Drachmen. Wie hoch war sein Tagelohn?“ wird folgende Verteilungsaufgabe gebildet: „Der Tageslohn eines Handwerkers beträgt 7. 200 Drachmen. In wie vielen Tagen verdient er 180.000 Drachmen?“ („Meine Mathematik“, 4. Klasse, Bd. 2, S. 40).

Das Formulieren einer inversen Aufgabe führt auch von einer Divisionsaufgabe zu einer Multiplikationsaufgabe und umgekehrt, z. B.: von der Divisionsaufgabe „Die Schüler der Klasse kauften Lexika für 72.500 Drachmen ein. Der Einzelpreis beträgt 2.5000 Drachmen. Wie viele Lexika haben sie gekauft?“ ergibt sich die Multiplikationsaufgabe „Die Schüler kauften 24 Lexika zum Einzelpreis von 2.500 Drachmen ein. Wieviel haben sie insgesamt bezahlt?“

In der Folge werden die Methoden der schnellen Multiplikation und Division mit Zehnerzahlen vorgestellt. Das Kapitel der Rechenoperationen schließt mit Sachaufgaben an, die alle Operationen beinhalten.

„Das Zahlenbuch“
Für die Operationen Addition und Subtraktion wird in diesem Schuljahr nicht viel Zeit investiert, da diese in den vorigen Klassen eingehend geübt wurden. Die Schüler führen Rundungen auf glatte Tausenderzahlen durch, ohne dass für das Auf- und Abrunden eine Regel festgeschrieben wird. Sie sollen erkennen, dass mit diesen glatten Zahlen genauso gerechnet werden kann, wie mit Hunderterzahlen. Das einzige, was sich verändert, ist die Bezeichnung der Einheit. Anschließend lösen die Kinder mit diesen Zahlen Additions- und Subtraktionsaufgaben halbschriftlich. Weiter werden die schriftliche Addition und Subtraktion thematisiert. Die Zahlen werden untereinander geschrieben und es wird gerechnet, sowie Rechenketten gelöst.

Das Einmaleins und das Zehner-Einmaleins sind den Schülern schon aus den vorigen Schuljahren bekannt. Beide werden wieder aufgegriffen und erweitert. Ausgegangen wird von einer Einmaleinsaufgabe. In der Folge wird einer oder beide Faktoren mit der Zehn fortschreitend multipliziert. So entstehen verwandte Aufgaben z. B.

3•4, 30•40, 300•400,
3•4, 30•4, 300•4,
3•4, 3•40, 3•400 usw.

Die Multiplikation am Malkreuz wird im erweiterten Zahlenraum wiederholt. Nach der halbschriftlichen Multiplikation wird die halbschriftliche Division vertieft. Hierbei wird das Halbieren gefestigt. Analogien von Hundertern und Tausendern werden genutzt und die Lösung schwieriger Aufgaben wird aus leichten hergeleitet.

> „Nicht nur 6030:6 lässt sich aus der leichten Aufgabe 6000:6 ableiten, sondern auch 5970:6. Mögliche Argumentation: 5970 ist um 5•6=30 kleiner als 6000, also 5970:6 = 1000-5 = 995“. (Wittmann & Müller, 1997b, S. 116).

Bei beiden halbschriftlichen Verfahren werden Nebenrechnungen zur Hilfe geschrieben. Bei der Multiplikation gehen die Aufgaben nur selten über den Zehntausender hinaus, bei der Division bleiben sie unterhalb des Zehntausenders.

Nach dem Malkreuz wird zu einer mittelalterlicher Methode, den „Malstreifen“ übergegangen, die mit den halbschriftlichen Strategien als Grundlage für die schriftliche Multiplikation dienen sollen. Das Verfahren der Multiplikation mit den Malstreifen weist viele Ähnlichkeiten mit dem Malkreuz auf. Hier ergeben sich die Stellenwerte automatisch und die nachfolgenden Additionen sind durch vorgegebene diagonale Streifen festgelegt. Diese Methode lässt sich mühelos zu dem schriftlichen Multiplikationsverfahren verkürzen. An dieser Stelle wird der Algorithmus der schriftlichen Multiplikation eingeführt.

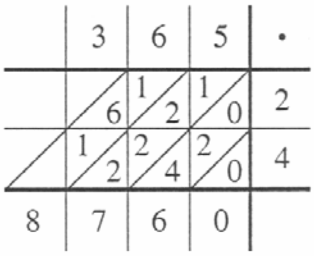
> „Bei der schriftlichen Multiplikation werden Zeile für Zeile stellengerecht (beginnend beim größten Stellenwert des Multiplikators) die Teilprodukte berechnet, wobei eventuelle Überträge im Kopf behalten und in der nächsten Stelle zugerechnet werden müssen. Nach dem Bilden der Teilprodukte wird das Ergebnis durch Addition bestimmt“ (Wittmann & Müller, 1997b, S . 127).

Zum besseren Verständnis werden alle drei Verfahren an der selben Aufgabe demonstriert: Vergleich der Verfahren an der Aufgabe 365•24:

Malkreuz:

•	300	60	5	
20	6000	1200	100	7300
4	1200	240	20	1460
				8760

Malstreifen:



Schriftlich:

365 · 24
730
1460
8760

(Wittmann & Müller, ebd., S. 13)

Die schriftliche Multiplikation wird in der Folge in sachstrukturierten Kontexten geübt. Im selben Kontext werden Kommazahlen und ihre Multiplikation mit 10 und 100 behandelt. Schließlich wird der Zweisatz und die Schlussrechnung vom Einzelpreis auf den Gesamtpreis hin durch Multiplikation vorgestellt. Dafür werden auch Rechenbäume eingesetzt und Überschlagsrechnungen durchgeführt.

Die schriftliche Division wird durch das veranschaulichte Verteilen vorbereitet. Geldbeträge werden mit Rechengeld gelegt und genau verteilt. Dabei werden die Reste notiert. Diese Division führt unmittelbar zur schriftlichen Division. Direkt nach der Einführung der schriftlichen Division werden die Fälle mit den Nullen behandelt und geübt. Danach wird das Verfahren auf die Division mit Rest erweitert. Das Verfahren wird bei den Größen auf Kommazahlen übertragen. Überschlag und Probe dienen als Verfahren zur Selbstkontrolle. In Analogie zu der schriftlichen Division durch einstellige Zahlen wird die Division durch Zehnerzahlen eingeführt. Die Kinder erkennen, dass sie statt des kleinen Einmaleins nur das Zehner-Einmaleins anwenden müssen, dass aber der Algorithmus der gleiche ist.

Am Ende des Schuljahrs wird der Taschenrechner eingesetzt. Zunächst werden die Schüler mit diesem Medium vertraut gemacht, und die Funktionen der Tasten werden geklärt. Danach sind die Schüler bereit, es beim Rechnen anzuwenden. Angefangen wird mit sehr leichten Aufgaben bezogen auf alle Operationen. In der Folge werden Aufgaben aus verschiedenen Sachkontexten und Rechenketten (Gesamtpreise und Summen) mit Hilfe des Taschenrechners gelöst.

Nach der Einführung der schriftlichen Multiplikation und bis ans Ende des Schuljahrs werden den Schülern Sachaufgaben angeboten. In verschiedenen Sachkontexten werden mathematische Probleme durch Überlegen und Ausprobieren gelöst. Die Schüler werden mit Sachwissen aus verschiedenen Kontexten konfrontiert: aus dem Tierreich, der Landwirtschaft, dem Handel, Verkehrswesen, Bauwesen und Erfindungen. Die Schüler entnehmen Informationen aus Plänen und Preisschildern, lesen Tabellen und Diagramme ab und erstellen selber welche, berechnen Preisunterschiede und Ratenzahlungen. Sie berechnen Zeitspannen, ordnen Daten in einer Zeitleiste und werten diese aus. Dabei werden Gleichungen, Ungleichungen und Pfeildiagramme gelöst. Die Fragestellung regt dazu an, verschiedene Möglichkeiten zu entwickeln und zu erproben. Statt der Fixierung auf das Lösungsschema Frage-Rechnung-Antwort, sollen die Schüler verstehen, dass verschiedene Lösungsstrategien zur richtigen Antwort führen können und zum kreativen Denken ermuntert werden. Denkaufgaben werden durch systematisches Probieren gelöst und verschiedene Lösungsstrategien werden beim Lösen von Sachaufgaben erarbeitet.

2.8 Kritik an den Richtlinien und Lehrbüchern

Im Folgenden wird die Kritik vorgestellt, die die Lehrergemeinschaft an den Richtlinien und den Lehrbüchern formuliert hat. Als positive Komponente der neuen Kompendien wurden folgende Elemente anerkannt:

- das wissenschaftliche Fundament der Lehrwerke,
- die Anordnung der Lehrinhalte nach dem Spiralprinzip,
- das Ableiten vom Konkreten zum Abstrakten,
- die aktive Teilnahme der Schüler am Unterrichtsgeschehen.

Weniger Resonanz fanden hingegen:

- die stark am Klassenzimmer beschränkte Schülerarbeit,
- die Einzelarbeit, als die häufigste anzutreffende Interaktionsform,
- die Diskrepanz zwischen Lehrstoffquantität und Unterrichtszeit
- die zu analytische und dadurch verwirrende Behandlung bestimmter Lehrstoffeinheiten, wie z.B. die der Rechenoperationen.

Zusammenfassend äußert Troulis (1992, S. 100):

> „Im Ganzen, ohne dass sie [die Lehrbücher] einwandfrei sind, leisten diese einen positiven Beitrag zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in Griechenland".

Denkt man an die Situation des Mathematikunterrichts vor 1980 zurück (siehe dazu Kap. 2.2), dann kann man dieser Aussage nur zustimmen. Zu diesen neuen Kompendien wurde auch in einer internationalen Fachtagung in Athen Stellung genommen. Sie wurden als der bedeutendste Schritt in der Entwicklung der Bildungsangelegenheiten des Landes in Vergleich zu anderen Reformversuchen der Vergangenheit beurteilt (vgl. Trilianos, 1995, S. 307). Die Vor- und Nachteile der Lehrwerke wurden in Hinblick auf die oben erwähnten Punkten diskutiert. Ein Defizit, dass zusätzlich angeführt wurde, waren vage Formulierungen einiger Lernziele wie „schätzen" und „verstehen" und die daraus resultierende Schwierigkeit der Evaluation (vgl. ebd., S. 309). Auf dieser Fachtagung gelangte man zu folgendem Fazit:

> „Auf jeden Fall ist eine Revision der bestehenden Richtlinien und Lehrbüchern von Nöten, da sie in vielen Punkten fehlerbehaftet oder überholt sind" (vgl. Tsiplitaris, 1995, S. 248).

Zu diesem Schluss kamen die meisten KritikerInen. Man war sich einig, dass die Lehrbuchreihe „Meine Mathematik" zum Zeitpunkt ihres Erscheinens für die bisherigen Standards und die damaligen Verhältnisse innovativ und modern war. Seitdem sind zwei Jahrzehnte vergangen. In der Folgezeit wurden die Lehrbücher in der Praxis angewendet, wobei ihre Mängel festgestellt und festgehalten wurden. Betont wird nun vom Lehrerkollegium die Notwendigkeit der Verfassung von neuen Büchern, die den heutigen wissenschaftlichen Erkenntnissen Rechnung tragen. Dieser Meinung schließt sich das Pädagogische Institut an und plant die Entwicklung neuer Lehrbücher. Diese sollten unter anderem in größerem Maße schülerzentrierten Charakter aufweisen, auf Mitwirken des Schülers insistieren, die individuelle Lernrhythmen berücksichtigen und eine Stärkung der Schülerinitiative, sowie das Fördern des kritischen Denkens ermöglichen (vgl. Karageorgos, 1996a, S. 264ff.).

In Bezug auf dieses Vorhaben erweist sich das deutsche Lehrwerk „Das Zahlenbuch“ als eine interessante und innovative Alternative. Auf jeden Fall wird das griechische Mathematikbuch bis heute seiner Aufgabe gerecht, vorausgesetzt die Lehrer erkennen die Prinzipien der Bücher und nehmen keine persönliche Selektionen bezüglich der Vorgaben vor. Oft werden z.B. von den Lehrenden die einführenden Aktivitäten des Unterrichts zugunsten einer längeren Übungszeit ausgelassen oder stark reduziert. Die Auswirkungen dieser „Unterrichtsökonomie“ sind fatal, wie das folgende Zitat belegt:

> „Operationen an konkretem Material und an zeichnerischen Darstellungen bilden für Wissenselemente, Fertigkeiten und höhere Denkprozesse die natürliche Verständnisgrundlage“ (Wittmann, 1992, S. 181).

Da die Symbolsprache nichts anderes als die kürzere Beschreibung der anschaulichen Operationen ist, haben die Schüler in der Folge nicht die nötigen Voraussetzungen, um dem Unterricht zu folgen. Sie werden der einführenden Handlungen, die die Verständnisgrundlage bilden, beraubt und somit wird der Weg zu den kognitiven Operationen und der Vorstellungskraft versperrt. Dies ist jedoch kein Defizit der Bücher, sondern der Lehrmethodik. Unbeachtet dessen, welche Neuentwicklungen realisiert werden, gehören Handlungen ebenso zum Mathematikunterricht wie die Zahlen selbst.

An einigen Stellen wurde jedoch zu Recht Kritik erhoben. Das Lehrbuch „Meine Mathematik“ präsentiert den Lehrstoff nach dem Prinzip der Isolierung der Schwierigkeiten, bzw. mit einer progressiven Erhöhung der Schwierigkeitsmerkmale und nach traditionellem kleinschrittigen Vorgehen. Für die komplexeren Einheiten wird stets eine vorbereitende Unterrichtsstunde vorgeschaltet. Die Zahlenräume werden schrittweise erweitert (der Zwanzigerraum wird zunächst auf den Dreißiger-, dann auf den Vierzigerraum usw. ausgedehnt). Ähnlich wird auch bei der Behandlung der Rechenoperationen vorgegangen. Bei jeder Operation werden mehrere Fälle unterschieden, die in der Komplexität zunehmen (zuerst wird ohne Zehnerüberschreitung bzw. -unterschreitung und Übertrag, danach mit Überschreitung bzw. Unterschreitung und Übertrag gerechnet), wobei verschiedene Rechenstrategien vorgestellt werden. Nach diesem Muster werden alle Grundrechenarten erarbeitet. Diese Unterteilung macht die Bücher sehr analytisch und detailliert, was zusätzliche Gefahren mit sich bringt.

> „Das kleinschrittige Vorgehen birgt die Gefahr, dass zum einen der übergeordnete Zusammenhang aus dem Blick gerät und potenzielle Anwendungssituationen für die so erworbenen –Kenntnisse und Fertigkeiten nicht als solche erkannt werden“ (Krauthausen, 1998, S. 35).

> „Die Aufsplittung in kleinste Schritte kann die Einsicht in erforderliche Zusammenhänge verhindern,...“ (Scherer, 1994, S. 325).

Dadurch wird das Verständnis der Schüler nicht wie geplant erleichtert. Ihre Konzentration lässt nach, sie verlieren den Überblick, können schwer Transferleistungen erbringen und können ihr Wissen nicht systematisieren.

Man könnte jedoch auch, wenn das Lehrbuch „Meine Mathematik“ verwendet wird, Veränderungen vornehmen, so dass das Lehren und auch das Lernen effizienter, leichter und ökonomischer gestaltet wird. Dafür böten sich Impulse aus dem „Zahlenbuch“ an, das einen leichteren und gleichzeitig kindgerechten Ein-, Durch- und Überblick in die mathematische Welt erlaubt.

Im Gegensatz zum kleinschrittigen wird im „Zahlenbuch“ das **ganzheitliche** Vorgehen angewandt. Schon bei der Einführung einer Thematik wird der Versuch unternommen, die Schüler über die bestehenden Strukturen und allgemeinen Techniken des Inhaltes zu informieren, so dass ein systematisches Fortfahren ermöglicht wird. Begonnen wird mit den wesentlichen Fällen, aus denen sich die Behandlung der leichteren Fällen ableiten lässt. Das erspart Zeit und Energie. So könnte man z.B. im Bereich der Rechenoperationen die leichten Fälle des Operierens ohne Überschreitung und Übertrag zusammenfassen oder auslassen, um sich länger mit den schwierigeren Fällen zu befassen. Dadurch würde den Schülern mehr Übungszeit zur Verfügung stehen. Die ganzheitliche Betrachtung eines Themas bietet die Möglichkeit, Beziehungen zu entdecken und auszunutzen.

> „Das heißt, erst die Komplexität eröffnet den Kindern ein tieferes Verständnis der zu lernenden Thematik“ (Scherer, 1999, S. 7).

Und dies ist besonders bei Kindern mit Lernschwierigkeiten das eigentliche Ziel. Als Beispiel sei hier die Mengenlehre aufgeführt, die zwar eine gute Vorbereitung auf die arithmetischen Einheiten bietet, aber durch die Bearbeitung dieses Kapitels erfolgt die Beschäftigung mit der Zahlentheorie weitaus später. Es ist ohne weiteres möglich, die Mengenlehre auf das Wesentliche zu reduzieren, um dadurch gezielter mit der Arithmetik zu beginnen.

Als Einstieg in den Mathematikunterricht und auch zu Beginn jeder großen und neuen Themeneinheit wäre es durchaus sinnvoll, das **Vorwissen** der Schüler zu ermitteln. So ist der Lehrer in der Lage die Vorkenntnisse seiner Schüler festzustellen und diese entsprechend zu nutzen, bzw. an diese die neuen Wissenselemente anzuschließen. Dieses didaktische Vorgehen ist ein Grundbaustein des „Zahlenbuches“. Die „Standortbestimmung“ erlaubt dem Lehrer bekannte Elemente vor der Behandlung einer Thematik zu erfragen (vgl. Scherer, 1994, S. 322). Gleichzeitig wird den Schülern die Gelegenheit gegeben, ihr Wissen in den Unterricht einzubringen, was letztlich zur Motivationssteigerung, zu einem positiven Verhältnis zur Mathematik und zum selbstbewussten Umgang mit derselben führt. Dadurch lässt sich der Unterricht so gestalten, dass die Unterrichtsplanung da anfängt, wo die Schüler einen „gemeinsamen Nenner“ haben und dass die innere Differenzierung natürlich und gezielt durchgeführt werden kann.

Für die Darstellung der Zahlen werden in „Meine Mathematik“ unterschiedliche **Arbeitsmittel** benutzt. In der ersten und zweiten Klasse sind es Plättchen und Steckwürfel, in der dritten und vierten Klasse Stäbchen und Streichhölzer. Auch im weiteren Verlauf des Lehrwerks werden dieselben Materialien benutzt. Dadurch dass diese von ihrer äußeren Gestalt so unterschiedlich sind, erlauben sie nicht, Strukturen und Beziehungen zwischen den Zahlen klar zu erkennen und somit Transferleistungen zwischen den verschiedenen Zahlenräumen durchzuführen. Um den Schülern das Gefühl zu geben, dass sie vorangekommen sind, wurden die Schülerbücher in zwei Bände gefasst. Diese Entwicklung wird für den Schüler im „Zahlenbuch“ anders spürbar, nämlich durch die Benutzung von strukturierten Arbeitsmitteln, die von Jahrgang zu Jahrgang erweitert werden.

> „Z. B. wird die Idee „Zahlreihe“ im 2. Schuljahr durch die „Zwanzigerreihe“ verkörpert, die sich in den folgenden Schuljahren zur „Hunderterreihe“, zum „Tausenderstrahl“ und schließlich zum „Zahlenstrahl“ erweitert. Entsprechend ist die

> Idee „Zehnersystem“ im 2. Schuljahr durch das „Zwanzigerfeld“, im zweiten durch die „Hundertertafel“, im dritten und vierten Schuljahr durch das „Tausenderbuch“, das „Millionbuch“ und die Stellentafel realisiert“ (Wittmann & Müller, 1994b, S. 6).

Somit ist den Schülern das Arbeiten mit den Materialien von der ersten Klasse aus schon bekannt, so dass keine neue Aneignungsphase vonnöten ist. Dabei handelt es sich auch um Arbeitsmittel, die die mathematischen Strukturen möglichst klar widerspiegeln. Dadurch kommt die innere Kontinuität des Faches zum Ausdruck, die durchgehend ausgeweitet wird.

Das **Verständnis der Grundrechenarten** wird in „Meine Mathematik“ durch eine Verbindung zur Mengenlehre angestrebt. So wird z. B. die Addition mit der Vereinigung von Mengen, die Subtraktion mit der Entfernung von Mengen eingeführt. Im „Zahlenbuch“ werden dagegen Alltagssituationen abgebildet, in denen sich die entsprechende Operation wiedererkennen lässt. Die Themen werden so lebensbezogener behandelt, das Verständnis wird aus den Erfahrungen der Schüler abgeleitet.

Für das Erarbeiten grundlegender Kapitel wie das Einspluseins und das Einmaleins werden im „Zahlenbuch“ **Strategien** vorgestellt und **Hilfen** dargeboten (die Kraft der Fünf, die Einspluseins-Tafel, die Kernaufgaben und die Einmaleins-Tafel), die es den Schülern ermöglichen, diese Kenntnisse mit weniger Mühe und Zeitaufwand zu erwerben. Diese Strategien machen Zusammenhänge deutlich und nutzen die Strukturen der Zahlen aus. Dadurch kann der Schüler seine Kenntnisse jeder Zeit selber aufarbeiten und überprüfen.

Für die Vertiefung des Zahlenverständnisses werden im „Zahlenbuch“ verschiedene **Aufgabenformate** benutzt, wie z. B. die Zahlenmauern, die Zahlenhäuser, die Rechendreiecke und die Zauberquadrate. Diese beruhen nicht nur auf einer mathematischen Struktur, sondern sind auch besonders für Kinder geeignet, da sie Entdeckungen und Erkundungen erlauben, Überraschungen beinhalten und somit die spielerische Ader der Kinder geschickt ausnutzen.

Zwischen den rein mathematischen Inhalten sind auch Einheiten eingefügt, die die natürliche Kreativität der Schüler ansprechen. Im Rahmen der praktischen Geometrie werden verschiedene Knoten und Formen konstruiert und Muster fortgesetzt. Unterschiedliche Aktivitäten werden unter einem Sachthema zusammengefasst. Dabei werden nicht nur Informationen zum Thema vermittelt, sondern auch Bezüge zum Sach- und Kunstunterricht hergestellt, wobei gleichzeitig die mathematischen Aspekte bearbeitet werden. Zur Anregung des entdeckenden Lernens stehen Denkspiele zur Verfügung, die etwas Rätselhaftes beinhalten. Infolgedessen gewinnt der Unterricht einen **fächerübergreifenden** Charakter, der die Schüler von den starren mathematischen Inhalten ablenkt und somit entspannt.

Das **Sachrechnen** folgt in „Meine Mathematik“ einem starren und steifen „Frage-Rechnung-Antwort-Modell“. Das heißt, die Fragen zu den verschiedenen Aufgaben werden immer von den Autoren formuliert. Auf diese Weise bekommen die Schüler nie die Chance, sich an der Gestaltung der Aufgaben zu beteiligen, sie werden nicht angeregt, sich Gedanken über die Bedingungen der Aufgaben, das Erkennen der Zusammenhänge und die möglichen Problemstellungen zu machen und ihnen bleibt wenig Raum für kreative und entwerfende Vorgänge. Das **Formulieren der Fragestellungen** von den Schülern würde diese Möglichkeiten eröffnen und das allgemeine Denken der Schüler fördern.

Die **Lernzielkontrollen** (siehe dazu Kap. 2.3.4) sollten für alle Klassen getrennt von den Schülerbüchern als Handreichungen für die Lehrer zur Verfügung gestellt werden. Des Weiteren wäre es auch sinnvoll, diese alle fünf Jahre neu herauszugeben. Dies könnte das Kultusministerium den Schulräten des jeweiligen Kreises übertragen, die dann selbstständig Lernzielkontrollen erstellen. In daraufhin stattfindenden Fortbildungsseminaren könnten die Lehrer das notwendige Wissen erwerben, um diese zweckmäßig einsetzten zu können.

Die meisten Vorschläge in diesem Kapitel greifen die Ideen des Projektes „mathe 2000" und das in Anlehnung daran erschienene „Zahlenbuch" auf. Dieses Lehrwerk enthält viele wegweisende didaktische Innovationen. Besonderes Gewicht gewinnen die Beziehungen der Zahlen und deren Vertiefung. Hervorgehoben wird die fachliche Substanz und die Schüler werden von Randwissen und unnötigen Behalteleistungen entlastet. Nachdem die Schüler grundlegende Erfahrungen zur Konstruktion von Wissen gemacht haben, werden sie in der Lage sein, ihre Kenntnisse zu rekonstruieren (vgl. Krauthausen, 1994, S. 20). Dadurch werden sie zum selbstständigem Lernen angeregt.

Dies sind jedoch Vorschläge, die wie richtig von Krauthausen (1998, S. 34) erkannt, ein Umdenken und ein Aufgeben langer verinnerlichter Gewohnheiten erfordern. Wenn man aber den Mathematikunterricht im Interesse der Schüler gestalten möchte, dann sollte man ihnen jede Hilfe und gedankliche Stütze anbieten, um ihnen die wahre Natur der Mathematik zu enthüllen, die mit den bisherigen Kompendien verschlossen bleibt: die Harmonie und Attraktivität der Zahlen. Auf jeden Fall sollten die Verfasser der neuen Mathematikbüchern berücksichtigen, dass die Zeit reif ist, für neue Konzepte und ein neues Verständnis der Mathematik; unsere Schüler sind es schon seit langem.

In diesem Kapitel wurden die Bereiche des „Zahlenbuches" dargestellt, von denen die Verfasserin überzeugt ist, dass sie mit der Lebens- und Lernsituation der griechischen Schüler kompatibel sind. Zwar enthält das „Zahlenbuch" weitere interessante Innovationen, die jedoch zu diesem Zeitpunkt in Griechenland nur den Status von Denkanstößen erreichen können.

3 Festlegung der Forschungsmethodik und Durchführung der Untersuchung

3.1 Zum Forschungsstand in Hinblick auf den Mathematikunterricht in Griechenland

Im griechischen Raum wurden Untersuchungen bezogen auf die Leistungen der Schüler in der Mathematik erst in den zwei letzten Jahrzehnten durchgeführt. In diesem Zeitraum wurden auch die heutigen mathematischen Lehrwerke verfasst, die den internationalen mathematikdidaktischen Erkenntnissen und Ansätzen folgten.

Die wenigen Untersuchungen beziehen sich auf unterschiedliche Themeneinheiten des Mathematikunterrichts: auf das Kapitel der Bruchzahlen (vgl. Gagatsis & Kafidas, 1995 als auch Fasatakis, 1991, S. 117-123), auf das Zahlenverständnis von Erstklässlern (vgl. Boufi, 1995), auf Schülerfehler in der Mathematik und ihre Rolle in der Ausbildung der Primarstufenlehrer (Kafousi, 1994), auf die mathematischen Kenntnisse der Schüler der 1. und 2. Klasse (vgl. Kafousi & Nziachristos 1997a; 1997b) und schließlich auf die Rechenoperationen. Da die Rechenoperationen mit ganzen Zahlen auch in der vorliegenden Arbeit thematisiert werden, sollen die bereits durchgeführten Untersuchungen und ihre Ergebnisse kurz angesprochen werden.

1989 führte *Potari* eine Untersuchung mit Schülern der 6. Klasse durch. Inhalt der Untersuchung waren die Rechenoperationen mit ganzen, Bruch- und Kommazahlen. Bei den Rechenoperationen mit ganzen Zahlen wurden folgende Fehlerarten festgestellt:

Fehler mit den Behalteziffern, nicht stellengerechtes Schreiben von Ziffern, Subtraktion der kleineren von größeren Zahlen, falsches Operieren mit der Null in der Multiplikation (in der Form $x * 0 = x$) und fehlende Null(en) im Quotienten, wenn der Divisor kleiner als der (Teil)dividend war. Im Sachrechnen hatten die Schüler Schwierigkeiten beim Inbeziehungsetzen der Angaben zu den Fragen und beim Berechnen der Aufgaben. Das Lösen von Problemen des Alltags mittels arithmetischer Kenntnisse bereitete ihnen ebenfalls Schwierigkeiten. Die Untersuchung basierte auf der Analyse schriftlicher Schülerleistungen. Bei der Fehleranalyse wurde keine Unterscheidung zwischen systematischen und zufälligen Fehlern getroffen.

Chatzigeorgiou (1990) analysierte die Fehlerarten in der Addition und Subtraktion dreistelliger Zahlen. Seine Untersuchung umfasste 259 Schüler des 4. und 5. Schuljahrs. Neben den Tests wurden auch Interviews durchgeführt. Der Versuch, die Fehler zu beschreiben, führte zu einer Kategorisierung der Fehler. In der Addition wurden folgende Fehlermuster erkannt:

- Fehler in den Behalteziffern
- Fehler in den Grundaufgaben der Addition
- Durchführung einer anderen Operation
- Addieren von mehrstelligen Zahlen als wären die Stellenwerte unabhängig voneinander
- Kombination der oben genannten Fehlerarten

In der Subtraktion ergaben sich diese Fehlermuster:

- Fehler beim Borgen

- Subtrahieren der kleineren von der größeren Ziffer, unabgesehen von der Rechenrichtung
- Addieren statt Subtrahieren
- Fehler mit der Null (wenn sich die Null im Minuenden befindet)
- Fehler in den Grundaufgaben der Subtraktion
- Kombination der bereits erwähnten Fehlerarten

Troulis (1991) untersuchte die Null als Fehlerquelle in den vier Rechenoperationen mit ganzen Zahlen, Bruch- und Kommazahlen. Seine Untersuchung führte er mit 304 Schülern der 6. Klasse durch. Hier interessieren die Ergebnisse seiner Untersuchung bezogen auf die ganzen Zahlen. Troulis zeigte „Symptome" (seine Benennung für Schülerfehler) auf, nahm jedoch keine Interpretation der Fehlertypen vor, da hierzu klinische Interviews mit den Kindern nötig wären. Er berechnete die Erfolgsquoten der Schüler in den vier Grundrechenarten. Alle Testaufgaben beinhalteten das Arbeiten mit der Null. Die höchsten Erfolgsquoten (96,35 %) zeigten die Schüler beim Operieren mit der Null in den Additions- und den Subtraktionsaufgaben (84,28 %), weniger erfolgreich waren sie dagegen in den Multiplikations- (54,7 %) und in den Divisionsaufgaben (51, 0 %). Beim Multiplizieren von Zahlen mit der Null ließen die Schüler dieselben Zahlen unverändert bestehen. In den Divisionen bereitete ihnen die Null im Quotienten oder im Rest Schwierigkeiten. Die Schüler konnten die Beziehungen der Dividendenziffern zu den Quotientenziffern nicht erkennen.

In jüngster Zeit beschrieb Agaliotis (1997) die Lernschwierigkeiten in der Arithmetik von Schülern der Sonderklassen und die Haltungen der Lehrer. Er untersuchte die Leistungen der Schüler in drei mathematischen Bereichen: in pränumerischen Begrifflichkeiten (Klassifikationen, Aufreihungen, Erhalt der Zahl, Abzählen, Zahlenvergleiche und Stellenwertverständnis), in den vier Grundrechenarten und im Sachrechnen und zwar in den drei Brunerschen Modi: enaktiv, ikonisch und symbolisch. Er untersuchte 324 Schüler aus den Schuljahren 1 bis 6 und wendete hierzu ausschließlich die klinische Methode an. Bezogen auf die Grundrechenarten kam er zu nachfolgenden Schlussfolgerungen: Die Schüler der Sonderklassen hatten erhebliche Schwierigkeiten in der Durchführung von Rechenoperationen bereits auf der enaktiven und ikonischen Ebene, also mit konkretem Material und bildlichen Darstellungen. Auf der symbolischen Ebene brachten sie die Rechenzeichen und die Zahlensymbole durcheinander, bzw. konnten diese nicht erkennen. Die Orientierung im Raum und das vertikale Schreiben der Zahlen für das schriftliche Rechnen verursachte Irritationen. Grundlegende Vorkenntnisse, wie das Rechnen im Zwanzigerraum beherrschten die Schüler nicht. Folglich konnten sie kritische Aufgabenmerkmale oder Sonderfälle (wie z. B. dividieren durch 1, 10, 100) nicht bewältigen. In dem Versuch ihre Unzulänglichkeiten zu überwinden, konstruierten sie eigene Regeln und begangen systematische Fehler. Die systematischen Fehler, die Agaliotis in der Division gefunden hat, waren folgende:

- Unkenntnis des Algorithmus der Division
- Fehler in den vorauszusetzenden Fertigkeiten (Subtrahieren und Multiplizieren, Schreiben der Teilprodukte an richtiger Stelle, Einmaleinsaufgaben)
- Fehler im algorithmischen Verfahren
- Fehler mit der Null, wenn im Quotienten eine Null auftritt

Die meisten Untersuchungen haben sich demnach mit mehreren mathematischen Teilbereichen befasst und versucht, die Bandbreite der Phänomene zu erforschen. Eine eng umrissene, spezifische und vertiefende Untersuchung zur schwierigsten Rechenoperation, der Division, die ja alle anderen Rechenoperationen beinhaltet, liegt in Griechenland bisher nicht vor. Aus diesem Grunde wäre der Einsatz qualitativer und quantitativer Methoden zur Erforschung dieser Thematik sehr hilfreich.

3.2 Zum Verhältnis zwischen qualitativer und quantitativer Forschung in Deutschland

In den Erziehungswissenschaften wurde der quantitative Ansatz durch Wiederaufnahme alter Traditionen aus der Jahrhundertwende und der Rezeption amerikanischer Auffassungen nach der sog. realistischen Wende Heinrich Roths in Deutschland ausgebaut. Aus der Kritik am quantitativen Paradigma und unter Einbezug bereits vorliegender Ansätze entstand der qualitative Ansatz (Saldern, 1992, S. 378). Zu Beginn der 70er Jahre fand eine intensive Methodendebatte statt, über den Einsatz von qualitativen und quantitativen Methoden und ferner über die Konstruktion sozialer Wirklichkeit sowie die Reichweite von Erhebungs- und Analyseverfahren. Die beiden Paradigmen wurden als einander ausschließende Forschungsmethodologien verstanden und das Verhältnis zwischen ihnen wurde auf die Gegenüberstellung von quantitativen versus qualitativen Methoden verkürzt (vgl. Engler, 1997, S. 124). Dies hatte zur Folge, dass sich in der empirischen Sozialforschung in der Bundesrepublik Deutschland „quantitative und qualitative Forschung in einem hohen Grad getrennt voneinander entwickelt haben“ (Hopf & Müller, 1994, zitiert nach Engler, ebd.). Nachdem die Diskussionen über den Einsatz qualitativer oder quantitativer Methoden an Intensität verloren haben, ist in letzter Zeit ein neuer Trend wahrzunehmen. Von vielen Autoren wird die Verknüpfung bzw. Kombination quantitativer und qualitativer Verfahren befürwortet. Man spricht in diesem Zusammenhang von Methodenmix, Methodenvielfalt, Methodenkombination, Triangulation, usw.. Begründet wird dieser Trend durch die Vorzüge der Kombination von qualitativen und quantitativen Methoden: Erkenntnisgewinn, gegenseitige Anregung und Ausgleich der Schwächen von Einzelmethoden (Engler, 1997, S. 129). Wenn von Methodenkombination die Rede ist, stellt sich auch die Frage nach dem Verhältnis bzw. der Stellung der beiden Ansätze zueinander. Alexander von Eye (1994, S. 36ff.) unterscheidet sechs Positionen, die die möglichen Relationen aufzeigen:

(1) Qualitative und quantitative Forschung sind **antithetisch** zueinander. Vertreter dieser Position entscheiden sich für den einen oder anderen Ansatz und lehnen Methoden des anderen Ansatzes ab. Es herrscht die Überzeugung, dass mit den beiden Ansätzen einander ausschließende Themen verfolgt werden.

(2) Qualitative und quantitative Forschung sind **komplementär** zueinander. Nach dieser Position tragen beide Ansätze wichtige Informationen zu einer Untersuchung bei, so dass sich beide Informationsquellen gegenseitig ergänzen.

(3) Qualitative und quantitative Forschung **operieren parallel** zueinander. Hier wird davon ausgegangen, dass beide Ansätze gleichzeitig an ein und demselben Thema arbeiten und mit unterschiedlichen Methoden, vergleichbare, parallele Informationen sammeln.

(4) Qualitative und quantitative Forschung sind **ineinander eingebettet**. Hier wird von einer Hauptuntersuchung ausgegangen, die quantitativer Natur ist. In der Folge werden qualitative Methoden eingesetzt, um zusätzliche Hintergrundinformationen zur Verfügung zu stellen, den Kontext zu beleuchten und die Validität von Aussagen zu überprüfen, die mit quantitativen Methoden im Rahmen derselben Untersuchung gewonnen worden sind. Alternativ ist auch das Gegenteil vorstellbar, dass

man also von einer Hauptuntersuchung ausgeht, die qualitativer Natur ist und zusätzlich quantitative Informationen hinzufügt.

(5) Sowohl qualitative als auch quantitative Forschung können **die Methoden des jeweils anderen Ansatzes für sich nutzen**. In diesem Fall hat keiner der beiden Ansätze Vorrang. Jeder der Ansätze nutzt die Möglichkeiten aus, die vom jeweils anderen geboten werden, so können qualitative Daten statistisch analysiert und quantitative Daten qualitativ untersucht werden.

(6) Die Anwendung **qualitativer** Methoden in der Entwicklung einer wissenschaftlichen Fragestellung ist **vor** der Anwendung **quantitativer** Methoden **angesiedelt**. Dies bezieht sich auf ein noch wenig erkundetes Gebiet, in dem vornehmlich qualitative Fragen zu stellen sind.

Auf der Grundlage der obigen Ausführungen ist hinsichtlich der methodischen Einordnung der vorliegenden Untersuchung Folgendes festzuhalten: Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden die Vorzüge der Methodenkombination genutzt und sowohl quantitative als auch qualitative Erhebungsmethoden in der Untersuchung eingesetzt. Was das Verhältnis beider Ansätze betrifft, so lässt sich nach Eye sagen, dass im Rahmen dieser empirischen Untersuchung qualitative und quantitative Forschung ineinander eingebettet sind (siehe These 4). Ausgegangen wird von einer Hauptuntersuchung, die quantitativer Natur ist. In der Folge wird der Kontext mittels qualitativer Methoden erhellt und die Validität der Aussagen, die zuvor mit quantitativen Methoden gewonnen worden sind, überprüft. Dies soll in der Folge näher erläutert werden.

Das Erkenntnisinteresse der Untersuchung bezieht sich auf die Leistungen griechischer Schüler in der schriftlichen Division natürlicher Zahlen. Es geht also um die Feststellung einer bestimmten Leistung (schriftliches Dividieren) und um die Gradausprägung dieser Leistung im Sinne einer Querschnittsdiagnose (vgl. Lienert & Raatz, 1994, S. 6). Hierzu eignen sich für die methodische Herangehensweise insbesondere *quantitative* Forschungsmethoden, da man sich dadurch schnell einen Überblick über die in den untersuchten Stichproben angetroffenen Merkmalsverteilungen verschaffen kann (Bortz, 1977, S. 1). So bildet ein diagnostischer Test für diese Zielsetzung das geeignete Erhebungsinstrument. Durch diesen Test soll diagnostiziert werden, welche Schwierigkeiten griechische Schüler beim schriftlichen Dividieren haben, welche Fehlerarten vorzufinden sind, ob es sich dabei um zufällige oder systematische Fehler handelt und wie diese Fehlermuster gruppiert werden können. In der Folge werden Hypothesen über die Entstehungsursachen dieser Fehler erstellt. Diesen erstellten Hypothesen wird danach mit *qualitativen* Methoden nachgegangen. Der Wechsel zu qualitativen Methoden lässt sich durch die Zielsetzung in dieser Phase rechtfertigen. Im Vordergrund steht nun die Subjektperspektive, die Individualität, die Idiosynkrasie des Schülers und die intrapersonale Generalisierbarkeit (Lorenz, 1992, S. 68). Intendiert werden die Rekonstruktion subjektiver Sichtweisen (Flick, 1998, S. 105), Erkenntnisse über das Denken der Kinder, über ihre geistige Strukturen und über Gedankenfehler, die zu fehlerhaften Lösungen führen. Aus diesem Grunde erscheinen explorative qualitative Erhebungsmethoden angebracht. Es werden klinische Interviews mit Kindern durchgeführt, in denen die Schüler selbst zu Wort kommen und über ihre Rechenwege und Gedankengänge sprechen. Durch die Aussagen der Schüler sollen ihre Rechenwege identifiziert, rekonstruiert und offengelegt werden. Gleichzeitig können die bereits erstellten Hypothesen falsifiziert oder verifiziert werden und Vorschläge zur Fehlervermeidung gegeben werden. Somit werden beide Erhebungsmethoden, der diagnostische Test und die klinischen Interviews, zu einer Einheit verbunden. Sie bilden ein Kontinuum, da mit dem

Test die Bandbreite und mit den Interviews die Tiefe des Untersuchungsgegenstandes eruiert werden. Ihr Zusammenspiel ermöglicht die Interpretation des zu erforschenden Phänomens, verschafft der Analyse mehr Tiefe und macht die Vielschichtigkeit des Untersuchungsgegenstandes deutlich. Im weiteren Verlauf der Untersuchung werden die qualitativen Methoden beibehalten. Nach dem Diagnostizieren der Schwierigkeiten der Schüler und dem Versuch, ihre Rechenwege zu rekonstruieren, wird das Ziel verfolgt, im Rahmen eines von der Verfasserin durchgeführten Förderunterrichts die Lernschwierigkeiten bestimmter (6) Schüler zu erfassen, zu verstehen, um sie schließlich zu überwinden und ihre Lernlücken zu schließen. Es handelt sich dabei um Schüler, die offensichtlich erhebliche Schwierigkeiten bei der schriftlichen Division haben. Um dies zu verwirklichen, ist es notwendig, das Wissen und die Sinnstrukturen der Schüler zu erschließen und ihren Förderbedarf festzustellen. „Die Verhaltensbeobachtung erweist sich als grundlegende Methode, verstehenden Zugang zum Schüler und seinem individuellen Bedingungsfeld zu finden“ (Eberwein, 1998, S. 201). „Die Befunde teilnehmender Beobachtung und das (…) interpretative Ausdeuten kindlichen Verhaltens können wesentliche Anhaltspunkte liefern, um den besonderen Förderbedarf über einen längeren schulischen Entwicklungsabschnitt des Kindes zu ermitteln“ (Benkmann, 1995, S. 361). Die Untersuchung schließt mit der Anwendung *quantitativer* Methoden. Mit den Schülern, die an dem Förderunterricht teilnehmen, wird nach der Phase der Intervention derselbe Test durchgeführt, im Sinne einer Evaluationsforschung. „Letztendlich sind Interventionen nämlich nicht an den idealiter anvisierten Zielen zu messen, sondern an den realiter erreichten Effekten“ (Wember, 1994, S. 100). Derselbe Test, der in der ersten Phase der Untersuchung zur *Erhebung der Kenntnisse* diente, soll nun als *Lernkontrolle* fungieren, um den abschließenden Leistungsstand der Schüler und die Effektivität des Unterrichts zu bewerten. So werden diese Bewertungen nicht „in die subjektive Beliebigkeit Einzelner gestellt oder der Interessenlage von Teilgruppen ausgeliefert, sondern mit geprüften Methoden und für eine kritische Fachöffentlichkeit nachvollziehbar vorgenommen werden“ (ebd.).

Abschließend werden hier die in dieser Untersuchung verwendeten Methoden aufgelistet werden:

- Diagnostischer Divisionstest zur Erhebung der Vorkenntnisse
- Qualitative Interviews
- Teilnehmende Beobachtung von Kindern im Unterricht
- Derselbe diagnostische Test als Lernzielkontrolle

Im Folgenden werden die angewendeten Methoden einzeln vorgestellt und schließlich erfolgt eine Übersicht über die Untersuchung.

3.3 Der Test

3.3.1 Der Test als Methode

Die Methoden der empirischen Datenerhebung beabsichtigen, Abschnitte der Realität, die in einer Untersuchung interessieren, möglichst genau zu beschreiben oder abzubilden. In den quantitativen Methoden steht die Operationalisierung bzw. Quantifizierung der zu erhebenden Merkmale im Vordergrund. Eine der wichtigsten und gebräuchlichsten quantitativen Erhebungsmethoden in den Sozialwissenschaften ist der Test (vgl. Bortz & Döring, 1995, S. 127).

Lienert definiert den Test als „ein wissenschaftliches Routineverfahren zur Untersuchung eines oder mehrerer empirisch abgrenzbarer Persönlichkeitsmerkmale mit dem Ziel einer möglichst quantitativen Aussage über den relativen Grad der individuellen Merkmalausprägung“ (1994, S. 1; vgl. auch Bundschuh, 1996, S. 61ff.). Langfeldt gibt eine simple und eindeutige Erklärung: „Testen heißt nichts anderes, als ein Individuum oder eine Gruppe von Individuen hinsichtlich eines oder mehrerer definierter Merkmale zu messen (z. B. Schulleistung, Intelligenz, Ängstlichkeit usw.)“ (1984, S. 65). Diese Untersuchung bzw. Messung kann nur dann als Test gelten, wenn vier Voraussetzungen erfüllt werden: wenn diese *wissenschaftlich begründet* ist, d. h. wenn sie auf dem Wege der empirischen Überprüfung und Erprobung zustandegekommen ist, die Durchführung des Tests *routinemäßig*, d. h. unter Standardbedingungen geschah, eine *relative Positionsbestimmung* des untersuchten Individuums erlaubt und zuletzt bestimmte abgrenzbare – also verhaltens- und erlebnisanalytische – Eigenschaften überprüft werden. Demnach kann nicht jede beliebige zu diagnostischen Zwecken angestellte Untersuchung als Test gelten.

In der Literatur, die sich mit dem Testaufbau und der Testanalyse auseinandersetzt, werden meist auch die Gütekriterien eines Tests besprochen. Diese lassen sich in Hauptgütekriterien und Nebengütekriterien unterteilen. Als Hauptgütekriterien bezeichnet man die Objektivität, die Reliabilität und die Validität eines Tests. Zu den Nebengütekriterien gehören die Normierung, die Vergleichbarkeit, die Ökonomie und schließlich die Nützlichkeit (vgl. Lienert & Raatz, 1994, S. 7 ff.; Langfeldt, 1984, S. 68ff.; Bundschuh, 1996, S. 69ff.). In der Folge wird das Augenmerk auf die Hauptgütekriterien gerichtet :

Objektivität: Unter Objektivität versteht man den Grad, in dem die Ergebnisse eines Tests unabhängig vom Untersucher sind. Ein Test wäre demnach vollkommen objektiv, wenn verschiedene Untersucher mit dem gleichen Test bei denselben Probanden zu gleichen Ergebnissen gelangten. In diesem Zusammenhang spricht man auch von „interpersoneller Übereinstimmung“ der Untersucher. Bezogen auf die Objektivität unterscheidet man verschiedene Aspekte, welche die Durchführungsobjektivität, die Auswertungsobjektivität und die Interpretationsobjektivität umfassen.

Reliabilität: Unter der Reliabilität eines Tests versteht man „den Grad der Genauigkeit, mit dem er ein bestimmtes Persönlichkeits- oder Verhaltensmerkmal misst, gleichgültig, ob er dieses Merkmal auch zu messen beansprucht (welche Frage ein Problem der Validität ist).“ (Lienert & Raatz, 1994, S. 9ff.). Auch hier werden ähnlich wie bei der Objektivität verschiedene Aspekte unterschieden: die Paralleltest-Reliabilität, die Retest- Reliabilität und die innere Konsistenz eines Tests.

Validität: Die Validität eines Tests „gibt den Grad der Genauigkeit an, mit dem dieser Test dasjenige Persönlichkeitsmerkmal oder diejenige Verhaltensweise, das (die) er messen oder vorhersagen soll, tatsächlich misst oder vorhersagt.“ (Lienert & Raatz, 1994, S. 10). Gefragt wird hier also, ob der Test wirklich das misst, was er messen soll (vgl. Bundschuh, 1996, S. 79). Die Aspekte, die die Validität erfassen, sind die inhaltliche Validität, die Konstruktvalidität und die kriterienbezogene Validität (vgl. Lienert & Raatz, 1994, S. 10ff.).

Inhaltlich lassen sich die Tests in zwei große Gruppen einteilen: in Leistungs- und Persönlichkeitstests. Leistungstests liegen vor, wenn Aufgaben „richtig“ oder „falsch“ zu beantworten sind, d. h. wenn ein Beurteilungsmaßstab vorliegt. Dazu gehören Intelligenztests, Entwicklungstests, Schultests, allgemeine Leistungstests und spezielle Funktions- und Eignungstests. In den Persönlichkeitstests konzentriert man sich auf Merkmale des Charakters,

d. h. auf Eigenschaften, Motive, Interessen, Einstellungen und Werthaltungen sowie psychische Gesundheit (Bortz & Döring, 1995, S. 175ff.). An dieser Stelle interessieren die Leistungstests. Mit diesen Tests wird versucht, die Leistung der Schüler in bestimmten Fachbereichen zu messen und zu beurteilen. Dieser Leistungsmessung und -beurteilung kommt besondere Bedeutung zu, da sie „...bei der Analyse von Einstellungsänderungen und Entwicklungsverläufen, der Evaluation von Curricula, der Wirkungskontrolle verhaltensmodifikatorischer Interventionen sowie bei der Diagnose oder Prognose schulischer Lernprozesse und Lernfortschritte unumgänglich [ist].“ (Kornmann, 1984, S. 117). Tests können also zur Feststellung der Leistungen im Vergleich zu einer vorgegebenen Norm oder zum Zweck der individuellen Leistungsfeststellung eingesetzt werden, so dass daraus Folgerungen für Fördermaßnahmen gezogen werden können. Dabei wäre es empfehlenswert, eine eher kompetenzorientierte als defizitorientierte Sichtweise zu haben, da nicht nur Schwächen sondern auch Stärken der Schüler diagnostiziert werden können (Scherer, 1995, S. 115ff.). An der Defizitorientierung vieler vorhandener diagnostischer Tests wird häufig Kritik geübt. Dies mag jedoch nicht nur an der Testkonstruktion, sondern auch an den Testbenutzern und ihrem Umgang mit den Tests liegen. Einen weiteren Kritikpunkt bildet die Aussage, dass keine unterschiedlichen Niveaus der Aufgabenbearbeitung ermöglicht werden. Dies könnte durch den Einbezug qualitativer Erhebungsmethoden ausgeglichen werden.

In der vorliegenden Untersuchung werden die oben ausgeführten methodischen Bedenken berücksichtigt. Daher wir zunächst von quantitativen Methoden ausgegangen. Es wird ein diagnostischer Divisionstest durchgeführt, der die Leistungen griechischer Schüler bei der schriftlichen Division abfragen soll. In dieser Phase geht es weniger um die Erforschung sozialer Zusammenhänge und Verhaltensursachen als vielmehr um Diagnose und Beschreibung der vorhandenen Fähigkeiten und Leistungen der Schüler, was darauf hindeutet, dass es sich um eine deskriptive Untersuchung handelt (vgl. Diekmann, 1998, S. 32). Da eine Totalerhebung unmöglich ist, wird auf eine repräsentative Stichprobe Wert gelegt. Die Erhebung wird an 7 Grundschulen mit 189 Schülern des 4. Schuljahres durchgeführt. Diese Schüler stammen aus 7 Schulen, die so ausgewählt wurden, dass alle unterschiedlichen sozio-ökonomischen Schichten der Bevölkerung in der Region Kavalas, in der die Untersuchung durchgeführt wird, vertreten sind. Es sind Schulen aus städtischen, kleinstädtischen und ländlichen Gebieten ausgewählt worden. Ausführliche Informationen zur Testkonstruktion, zur Durchführung der Tests sowie zur Auswertung dieser sind dem Kapitel 4.2 zu entnehmen.

3.4 Interviews

3.4.1 Qualitative Interviews als Methode

Man hat das Interview als „Königsweg“ der Sozialforschung bezeichnet (Diekmann, 1998, S. 371). In der qualitativen Forschung spielen die Interviews eine zentrale Rolle. Qualitative Forschung legt großen Wert auf die Subjektperspektive, auf die „Sinndeutungen“ des Befragten. Zwar arbeitet man hier mit Stichproben kleineren Umfangs als in quantitativen Forschungen, dafür kann man aber in die Tiefe gehen, die interviewten Personen ausführlich zu Wort kommen lassen und das gewonnene Material intensiver auswerten und nicht nur auf statistische Kennwerte verdichten (vgl. Diekmann, 1998, S. 444ff.). Zusätzlich liefern die qualitativen Interviews Informationen, die „…in statu nascendi aufgezeichnet werden können, unverzerrt authentisch sind, intersubjektiv nachvollzogen und beliebig reproduziert werden können. (…) Gerade durch den Vergleich von Text und seiner Interpretation ergeben sich Kontrollmöglichkeiten, die dem qualitativen Interview einen methodisch und methodologisch hohen Status zuweisen." (Lamnek, 1995, S. 35).

Mittlerweile ist das Spektrum der Interviewtechniken, die in der qualitativen Forschung eingesetzt werden können, sehr breit. Die Auswahl einer speziellen Interviewtechnik hängt sowohl vom Forschungsinteresse als auch von dem Personenkreis, der befragt werden soll, ab (vgl. Friebertshäuser, 1997, S. 374). Als Interviewpartner werden nicht immer Erwachsene, sondern auch Kinder ausgewählt. Dies geschieht in der Absicht, „die Sicht der Kinder auf ihr Leben, ihre Wünsche, Interessen, Lernprozesse, Probleme und Ängste, in familiären und freundschaftlichen Beziehungen, in Schule, Wohnumwelt und Freizeit wissenschaftlich zu erfassen" (Heinzel, 1997, S. 396). In der Schulforschung werden qualitative Interviews eingesetzt, um ein besseres Verständnis des alltagskulturellen Handelns von Kindern in der Schule zu ermöglichen (ebd., S. 399). In der vorliegenden Arbeit zielt die Durchführung von klinischen Interviews der Erforschung des kindlichen Denkens, dem Verstehen der intellektuellen Prozesse und Kompetenzen, der Reichhaltigkeit des Denkens und seiner fundamentalen Aktivitäten, die den mathematischen Kenntnissen zugrunde liegen. Die Erforschung des mathematischen Denkens der Kinder bildet hier ein wichtiges Anliegen. Dieses Bemühen kennzeichnet auch das Lebenswerk von Jean Piaget, der zu diesem Zweck die „klinische Methode" entwickelte. Diese Methode wird auch in dieser Phase der Untersuchung eingesetzt. „Das Hauptziel der Methode besteht darin, dem kindlichen Denken zu folgen, ohne es suggestiv zu verformen oder ihm den Standpunkt des Erwachsenen aufzuzwingen" (Ginsburg & Opper, 1998, S. 124). Klinische Interviews werden in halb-standardisierter Form durchgeführt. Der Interviewer führt das zu bearbeitende Problem ein und versucht die Denkprozesse des Kindes durch seine Äußerungen zu verfolgen. Dabei bedient er sich nach Möglichkeit der Sprache des Kindes. Während des Interviews bildet er Hypothesen, in denen er die Auffassungen des Kindes näher zu bestimmen versucht. Diese Hypothesen können durch weitere Fragen überprüft werden (vgl., ebd.). Die Fragen des Interviewers sollen das Kind herausfordern, viel und offen über seine Gedanken zu sprechen. Die hinter den Antworten liegenden verborgenen Strukturen sollen durch den Dialog aufgedeckt werden (Claparède, zitiert nach Wittmann, 1982, S. 36). Das Interviewkonzept sollte hinreichend flexibel sein, so dass alle Möglichkeiten, etwas über die kindliche Denkweise zu erfahren, ausgeschöpft werden und der Interviewer zusammen mit dem Kind an die Grenzen seines Wissens vorstoßen kann. Der Verlauf des Interviews wird durch das Kind bestimmt, so ist die Dauer eines klinischen Interviews nicht vorauszusehen. Fundierte Sachkenntnisse im thematischen Bereich auf Seiten des Interviewers, die auch Vorüberlegungen über die unterschiedlichen Denkwege der Kinder erlauben, sind Grundvoraussetzungen für die Durchführung solcher Interviews (vgl. Selter & Spiegel, 1997, S. 107). Darüber hinaus erfordert die „Annäherung an die Welt der Kinder Empathie, die Wertschätzung der Wahrnehmungen und Gefühle der Kinder und ein Interesse, daran, die Sicht der Kinder auf ihre Welt zu verstehen" (Heinzel, 1997, S. 406). Diese theoretischen Überlegungen bildeten den Hintergrund für die Durchführung der klinischen Interviews von der Verfasserin.

Die zuvor beschriebene klinische Methode stößt jedoch auf Schwierigkeiten, auf die schon Piaget selbst verwiesen hat: auf die Schwierigkeit der Kinder, ihre Gedanken mitzuteilen und den ganzen Umfang ihres Wissens zu verbalisieren (Ginsburg & Opper, 1998, S. 122, 150). Um diese Unzulänglichkeiten zu kompensieren, entwickelte Piaget die revidierte klinische Methode. Die Fragen des Interviewers beziehen sich in dieser Methode auf konkrete Objekte oder Ereignisse, die das Kind vor Augen hat. So muss sich das Kind die Dinge, über die es befragt wird, nicht vorstellen und zudem kann es seine Antworten dadurch übermitteln, dass es Gegenstände manipuliert. Daher kann sich der Interviewer nicht nur auf die sprachlichen Äußerungen des Kindes stützen, sondern auch seine Handlungen verfolgen, um seine Gedanken zu verstehen (vgl. ebd., S. 150). Sehr hilfreich kann auch während der Durchführung von Interviews die Erzeugung kognitiver Konflikte sein. Dabei geht es um das Bewusstmachen von Widersprüchen im eigenen Denken. Man kann als Interviewer das Kind mit zwei Aussagen von ihm konfrontieren, die zueinander nicht passen. Es können aber auch Aussagen eines anderen Schülers sein (Selter & Spiegel, 1997, S. 104). Durch diese Gegenargumenten kann man die Stabilität und Authentizität des kindlichen Denkens feststellen (vgl. Ginsburg & Opper, 1998, S. 151). Sowohl das konkrete Material als auch die kognitiven Konflikte können als Hilfsmaßnahmen-Erzählstimuli dienen, um das kindliche Denken tiefer zu erforschen und besser zu verstehen.

In den Fällen, in denen es als hilfreich empfunden wurde, wurde während der Durchführung der Interviews Rechengeld zur Verfügung gestellt, oder die Kinder wurden mit deren Aussagen konfrontiert, um sich noch mal Gedanken über den Sachverhalt zu machen. Die Auswahl der Interviewpartner und die Durchführung der Interviews durch die Verfasserin werden unter Kapitel 4.3 beschrieben, in dem auch die Daten aus den Interviews vorgelegt werden. An dieser Stelle sollte nur das qualitative Interview als Methode vorgestellt werden.

3.5 Teilnehmende Beobachtung

3.5.1 Teilnehmende Beobachtung als Methode

Ist in der Sozialforschung die Rede von der Erhebungsmethode der Beobachtung, so wird darunter die direkte Beobachtung menschlicher Handlungen, sprachlicher Äußerungen, nonverbaler Reaktionen und anderer sozialer Merkmale verstanden (vgl. Diekmann, 1998, S. 456). In der qualitativen Forschung wird zwischen teilnehmender und nicht-teilnehmender Beobachtung unterschieden. Die Dimension Teilnahme bezieht sich dabei auf den Partizipationsgrad des Beobachters an der sozialen Situation, die er beobachtet (Atteslander, 1995, S. 112). Bei der teilnehmenden Beobachtung wird der Beobachter selbst Element des zu beobachtenden sozialen Feldes, wohingegen bei der nicht-teilnehmenden Beobachtung der Beobachter von außen her das ihn interessierende Verhalten beobachtet (Lamnek, 1995, S. 251). Die teilnehmende Beobachtung impliziert also, dass die Forscher direkt in das zu untersuchende soziale System gehen und dort in der natürlichen Umgebung Daten sammeln (Atteslander, 1995, S. 116). Sie tauchen in das untersuchte Feld ein, beobachten selber aus der Perspektive des Teilnehmers und üben durch ihre Teilnahme Einfluss auf das Beobachtete aus (vgl. Flick, 1998, S. 157). Erzielt wird die „Gewinnung der Innenperspektive", das Hervorheben des Besonderen im Alltäglichen und in den Routinen und das Gewinnen von Einsichten in dem untersuchten Feld, die bei aufrechterhaltener Distanz nicht möglich wären (vgl. ebd., S. 161). Aus dem unmittelbaren Kontakt sollen Einblicke in das konkrete (‚natürliche') Verhalten von Personen in spezifischen Situationen erhalten und ihr Sinnverständnis sowie die verhaltensbestimmenden Orientierungsmodelle vergegenwärtigt werden (vgl. Atteslander, 1995, S. 116). Hierbei wären Empathie und Identifikation mit den Untersuchungspersonen sehr hilfreich, da erst so die Interpretationsprozesse erfasst und verstanden werden können (vgl. ebd., S. 123). Dies führt allerdings zur folgenden Problematik: Zwar wird dem Beobachter zunehmende Teilhabe am Feld, aus der heraus erst Verstehen resultiert, ermöglicht, gleichzeitig aber wird von ihm die Wahrung einer gewissen Distanz verlangt, aus der heraus Verstehen erst wissenschaftlich und nachprüfbar wird (vgl. Flick, 1998, S. 163). Aus diesem Spannungsfeld zwischen *Distanz* und *Teilnahme* resultieren hohe Anforderungen an die Forscher (Atteslander, 1995, S. 116).

In dieser Methode wird die Offenheit der Datenerhebung, die gerade auf der Kommunikation mit den Beobachteten aufgebaut ist, hervorgehoben (Flick, 1998, S. 158). Kritik wird bezogen auf die Aspekte Repräsentativität und Wissenschaftlichkeit der durch qualitativ-teilnehmende Beobachtung gewonnenen Daten ausgeübt.

> „Eine solche Kritik verkennt aber die genuinen Vorzüge dieser Methode, denn qualitativ-teilnehmende Beobachtungen zeichnen sich gegenüber anderen Methoden ja gerade durch die *Authentizität* der gewonnenen Daten aus. Sie ermöglichen durch ihre Offenheit und die Problemorientierung die Erforschung komplexer sozialer Systeme, über die die Soziologie noch wenig oder nichts weiß und sie ‚zwingt' die Forscher ins Feld, zur Kontaktaufnahme mit dem Untersuchungsgegenstand." (ebd., S. 124)

Auch an einem zweiten Bereich wird das Beobachtungsverfahren kritisiert, nämlich an der Selektivität der Wahrnehmung. Das was der jeweilige Beobachter wahrnimmt, wird von seinen Erfahrungen, Vorstellungen, vorhergehenden Beobachtungen und seinen Vorurteilen zwangsweise beeinflusst. Dass qualitative Methoden weder die Objektivität noch die Generalisierbarkeit standardisierter Methoden erreichen können, ist so hinzunehmen. Sie sind wohl aber unterrichtsnah und haben einen hohen Wert im pädagogischen Alltag, folglich sind sie ökologisch valide (Scherer, 1996, S. 77).

3.5.2 Daten aus der teilnehmenden Beobachtung

In diesem Jahrhundert entwickelte sich eine starke Reflexion über Möglichkeiten der Erkenntnisgewinnung durch Unterrichtsbeobachtung (Petersen & Petersen, 1965, zitiert nach Voigt, 1997, S. 783). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die teilnehmende Beobachtung während des Förderunterrichts eingesetzt. Der Förderunterricht wurde in der letzten Phase der Untersuchung durchgeführt. Im diesem wurde der Versuch unternommen, den Schülern die nötigen Hilfen anzubieten, so dass sie ihre Lernrückstände aufarbeiten konnten. Um irgendwelche Hilfe leisten zu können, war es unabdingbare Voraussetzung, die Schüler zu verstehen. Das Verstehen bezieht sich hierbei auf das Denken, Handeln und Fühlen der Schüler. Dieses Verständnis sollte als Grundlage für die intendierenden erzieherischen und helfenden Maßnahmen fungieren.

> „Die Verhaltensbeobachtung erweist sich dabei als eine grundlegende Methode, verstehenden Zugang zum Schüler und seinem individuellen Bedingungsgefüge zu finden. Sie stellt die wichtigste Grundlage für eine Pädagogik und Didaktik des (Fremd-)Verstehens sowie für die soziale Perspektivenübernahme dar. Über die Beobachtung von Kindern, über die Wahrnehmung der Außenseite ihres Handelns, eröffnen sich Möglichkeiten, die Innenseite zu verstehen" (Eberwein, 1998, S. 201).

Die Beobachtung von Schülern im Unterricht verfolgte das Ziel, „durch Interaktion mit den Schülern ihr Alltagswissen, Sinnstrukturen und Deutungsmuster situativ zu erschließen" (ebd.). Da die Schüler ihr Lernen individuell gestalten, galt es diesen Prozess zu erforschen, zu beobachten und zu begleiten. Interessant war die qualitative Beschreibung des Schüler- und Lernverhaltens und nicht die quantitative Dimension dessen. Es ging nicht darum, das Verhalten der bestimmten Schüler zu vorher bestimmten Kategorien (lernschwierige, rechenschwache) zuzuordnen. Vielmehr interessierten die Reaktionen der Schüler auf die Lernprozesse, die Art und Weise wie die Kinder ihr Wissen einsetzen, wie sie neue Informationen auswerten und verarbeiten und wie sie alternative Strategien entwickeln.

Im Förderunterricht war das Augenmerk nicht nur auf die Lerninhalte, sondern auch auf das allgemeine Verhalten der Schüler gerichtet. Dadurch dass die Verfasserin den Förderunterricht selbst erteilte, übernahm sie nicht nur die Rolle der Beobachterin sondern gleichzeitig auch die der Lehrperson. Somit war die Beobachtung eine teilnehmende Beobachtung.

Im Unterrichtsverlauf kamen direkt beobachtbare Verhaltensweisen bezüglich des Lern-, Arbeits- und Sozialverhaltens der Schüler, sowie Verhaltensdispositionen wie z. B. Motive, Interessen, Konzentrationsfähigkeit, Schulangst, u.ä. zum Vorschein. Bestimmte Verhaltensweisen, die für den Unterrichtsverlauf und die Lernsituation der Kinder relevant waren, wurden aus dem Unterrichtsgeschehen herausgefiltert und festgehalten. Am Ende jeder Unterrichtsstunde wurde ein ausführliches Verlaufsprotokoll angefertigt, das die Lehrinhalte, die Arbeitsweisen der Schüler, eventuelle Verständnisschwierigkeiten und auffällige Verhaltensweisen beschrieb. Dabei handelte es sich um ein „Gedächtnisprotokoll" (vgl. Girtler, 1984, S. 42ff.). Miteinbezogen wurden in diesen Protokollen die Aufzeichnungen, die die Verfasserin während der Unterrichtsstunde gemacht hatte. Gleichzeitig wurden weitere, durch die Erinnerung hervorgerufene Beobachtungsaspekte hinzugefügt. Für die Aufzeichnung der Unterrichtsstunden wurden keine Aufnahmegeräte benutzt, da diese die Situation entfremdet hätten.

Protokolliert wurde immer direkt nach der Beobachtung, in diesem Fall nach den erteilten Unterrichtsstunden. Es wurde berücksichtigt, dass das Erinnerungsvermögen eines jeden Beobachters und auch der Verfasserin begrenzt ist und in die faktische Erinnerungsleistung selektive Mechanismen eingehen, die schwer kontrollierbar sind. Deshalb wurde darauf geachtet, dass die Zeitspanne zwischen der Beobachtung und der Notierung nicht zu groß wurde. Dadurch sollte die selektive Wahrnehmung der Beobachterin reduziert und der Verlust an Exaktheit des Protokolls möglichst gering gehalten werden (Lamnek, 1995, S. 295).

An dieser Stelle muss betont werden, dass mit diesen Unterrichtsdokumentationen keine verallgemeinernde Beurteilung intendiert war. Es sind jedes Mal subjektive Erfahrungen und Eindrücke, die ein Lehrer und auch die Verfasserin während des Unterrichts von den Schülern bildet. Einzelbeobachtungen sind für sich allein genommen keine hinreichende Grundlage für Beurteilungen. Aus den Beobachtungen sollten demnach keine Charaktereigenschaften oder Persönlichkeitsmerkmale der Schüler abgeleitet werden (vgl. Eberwein, 1998, S. 203). Die Tatsache, dass der Verfasserin eine längere Beobachtungszeit (drei Monate) zur Verfügung stand, trug dazu bei, die Einzelbefunde gegeneinander zu halten und zu vergleichen, sie nach ihrer Gewichtigkeit abzuwägen, widersprechende Aussagen zu prüfen und nach dem roten Faden zu suchen, der sich durch alle Einzelaussagen durchzog. Dies alles gab eine ausreichende Basis für verwertbare Aussagen über die Schülerpersönlichkeiten ab (Thomae, 1976, zitiert nach Eberwein, 1998, S. 202). Durch die Schülerbeobachtung wurde der Versuch vorgenommen, den Kindern näher zu kommen, ihnen zu begegnen. Durch ihre Rückmeldungen, Fragen und Reaktionen bekam die Verfasserin wichtige Informationen über ihre Vorlieben, Ängste, Denkweisen, Denkfehler, Stärken und Schwächen, über kognitive und affektive Faktoren, die für den Lernvorgang von immenser Bedeutung sind. Gleichzeitig wurde ihr die Möglichkeit zur Reflexion der eigenen Handlungen geboten. Es wurden die ausgewählten Methoden nach ihrer Effektivität hinterfragt und nach optimalen Handlungen und alternativen Hilfen gesucht. Ständig war eine Neuorientierung und Erkundung von Nöten. Alle diese Informationen wurden berücksichtigt und darauf bezugnehmend wurde der Unterricht möglichst „kindgemäß“ gestaltet. Interessante Bemerkungen, die helfen würden, das Lernverhalten, die Vorgehensweisen und die Ängste der Schüler zu begreifen, wurden in die Darstellung des Förderunterrichts in Kapitel 5 miteinbezogen.

3.6 Überblick über die Untersuchung

Nachdem die ausgewählten Forschungsmethoden vorgestellt und begründet wurden, erfolgt eine Übersicht über die Untersuchung. Die gesamte Untersuchung besteht aus vier Phasen. Jede Phase wird durch ihre eigene Zielsetzung und ihr adäquates Erhebungsinstrument gekennzeichnet.

In der ersten Phase wird das Ziel verfolgt, aus dem mathematischen Lehrstoff der vier ersten Klassen der Primarstufe in Griechenland die Themenbereiche zu finden, die griechischen Schülern die größten Verständnisschwierigkeiten bereiten. Dazu werden die mathematischen Lernkontrollen untersucht, welche die Schüler im Rahmen des Mathematikunterrichts schreiben. Aus der Anzahl der richtigen oder falschen Lösungen ergibt sich die Aufgabengruppe, die die höchste Fehlerquote aufweist. In diesem Fall ist es die schriftliche Division. Auf diese Rechenoperation konzentriert sich in der Folge das Interesse der Arbeit. So werden in der zweiten Phase die Leistungen von griechischen Viertklässlern in der schriftlichen Division abgefragt. Diese erweisen sich als sehr heterogen. Aus der qualitativen Fehleranalyse der Tests ergeben sich Fehlerkategorien und die Einteilung der Fehlermuster in systematische und zufällige. Von besonderem Interesse sind für die weitere Untersuchung die systematischen Fehler. Für ihre Entstehung werden Hypothesen erstellt, die allerdings einer objektiven Überprüfung bedürfen. Dies geschieht an Hand qualitativer Interviews, welche die dritte Phase der Untersuchung bilden. Hier werden die Schüler über ihre Rechenwege und Strategien befragt. Auf diesem Wege sollen die individuellen Lösungswege der Schüler rekonstruiert und analysiert werden, um die Fehlerursachen zu ergründen. Nach der Analyse der systematischen Fehler werden Wege aufgezeigt, die der Fehlervorbeugung und -vermeidung dienen sollen. Auf Grund der Erkenntnisse aus den Tests und den Interviews bezogen auf die Schwierigkeiten der Schüler im schriftlichen Dividieren, wird ein dreimonatiges Unterrichtsexperiment durchgeführt, an dem Schüler teilnehmen, die erhebliche Schwierigkeiten in dieser Rechenoperation haben. Diese ist die vierte und letzte Phase der Untersuchung. Das gesetzte Ziel ist hier der Versuch, die Schwierigkeiten der Schüler zu beheben und ihnen die notwendigen Hilfen zu vermitteln. Im Rahmen dieses Förderunterrichts können die Schwierigkeiten der Schüler aus der Nähe betrachtet und erläutert werden. Um die Effektivität des Förderprojektes zu bewerten, wird abschließend ein Nachtest durchgeführt. Es handelt sich um denselben Test, der den Schülern in der zweite Phase der Untersuchung gestellt wurde. Die Leistungen der Schüler in dem Vortest werden mit ihren Leistungen in dem Nachtest verglichen und auf diesem Wege der abschließende Leistungsstand erhoben.

4 Die Untersuchung

4.1 Erste Phase

In Kapitel 2 wurde ein Eindruck von dem Mathematikunterricht in den griechischen Schulen vermittelt. Hierzu wurde der Lehrstoff der vier ersten Klassen präsentiert sowie die didaktische Umsetzung und ihre Behandlung. An dieser Stelle setzt der empirische Teil der Arbeit an, wobei folgendes Untersuchungsziel gesetzt wurde:

Die Leistungen der Schüler und ihre spezifischen Schwächen und Schwierigkeiten verbunden mit diesen Lehrinhalten sollten qualitativ und quantitativ erforscht werden. Die mathematischen Themenbereiche, die den Schülern die größten Schwierigkeiten bereiten, sind in diesem Zusammenhang von besonderem Interesse und sollen daher eingehend beschrieben werden. Zu diesem Zweck werden die Lernkontrollen untersucht, die in den Schulbüchern enthalten sind. So können Fehler lokalisiert, in Kategorien eingeteilt, registriert und ihre Häufigkeit festgestellt werden. Die Untersuchung der schriftlichen Schülerarbeiten dient somit zunächst vor allem dazu, das mathematische Themengebiet herauszustellen, das griechischen Schülerinnen und Schülern der Schuljahre 1 bis 4 die meisten Verständnisschwierigkeiten bereitet. Gleichzeitig sollte das Themengebiet eine bedeutsame Rolle im Aufbau der mathematischen Kenntnisse spielen. Auf diese „schwierigste" Stoffeinheit wird dann in der zweiten Phase der Untersuchung das Augenmerk gerichtet, indem sie eingehender und qualitativ untersucht wird.

4.1.1 Untersuchungsziel und Auswahl der Untersuchungsmittel

Zunächst muss die Zielsetzung der ersten Phase der Untersuchung näher umrissen und erläutert werden, aus welchen Gründen die Leistungskontrollen als Informationsquellen ausgewählt wurden. Ziel der ersten Phase der Untersuchung war das Registrieren der Schülerfehler innerhalb des gesamten mathematischen Lehrstoffes in den vier ersten Klassen der Primarstufe (in Griechenland). Das Interesse lag nicht in der Feststellung der Leistungen der Schüler zu einem bestimmten Zeitpunkt und bezogen auf eine spezielle Themeneinheit, sondern in ihren schriftlichen Leistungen in den verschiedenen Kapiteln und in den Schwierigkeiten, die im Laufe eines ganzen Schuljahrs in den verschiedenen Themenbereichen auftreten. Um sich jedoch auf den gesamten Lehrstoff zu beziehen, war der Besitz mehrerer schriftlicher Leistungen jedes einzelnen Schülers unerlässlich. Da Schülerfehler unter anderem auch von Lehrmethoden und Schulbüchern abhängen, sollten die Leistungsnachweise aus der schulischen Praxis und Realität stammen und mit der Unterrichtsmethode des jeweiligen Klassenlehrers übereinstimmen, was zusätzlich das Interesse der Lehrer für diese Untersuchung und ihre Bereitschaft mitzuarbeiten verstärkte. Aus diesen Gründen wurde die Entscheidung getroffen, als Informationsquellen die Lernkontrollen der Lehrbücher vorzunehmen. Dabei handelt es sich um Tests, die vom Bildungsministerium verfasst und gedruckt werden. Diese Tests werden am Ende jeder größeren Themeneinheit eingesetzt und nehmen als Bezugspunkt die in dem Curriculum festgelegten Lehr- und Lerninhalte. Sie beinhalten daher mehrere schriftliche Leistungen jedes einzelnen Schülers und stammen aus dem Unterrichtsgeschehen, da sie stets vom Klassenlehrer in „natürlichen Unterrichtssituationen" durchgeführt wurden.

Die Lernkontrollen werden, wie bereits erwähnt, am Ende jedes großen Kapitels von allen Schülern in Einzelarbeit geschrieben. Der Lehrer soll durch sie Aufschluss über das Erreichen der vorgesehenen Lehrziele gewinnen, um dementsprechend die nötigen Maßnahmen treffen zu können. Da diese Kontrollen von den Autoren der Bücher abgefasst wurden, ist anzunehmen, dass die darin beinhalteten Aufgaben so konzipiert sind, dass die unerlässliche Validität vorhanden ist, d. h., dass sie das messen, wofür sie eingesetzt werden. Bei diesen Aufgaben handelt es sich um standardisierte Fragebögen, erstellt von den Fachleuten, die auch die Lehrwerke verfasst haben.

Zum Abschluss dieser ersten Phase wurde ein Fragebogen an die Lehrer verteilt, der ihre Meinung über die Schwierigkeiten des Stoffes und der Schüler abfragte. Der Fragebogen wurde von der Untersuchungsleiterin selbst an die befragten Lehrer verteilt und innerhalb von drei Tagen wieder abgeholt, um die Ausfallrate zu vermindern. Dies gewährleistete auch, dass es eine vollständige Rücklaufquote gab. Der Fragebogen bestand aus 11 (offenen und geschlossenen) Fragen. Für die vorliegende Untersuchung ist jedoch nur ein Teil dieser Fragen relevant. Er wird am Ende dieses Abschnitts vorgestellt.

4.1.2 Vorbereitungen für die Untersuchung

4.1.2.1 Beschreibung der Stichprobe

In der ersten Phase der Untersuchung nahmen insgesamt 509 Schülerinnen und Schüler aus den Jahrgangsstufen 1 bis 4 teil. Diese Schüler stammen aus 7 Schulen, die so ausgewählt wurden, dass alle unterschiedlichen sozio-ökonomischen Schichten der Bevölkerung in der Region, in der die Untersuchung durchgeführt wurde, vertreten waren. Es wurden Schulen aus städtischen (Kavala), kleinstädtischen (Eleftheroupoli) und ländlichen Gebieten (Melissokomeio) ausgewählt. Die gesamte Stichprobe wurde für die Analyse in 4 Gruppen aufgeteilt. Jede Gruppe umfasste die Schülerinnen und Schüler eines Jahrgangs:

	Klasse 1	Klasse 2	Klasse 3	Klasse 4	Summe
Schülerzahl	118	139	114	138	509

Tabelle 11: Anzahl der Schülerinnen und Schüler pro Klasse, die an der ersten Phase der Untersuchung teilgenommen haben

4.1.2.2 Zusammenarbeit mit den Schulen

Die Lehrer wurden über die Art und Durchführung der Untersuchung zu Beginn des Schuljahrs 1997/98 informiert. Die Verfasserin besuchte die Schulen, die sich bereit erklärt hatten, an der Untersuchung teilzunehmen und führte ein Gespräch mit den Klassenlehrern der vier ersten Jahrgangsstufen. Zunächst wurden die Ziele und die Phasen der Untersuchung beschrieben. Daraufhin erhielt jeder Lehrer ein Schreiben, in dem schriftlich festgehalten wurde, was für die Durchführung der Untersuchung erforderlich war und worauf jeder Lehrer achten sollte. Die Lehrer wurden aufgefordert, alle Lernkontrollen jedes einzelnen Schülers aufzubewahren, auf denen die Schülerfehler deutlich zu erkennen sein sollten. Es wurde die Wichtigkeit der Tatsache betont, den Schülern bei der Lösung der Aufgaben keine Hilfe zu leisten, um keine Verfälschungen der Untersuchungsergebnisse zu bewirken. Die Fragen der Lehrer wurden in einem zweiten Schreiben beantwortet, der ihnen zugesandt wurde. Manche Lehrer hatten einen wichtigen Aspekt der Untersuchung missverstanden. Sie nahmen an, dass die Untersuchung nur die Häufigkeit der Schülerfehler registrieren sollte, ohne die Art der Fehler miteinzubeziehen. Daher wurde nochmals betont, dass sich das Interesse der Untersuchung sowohl auf die Fehlerarten als auch auf die Fehlerhäufigkeit konzentrierte. Deshalb war es auch von immenser Bedeutung, dass die ursprünglichen Schülerfehler auf den Tests sichtbar waren, ohne dass diese ausradiert und vom Lehrer oder von den Schülern selbst korrigiert worden waren.

Einige Lehrer verfassten eigene Lernkontrollen mit ähnlichen Aufgaben wie in den Leistungskontrollen der Schulbücher. Als Grund gaben sie an, dass manche Eltern, die in Besitz der Lernkontrollen aus den Schulbüchern waren, ihre Kinder auf den bevorstehenden Test gezielt vorbereiteten. So waren die Lehrer gezwungen, diese Initiative zu ergreifen, um die tatsächlichen Leistungen ihrer Schüler festzustellen. Vorfälle dieser Art waren in zwei Schulen in städtischen Regionen aufgefallen. Das Einbeziehen dieser eigenen Leistungskontrollen bewirkte jedoch keine unerwünschte Veränderung in den Daten der Untersuchung. Die selbsterstellten Kontrollen beinhalteten die gleichen Aufgabentypen, nur wurden diese in unterschiedlicher Reihenfolge, mit anderen Zahlenangaben oder veränderten Aufgabentexten gestellt, so dass kein neuer Aufgabentyp hinzukam.

4.1.3 Die Auswertung der Lernkontrollen

Die Leistungskontrollen wurden im Februar und Juni des Schuljahres 1997/98 eingesammelt. Da die Lehrer und Schüler bereits informiert waren, bereitete diese Phase keine Schwierigkeiten. Insgesamt sind 10 Kontrollen für die erste Klasse, 6 für die zweite, 6 für die dritte und 11 für die vierte Klasse vorgesehen. Die Lernkontrollen der ersten zwei Klassen befinden sich im Schülerbuch, diese der dritten und vierten Klasse sind in separate Hefte gefasst, die der Lehrer bereithält. Im Idealfall sind alle Schüler einer Klasse am Unterricht anwesend, während eine Lernkontrolle geschrieben wird. Das war jedoch nicht immer der Fall und deshalb variierte auch die Anzahl der erhaltenen Lernkontrollen. Für die Untersuchung wurden nur diese Lernkontrollen berücksichtigt, die vollständig in ihrer Anzahl waren, d. h. wenn ein Schüler wenigere als die vorgesehenen Lernkontrollen abgegeben hatte, wurden diese bei der Auswertung nicht mitberechnet. Manche Lehrer gaben diese schriftliche Leistungen der Schüler korrigiert ab (man konnte jedoch die ursprünglichen Schülerlösungen erkennen), andere Lehrer hatten die Fehler unmarkiert gelassen.

Die Lernkontrollen wurden sowohl auf Fehlerarten als auch auf Fehlerhäufigkeiten untersucht. Hierbei wurden alle Übungstypen der Lernkontrollen berücksichtigt. Die Bewertung erfolgte analog zu den Aufgabentypen. Das bedeutet, dass die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler aller Klassen jeweils bezogen auf einen bestimmten Aufgabentyp ermittelt wurden. Beispielsweise wurden so alle Aufgaben des Typs „horizontale Addition“ zusammenfassend bewertet. Hierbei wurde so vorgegangen, dass diejenigen Schülerinnen und Schüler, die mehr als 50% der Aufgaben richtig gelöst hatten, für diesen Aufgabentyp ein „R“ in der Tabelle erhielten. Diejenigen, die weniger als 50% der Aufgaben richtig lösen konnten, erhielten ein „F“. Die Zusammenfassung aller Tabellen liefert so ein Gesamtbild der relativen Häufigkeit falscher und richtiger Lösungen, bezogen auf den Aufgabentyp. In dieser Darstellung wurden demnach rein quantitative Gesichtspunkte berücksichtigt. Eine qualitative Fehleranalyse erfolgte in dieser Phase nicht.

Die Anzahl der Schüler, die in der Auswertung ein „F“ erhielten (ΣF), wurde in Bezug zu der Anzahl der Schüler des entsprechenden Jahrgangs (N) gesetzt, so berechnete man die relative Anzahl der Schüler (Rf), die mehr als 50% der Aufgaben eines bestimmten Aufgabentyps in den Lernkontrollen falsch gelöst haben. Stets wurde dafür folgende Formel benutzt:

$$Rf = \frac{\Sigma F * 100}{N}$$

Zunächst wird die Anzahl der Erstklässler präsentiert, die beim Lösen der Aufgaben in den Lernkontrollen Schwierigkeiten hatten. Mit welchen Inhalten ihre größten Schwierigkeiten verbunden waren, wird in der nächsten Tabelle sichtbar:

Aufgabentypen in den Lernkontrollen der ersten Klasse	Anzahl der Schüler mit über 50 % falscher Lösungen (ΣF)	RF (%)
Raumorientierung	1	0,85
Größenvergleiche	1	0,85
Zuordnungen	5	4,24
Serialität	7	5,93
Mengenvergleiche	7	5,93
Übertragen von Daten in Tabelle	3	2,54
Zuordnung zwischen Zahlenbilder und Zahlsymbolen	6	5,08
Zahlenvergleiche	24	20,33
Nachbarzahlen	20	16,95
Horizontale Addition	16	13,56
Zuordnung zwischen Zahlen und Summen	17	14,41
Horizontale Subtraktion	7	5,93
Zuordnung zwischen Zahlen und Differenzen	10	8,47
Vergleich zwischen Differenzen	18	15,25
Aufreihung von Zahlen	5	4,24
Zuordnung zwischen Summen und Produkten	11	9,32
Sachrechnen	7	5,93

Tabelle 12: Schülerinnen und Schüler der ersten Klasse, die mehr als 50% der Aufgaben in den Lernkontrollen falsch gelöst haben

Wie sich aus der Tabelle entnehmen lässt, sind die meisten Fehler in der ersten Klasse in Aufgaben aufgetreten, in denen Vergleiche zwischen Zahlen (20,33%) und Differenzen (15,25%) durchgeführt werden und die Nachbarzahlen (16,95%) ermittelt werden sollten. Dies deutet auf Schwierigkeiten bei der Zahlerfassung und beim Subtrahieren hin. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Fehlerrate von Schülerinnen und Schülern in der zweiten Klasse:

Aufgabentypen in den Lernkontrollen der zweiten Klasse	Anzahl der Schüler mit über 50% falscher Lösungen	RF (%)
Mengenbildung	7	5,0
Datendarstellung in einer Tabelle mit doppeltem Zugang	11	7,9
Zuordnungen	3	2,2
Reihenbildung	10	7,2
Zuordnung zwischen Mengen und Zahlensymbole	5	3,6
Erkennen und Bilden von Teilmengen	8	5,8
Größenvergleiche	35	25,2
Symmetrie	30	21,6
Daten erheben und in Tabellen eintragen	42	30,2
Längenmessungen	17	12,2
Zeit ablesen und angeben	14	10,1
Legen von Beträgen mit Geld	38	27,9
Zählen	7	5,0
Zahlzerlegungen	23	16,5
Addition	7	5,0
Subtraktion	11	7,9
Halbieren	19	13,7
Addition mit Zehnerbildung	31	22,4
Vergleich zwischen Summen und Differenzen	35	25,2
Schriftliche Subtraktion	24	17,3
Vergleich von Summen u. Differenzen mit Zahlen	49	35,3
Rechnen mit abgebildetem Geld	36	25,9
Einmaleins	30	21,6
Multiplikative Zahldarstellungen erkennen	14	10,1
Einmaleinsaufgaben und Umkehraufgaben	15	10,8

Tabelle 13: Schülerinnen und Schüler der zweiten Klasse, die mehr als 50% der Aufgaben in den Lernkontrollen falsch gelöst haben

Hier zeigt sich, dass in der zweiten Klasse große Schwierigkeiten Aufgaben bereiten, die auf der ikonischen Ebene beruhen. Die Datenerhebung und -darstellung in Tabellen mit zwei Eingängen (30,2%) sowie das Rechnen mit abgebildetem Geld bzw. das Legen von Beträgen in verschiedenen Kombinationen (27,9 %) ist für Schüler in diesem Alter problematisch. Als der schwierigste Aufgabentyp ergab sich jedoch das Vergleichen von Summen bzw. Differenzen mit Zahlen (35,3%).

In der dritten Klasse sind die Subtraktion mit Zehnerbildung (40,4%), gefolgt von der Multiplikation mit zweistelligem Multiplikator (35,3%) und dem Sachrechnen (37,7%) (und zwar Sachaufgaben, in denen mehr als eine Grundrechenart gefordert wird), die Aufgabentypen, die für die höchste Fehlerrate „sorgen“. Dies lässt sich an den Werten nachfolgender Tabelle ablesen:

Aufgabentypen in den Lernkontrollen der dritten Klasse	Anzahl der Schüler mit über 50% falscher Lösungen	RF (%)
Bildung von Mengen und Teilmengen	0	
Ergänzungsaufgaben (fehlender Summand)	36	31,6
Horizontale Subtraktion	18	15,8
Addition mit Zehnerbildung	25	21,9
Subtraktion mit Zehnerbildung	46	40,4
Schriftliche Addition zweistell. Zahlen	10	8,8
Schriftliche Subtraktion zweistell. Zahlen	29	25,4
Multiplikation horizontal (Gleichungen)	24	21,1
Schriftliche Multiplikation mit einstell. Multiplikator	10	8,8
Division horizontal (Gleichungen)	17	14,9
Schriftliche Division mit einstell. Divisor	9	7,9
Analyse von Zahlen in ihre Stellenwerte	15	13,2
Synthese von Zahlen anhand von Stellenwerten	18	15,8
Zahlenreihen bilden (Zählen in Schritten)	22	19,3
Addition dreistelliger Zahlen	21	18,4
Subtraktion dreistelliger Zahlen	24	21,1
Sachrechnen mit Addition und Subtraktion	43	37,7
Sachrechnen mit Addition und Division	34	29,8
Sachrechnen mit Addition	6	5,3
Sachrechnen mit mehreren Operationen	30	26,3
Proberechnung von Addition	12	10,5
Proberechnung von Subtraktion	27	23,7
Addition im Tausenderraum	5	4,4
Subtraktion im Tausenderraum	7	6,1
Schriftliche Multiplikation mit zweistell. Multiplikator	41	35,3
Proberechnung Multiplikation	36	25,9
Division dreistelliger Zahlen	17	14,9
Sachrechnen mit Multiplikation	21	18,4
Sachrechnen mit Division	23	20,2

Tabelle 14: Schülerinnen und Schüler der dritten Klasse, die mehr als 50% der Aufgaben in den Lernkontrollen falsch gelöst haben

Zum Abschluss erfolgt eine Übersicht über die Themenbereiche, die Schülerinnen und Schülern in der vierten Klasse große Probleme bereiteten. Folgende Tabelle verdeutlicht sie:

Aufgabentypen in den Lernkontrollen der vierten Klasse	Anzahl der Schüler mit über 50% falscher Lösungen	RF (%)
Messungen	28	20,3
Flächenberechnung von Rechtecken	55	39,9
Umfangberechnung von Rechtecken	64	46,0
Volumenberechnung	62	44,6
Flächenberechnung von Rechtecken auf Gitternetz	52	37,4
Berechnung von Gewichten	55	39,6
Analyse vierstelliger Zahlen	29	20,9
Nachbarzahlen vierstelliger Zahlen	47	33,9
Schriftliche Addition	20	14,4
Schriftliche Subtraktion	53	38,1
Sachrechnen mit Addition	30	21,6
Berechnung fehlender Faktoren in Summen	53	38,1
Sachrechnen mit Subtraktion	37	26,6
Formulierung inverser Sachaufgaben (Addition)	56	40,3
Schriftliche Multiplikation	44	31,7
Summe * Zahl	76	55,0
Differenz * Zahl	78	56,5
Sachrechnen mit Multiplikation	42	30,2
Summe : Zahl	84	60,4
Differenz : Zahl	93	66,9
Formulierung inverser Sachaufgaben (Multiplikation)	79	57,2
Analyse mehrstelliger Zahlen	30	21,6
Nachbarzahlen mehrstelliger Zahlen	46	33,1
Sachrechnen mit Bruchzahlen	17	12,2
Sachrechnen mit Dezimalzahlen	41	29,5
Erkennen von Stammbrüchen	36	25,9
Vergleich zwischen Bruchzahlen	19	13,7
Bilden äquivalenter Bruchzahlen	24	17,3
Addition zwischen Dezimalzahlen	23	16,5
Subtraktion zwischen Dezimalzahlen	29	21,0
Sachrechnen mit mehreren Multiplikationen	45	32,6

Tabelle 15: Schülerinnen und Schüler der vierten Klasse, die mehr als 50% der Aufgaben in den Lernkontrollen falsch gelöst haben

Hier lässt sich entnehmen, dass Schüler in der vierten Klasse die meisten Fehler in Aufgabentypen errechneten, in denen die Division involviert war (60,4% und 66,9%). In den Aufgabentypen „Summe bzw. Differenz : Zahl“ war der Divisor zweistellig und die Schüler sollten das Ergebnis auf zwei Arten ermitteln, durch und ohne Anwendung des Distributivgesetzes. Mit Divisionen mussten sich die Schüler auch auseinandersetzen, als sie inverse Sachaufgaben formulieren und lösen sollten. War für die Lösung der ursprünglichen Sachaufgabe eine Multiplikation nötig, so ergab sich bei der Umformung der Aufgabe eine Division. Auch in diesen Divisionen ereigneten sich viele Fehler (57,2%).

Die Werte aus den vorhergehenden Tabellen zeigen, dass mit zunehmender Schwierigkeit des Lehrstoffes auch die Fehlerrate der Schüler in den Lernkontrollen steigt. Bezogen auf die Rechenoperationen dominiert die Subtraktion als die schwierigste Rechenoperation bis zur dritten Klasse. In der dritten Klasse verursacht die Multiplikation zusätzlich viele Fehler, wobei in der vierten Klasse die Division den Hauptanteil an Fehlern ausmacht.
Es stellt sich die Frage, ob dieses Ergebnis auch von allen Lehrern der Schüler so erwartet wurde. Aus diesem Grunde soll hier kurz auf die Äußerungen der 47 Lehrer im Fragebogen zur nachfolgender Frage eingegangen werden: „In welcher der vier Grundrechenarten begehen die Schüler die meisten Fehler in der Klasse, in der sie unterrichten?“ Die Antworten der Lehrer sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	Lehrerbefragung						
Klassen	Addit.	Subtr.	Multip.	Divis.	Sub.+ Div.	Mult.+Sub.	Summe
Klasse 1		7	6				13
Klasse 2		12		1			13
Klasse 3		2	3	4	1	1	11
Klasse 4			1	9			10

Tabelle 16: Einschätzungen der Lehrer zu den fehleranfälligsten Operationen in den vier ersten Klassen

In der ersten Klasse sind nach Meinung der Lehrer zwei Operationen fehleranfällig. Den ersten Platz nimmt die Subtraktion (7) und den zweiten die Multiplikation (6) ein. Alle Lehrer der zweiten Klasse lokalisierten die meisten Schwierigkeiten der Schüler in der Subtraktion (12) außer einem, der die Division angab. In der dritten Klasse erweisen sich mehrere Operationen als schwierig: die Multiplikation, die Division und die Subtraktion. Vier von zehn befragten Lehrern führten die Division und drei die Multiplikation an. Die übrigen drei zählten nur die Subtraktion allein (1), oder zusammen mit der Division (1) und mit der Multiplikation (1) auf. In der vierten Klasse wurden zehn 10 Lehrer befragt. Neun von ihnen notierten die Division und einer die Multiplikation.

Wie sich aus den Lehrerantworten herausstellt, steht die Subtraktion in den drei ersten Klassen im Vordergrund. Die Schwierigkeiten, die mit der Einführung der Subtraktion in der ersten Klasse zu erwarten sind, steigern sich in der zweiten Klasse und bleiben in der dritten Klasse bestehen. Danach verlagert sich der Schwerpunkt auf die Division. Die schriftliche Division wird in der dritten Klasse eingeführt doch ihre Vertiefung und intensive Übung erfolgt in der vierten Klasse. Daher dominiert sie als fehleranfällige Operation in der dritten und besonders in der vierten Klasse der griechischen Grundschule. Die Einschätzungen der Lehrer stimmten mit den Ergebnissen aus den Lernkontrollen überein. Aus beiden Erhebungen wird deutlich, dass die Subtraktion und die Division die Themenbereiche der Arithmetik bilden, die die größten Anforderungen an den griechischen Schülern stellen.

Das Interesse der Verfasserin richtete sich besonders auf die Ergebnisse aus den vierten Klassen, weil bis dahin alle Operationen eingeführt und eingehend geübt werden. Sowohl die Lernkontrollen als auch die Lehrerbefragung lokalisierten die Schwierigkeiten der Schüler in dieser Klasse erwartungsgemäß in der Division. Aus diesem Grunde wurde dieser Bereich für die weitere qualitative Arbeit ausgewählt. Die Auswahl der Division als Thema für die weitere Untersuchung rechtfertigt sich aber auch aus der Tatsache, dass in Griechenland noch keine spezifische Untersuchungen zur Division vorliegen. Es ist ein relativ unerforschter Bereich, der aber wegen der besonderen schulischen Relevanz dringend näher untersucht werden sollte. Auf die Komplexität des Algorithmus der schriftlichen Division wird im folgenden Kapitel näher eingegangen.

4.2 Zweite Phase

4.2.1 Zur Komplexität des schriftlichen Rechenverfahrens der Division

Seit Jahren wird intensiv darüber debattiert, ob im Zeitalter der Computertechnologie das Lehren der schriftlichen Rechenverfahren in der Schule noch Sinn macht. Die Gegner der schriftlichen Rechenverfahren sehen hierin keinen Vorteil, da im Alltags- und Berufsleben schriftliche Rechenverfahren kaum angewendet, sondern überwiegend Taschenrechner oder Computer eingesetzt werden. Die dadurch gewonnene Unterrichtszeit könnte für das Einüben anderer mathematischer Fähigkeiten, wie z.B. zum Problemlösen, zur Geometrie oder zum Anwenden genutzt werden, deren Relevanz unstrittig ist. Auch wichtige Prinzipien des Lehr- und Lernprozesses wie, z.B. das entdeckende Lernen, das exemplarische Lernen und das fächerübergreifende Lernen, könnten mehr Beachtung im Unterrichtsgeschehen finden. Bedenkt man weiterhin, dass jeder Schüler seinem eigenen Lernrhythmus und seinen Lernstrategien folgt, ist es fatal, einheitliche Anforderungen per Richtlinien an von Natur aus unterschiedliche Schüler zu stellen. Durch innere Differenzierung des Unterrichts könnten die Unterrichtsziele und die Anforderungen an die Schüler variiert werden.

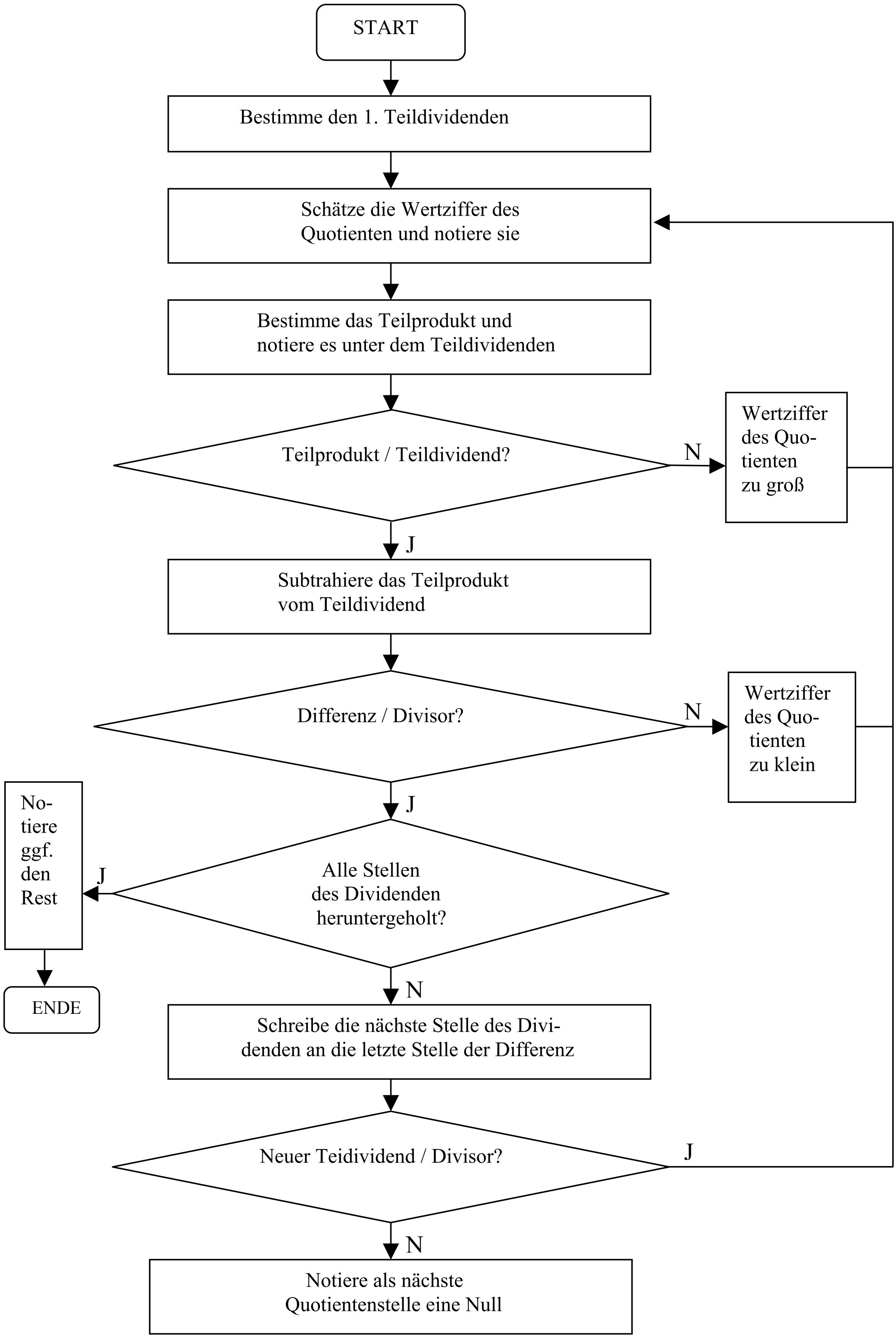
Neben diesen Äußerungen gibt es auch Argumente für das Beibehalten der schriftlichen Rechenverfahren. Jeder sollte in der Lage sein, selbst die Richtigkeit durchgeführter Rechnungen zu kontrollieren, da Irrtümer auch beim Benutzen von Taschenrechnern bzw. Computern durchaus möglich sind. Wenn man die schriftlichen Rechenverfahren beherrscht, kann man eher die Arbeitsweisen von Taschenrechnern bzw. Computern verstehen. Zusätzlich tragen die schriftlichen Rechenverfahren dazu bei, die Wirksamkeit algorithmischer Verfahren zu erfahren, sowie das dezimale Stellenwertsystem besser zu verstehen. Ihre breite Einsetzbarkeit ist auch bei nichtdezimalen Stellenwertsystemen faszinierend (vgl. Lorenz & Radatz, 1993, S.155ff; Padberg, 1996, S. 154ff.).

Vermutlich könnte man beide Ansichten mit weiteren Argumenten ergänzen. Eins ist jedoch festzuhalten. Das Lehren der schriftlichen Rechenverfahren ist mit einer jahrhundertealten schulischen Tradition verbunden (Lorenz & Radatz, 1993, S. 155), die man nicht ohne Bedenken aufgeben kann. In manchen Ländern der Europäischen Gemeinschaft wird darüber diskutiert, das schriftliche Dividieren, das die Schüler und Lehrer besonders quält, nicht mehr verpflichtend als Unterrichtsthema für alle Schüler vorzuschreiben (ebd., S. 167). Solange es aber keine gesetzlichen Regelungen gibt und die schriftlichen Rechenverfahren sowohl in Griechenland als auch in Deutschland wichtiger Bestandteil der Richtlinien und Lehrpläne der Primarstufe sind, lohnt es sich einen näheren Blick auf sie zu werfen und besonders auf die Division, die wegen ihrer Komplexität eine herausragende Stellung einnimmt.

Das Verfahren der schriftlichen Division gilt zu Recht als das schwierigste der schriftlichen Rechenverfahren. Es stellt die größten Anforderungen nicht nur an rechenschwache Schüler, da Verfahrenskenntnisse nicht lediglich bezogen auf die Division, sondern auch auf alle übrigen Rechenverfahren gefordert werden. Unabhängig von den Divisionsschreibweisen, wird beim schriftlichen Dividieren immer wieder folgende Schrittfolge durchlaufen:

- Bestimmen des / (Teil-) Dividenden,
- Überschlagsmäßiges Dividieren,
- schriftliches Multiplizieren,
- schriftliches Subtrahieren

Die Komplexität des Verfahrens der schriftlichen Division wird aus dem nachfolgenden Flussdiagramm deutlich (aus Padberg, 1996, S. 232):



An dieser Stelle wird noch mal an Hand einer Aufgabe aus dem griechischen Lehrbuch an das Normalverfahren in Griechenland erinnert:

196 | 4 -16 | 49 36 -36 0	• Eine Ziffer hat der Divisor, eins trennen wir links vom Dividenden und sagen: • Die 4 geht in die 1 nicht. Wir trennen auch die 9. • Die 4 geht in die 19 4. 4 mal 4…16 von 19…3. • Wir holen die 6 herunter und wir haben 36. Die 4 geht in die 36 9. 9 mal 4…36, von 36…0. (aus „Meine Mathematik“, Schülerbuch, 4. Klasse, Bd. 1, S. 122)

Die dabei auftretenden Schwierigkeiten kann man in Anlehnung an Gerster (1982a, S. 165) folgendermaßen klassifizieren:

(1) Schwierigkeiten der Orientierung auf die beim jeweiligen Rechenschritt erforderlichen Zahlen und Ergebnisziffern:
- Welche Ziffern sind jeweils zu einem Teildividenden zusammenzufassen?
- Wo sind Teilquotienten und Teilprodukte jeweils zu notieren?
- Welche ist die letzte Teildivision?

(2) Schwierigkeiten beim Überschlagen der Quotientenziffern:
- Wie oft passt der Divisor in den Teildividenden?
- Wie prüft man, ob die Quotientenziffer zu klein oder zu groß ist?
- Wie ist die falsche Quotientenziffer (ein falsches Teilprodukt, eine Teildifferenz) zu korrigieren?

(3) Schwierigkeiten beim Ausrechnen der Teilprodukte (Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator, aber nicht im Multiplikationsschema)

(4) Schwierigkeiten beim Subtrahieren (innerhalb der Divisionsstaffel, ohne Platz für Übertragsziffern)

(5) Schwierigkeiten mit der Null:
- im Dividenden
- im Quotienten

Beim Dividieren in großen Zahlenräumen bzw. bei mehrstelligen Dividenden nehmen die Schwierigkeiten des Verfahrens erheblich zu, sowie die Anzahl der möglichen Fehlermuster (vgl. Lorenz & Radatz, 1993, S. 166).

Die oben aufgeführten Schwierigkeiten sind in dem durchgeführten diagnostischen Test berücksichtigt worden und wurden dort variiert und miteinander kombiniert. Auf die Konstruktion des Tests sowie auf die Schwierigkeitsmerkmale der Testaufgaben wird in der Folge Bezug genommen.

4.2.2 Der diagnostische Test

4.2.2.1 Testkonstruktion

Vor der Erstellung des Tests müssen einige Überlegungen angestellt werden, von denen auch die Qualität des Tests abhängig ist. Zunächst muss festgestellt werden, welche Lernziele und in welchem Umfang diese in dem Test abgeprüft werden sollen. Bei dem vorliegenden Test handelt es sich um einen Divisionstest, das heißt das abzuprüfende Lernziel ist das Beherrschen des Verfahrens der schriftlichen Division. Im griechischen Lehrbuch wird das schriftliche Dividieren mit dreistelligem Divisor in der 4. Klasse vorgestellt. In den Buchaufgaben treten auch vierstellige Divisoren in derselben Lehreinheit auf. Eingehender wird jedoch das Verfahren mit einstelligem und zweistelligem Divisor geübt. Die Reichweite des Lehrstoffes in Griechenland wurde bei der Auswahl der Testaufgaben berücksichtigt.

Erste Anregungen zum Aufbau des Tests lieferten bereits bestehende diagnostische Tests zur schriftlichen Division (Gerster, 1982a; Bathelt, Post & Padberg 1986; Padberg, 1996) sowie das Studieren der griechischen Schulbücher. Die Verfasserin nutzte ihre Freiheit als Testautorin und wählte die Testaufgaben selber aus. Diese stammen aus dem griechischen Schulbuch, aus früher durchgeführten deutschen Tests oder wurden von ihr selbst konstruiert.

Auf der Grundlage bereits entwickelter Divisionstests (Padberg, 1996, S. 247ff.) wurde eine Liste von Schwierigkeitsmerkmalen erstellt, die in dem Test berücksichtigt werden sollte:

1. Aufgaben mit einstelligem Divisor:

   - Größe des Divisors (kleiner oder gleich 5 bzw. größer 5)
   - Größe der Quotientenziffern (kleiner oder gleich 5 bzw. größer 5)
   - Anzahl der Zehnerüberschreitungen beim Bestimmen der Teildifferenzen
   - Relation der Anzahl der Dividendenstellen zur Anzahl der Quotientenstellen (gleiche Anzahl bzw. größer)
   - wiederholtes Herunterholen derselben Ziffer oder der Null
   - Null im Quotienten (mittig oder am Ende) als Folge einer „aufgegangenen“ Teildivision sowie des anschließenden „Herunterholens“ einer Ziffer, die kleiner als der Divisor ist
   - wiederholt gleicher Rechenschritt
   - mit bzw. ohne Rest

2. Aufgaben mit zweistelligem Divisor. Neben den gerade genannten Schwierigkeitsdimensionen kommt hier nur die Größe des Divisors als entscheidender Faktor hinzu:

   - der Divisor liegt zwischen 10 und 20.
   - der Divisor ist eine reine Zehnerzahl.
   - der Divisor ist eine gemischte Zehnerzahl
     - zehnernah
     - nicht zehnernah und kleiner als 50
     - nicht zehnernah und größer als 50.

3. Aufgaben mit dreistelligem Divisor. Auch hier kommt die Größe des Divisors als besonderer Faktor hinzu. Hier wäre Folgendes zu unterscheiden:

    - der Divisor liegt zwischen 100 und 200.
    - der Divisor ist eine reine Hunderterzahl.
    - der Divisor ist eine gemischte Hunderterzahl
        - hunderternah
        - nicht hundertnah und kleiner als 500
        - nicht hundertnah und größerer als 500.

Problematischer war jedoch der Umfang des Tests.

> „Das *prinzipielle* Problem beim Erstellen der Tests liegt jedoch darin, dass wir aus Gründen des Testumfangs nicht von *jedem* Aufgabentyp *mehrere* gleichschwere Aufgaben in den Test aufnehmen können“ (Padberg, 1996, S. 246).

So wurde der Versuch unternommen, solche Aufgaben auszusuchen, die die fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmale genügend oft beinhalten würden, um zufällige von systematischen Fehlern unterscheiden zu können (in dieser Untersuchung wurde ein Fehler als *systematisch* gewertet, wenn er im Rahmen dieses Tests von demselben Schüler mindestens dreimal gemacht wurde). In den gestellten Aufgaben sollten verschiedene Schwierigkeitsmerkmale kombiniert werden. Es gibt jedoch bestimmte Kompetenzen, die nach Meinung der Verfasserin fundamental für die schriftliche Division sind und die das Lokalisieren der Schwächen der Schüler erleichtern, wenn sie getrennt voneinander untersucht werden:

- das Beherrschen der typischen Verfahrenskenntnisse der Division
- das Bewältigen von Zehnerüberschreitungen beim Bestimmen der Teildifferenzen
- das Arbeiten mit Nullen im Quotienten oder im Dividenden.

Diese drei Bereiche wurden als die übergeordneten Schwierigkeitsmerkmale der Testaufgaben festgelegt. Nach diesen übergeordneten Merkmalen wurden die Testaufgaben in drei Gruppen eingeteilt. Jede Aufgabengruppe überprüfte eine dieser grundsätzlichen Kompetenzen:

- In der ersten Gruppe wurde darauf geachtet, dass beim Subtrahieren *keine Zehnerübergänge* auftreten. Durch das Ausschalten der Schwierigkeiten beim Subtrahieren erhoffte die Verfasserin deutlicher feststellen zu können, ob die für die Division typischen Verfahrenskenntnisse bei den Kindern vorhanden waren (vgl. Gerster, 1982a, S. 166).

- In der zweiten Gruppe wurden die Schwierigkeiten erhöht. Der Divisor war in den vier Aufgaben dieser Gruppe zweistellig. Das heißt, dass die Berechnung der Teilprodukte nicht durch einfache Einmaleinsfälle möglich war. Zusätzlich traten beim Berechnen der Teildifferenzen *Zehnerübergänge* auf. Dadurch sollte zunächst geprüft werden, ob die Schüler die erforderlichen Verfahrenskenntnisse mit zweistelligem Divisor beherrschen und ob sie die Zehnerüberschreitungen bei den Subtraktionen bewältigen können.

- In der dritten und letzten Gruppe wurde den Schwierigkeiten der zweiten Gruppe ein weiteres Schwierigkeitsmerkmal hinzugefügt: die Existenz von *Null oder Nullen im Dividenden oder im Quotienten*. Hieraus sollte ersichtlich werden, wie die Schüler in den verschiedenen Fällen mit der Null arbeiten. In dieser Gruppe wurden die höchsten rechnerischen Anforderungen an die Schülern gestellt.

Zusätzlich wurden die Items jeder Gruppe mit weiteren Schwierigkeitsdimensionen versehen. Die Anzahl der Items in jeder Gruppe wurde auf 5 festgelegt, um systematische von zufälligen Fehlern zu unterscheiden und um darin gleichzeitig mehrere Schwierigkeitsmerkmale abzutesten.

So entstanden 15 Aufgaben. 7 Aufgaben hatten einen einstelligen Divisor, 7 Aufgaben einen zweistelligen Divisor und 1 Aufgabe einen dreistelligen Divisor. Zusätzlich wurde eine freiwillige Division (mit zweistelligem Divisor) gestellt (C.6), die für die Schüler konzipiert wurde, die die übrigen Aufgaben bewältigt hatten und noch mehr rechnen wollten. Bei der Reihung der Aufgaben erschien es zweckmäßig, an den Anfang des Tests und an den Anfang jeder Aufgabengruppe einige leichtere Aufgaben zu stellen, sogenannte „Eisbrecher“, um die Schüler zu ermutigen, am Test weiterzuarbeiten. Zusätzlich wurden die Aufgaben entsprechend ihrem Schwierigkeitsgrad ansteigend angeordnet (vgl. Rosemann, 1984, S. 181). Die 15 Aufgaben waren in drei Gruppen (A, B und C) unterteilt und wurden durch horizontale Trennungslinien voneinander abgestellt.
Die nachfolgenden Tabellen vermitteln einen Überblick über die in dem Test eingesetzten Aufgaben und die darin enthaltenen Schwierigkeitsmerkmale.

<table>
<tr><td>A.1
$\begin{array}{r|l} 6396 & \underline{3\ \ } \\ \underline{-6\ \ } & 2132 \\ 03 & \\ \underline{-3\ } & \\ 09 & \\ \underline{-9} & \\ 06 & \\ \underline{-6} & \\ 0 & \end{array}$
(Padberg, 1996, S. 313)</td><td>- Divisor einstellig und < 5
- Teildivisionen gehen an jeder Stelle auf</td></tr>
<tr><td>A.2
$\begin{array}{r|l} 3689 & \underline{8\ \ } \\ \underline{-32\ \ } & 461 \\ 048 & \\ \underline{-48\ } & \\ 009 & \\ \underline{-8} & \\ 1 & \end{array}$</td><td>- Divisor einstellig und > 5
- erster Teildividend zweistellig
- Teildivisionen gehen nicht an jeder Stelle auf
- Ergebnis mit Rest</td></tr>
<tr><td>A.3
$\begin{array}{r|l} 832 & \underline{4\ \ } \\ \underline{-8\ \ } & 208 \\ 03 & \\ \underline{-0\ } & \\ 32 & \\ \underline{-32} & \\ 00 & \end{array}$</td><td>- Divisor einstellig und < 5
- Teildividend < Divisor, Null im Quotienten</td></tr>
<tr><td>A.4
$\begin{array}{r|l} 8600 & \underline{4\ \ } \\ \underline{-8\ \ \ } & 2150 \\ 06 & \\ \underline{-4\ \ } & \\ 20 & \\ \underline{-20\ } & \\ 000 & \\ \underline{-0} & \\ 0 & \end{array}$</td><td>- Divisor einstellig und < 5
- Teildivisionen gehen nicht an jeder Stelle auf
- Gleiche Ziffern nacheinander herunterholen
- End-Null herunterholen, wenn vorhergehende Teildivision aufgeht
- Null dividieren (End-Null im Quotienten)</td></tr>
<tr><td>A, 5.
$\begin{array}{r|l} 493 & \underline{21\ } \\ \underline{-42\ } & 23 \\ 073 & \\ \underline{-63} & \\ 10 & \end{array}$</td><td>- Divisor zweistellig
- Teildivisionen gehen nicht auf
- Ergebnis mit Rest</td></tr>
</table>

Tabelle 17: Die Testaufgaben der Gruppe A und ihre Merkmale

<table>
<tr><td>B.1
2310 | 9
-18 | 256
051
-45
060
-54
06</td><td>- Divisor einstellig > 5
- Zehnerübergänge in den Subtraktionen
- End-Null herunterholen, wenn vorhergehende Teildivision nicht aufgeht
- Ergebnis mit Rest</td></tr>
<tr><td>B.2
224 | 18
-18 | 12
044
-36
08</td><td>- Divisor zweistellig
- Zehnerübergänge in den Subtraktionen
- Herunterzuholende Ziffer gleich Teildifferenz
- Ergebnis mit Rest</td></tr>
<tr><td>B.3
191 | 44
-176 | 4
015</td><td>- Divisor zweistellig
- Erster Teildividend dreistellig
- Zehnerübergang in der Subtraktion
- Ergebnis mit Rest</td></tr>
<tr><td>B.4
2430 | 18
-18 | 135
063
-54
090
-90
00</td><td>- Divisor zweistellig
- Auch Zehnerübergänge in den Subtraktionen
- Null im Dividenden und daraus
- End-Null herunterholen, wenn vorhergehende Teildivision nicht aufgeht</td></tr>
<tr><td>B.5
51152 | 24
-48 | 2131
031
-24
075
-72
032
-24
08</td><td>- Divisor zweistellig
- Auch Zehnerübergänge in den Subtraktionen
- Ergebnis mit Rest</td></tr>
</table>

Tabelle 18: Die Testaufgaben der Gruppe B und ihre Merkmale

C.1	8040 | 2 -8 | 4020 00 -0 04 -4 00 -0 0	- Divisor einstellig < 5 - Null dividieren (Zwischen-Null im Quotienten) - Endnull herunterholen, wenn vorhergehende Teildivision aufgeht - Null dividieren (End-Null im Quotienten)
C.2	362286 | 9 -36 | 40254 002 -0 22 -18 048 -45 036 -36 00	- Divisor einstellig > 5 - Teildividend < Divisor, Null im Quotienten - Herunterzuholende Ziffer gleich Teildifferenz - Auch Zehnerübergänge in den Subtraktionen
C.3	13104 | 56 -112 | 234 0190 -168 0224 -224 000	- Divisor zweistellig - Alle Teildividenden dreistellig - Auch Zehnerübergänge in den Subtraktionen
C.4	75665 | 37 -74 | 2045 016 -00 166 -148 0185 -185 000	- Divisor zweistellig - Teildividend < Divisor, Null im Quotienten - Gleiche Ziffern nacheinander herunterholen

Tabelle 19: Die Testaufgaben 1-4 der Gruppe C und ihre Merkmale

C.5 851400 | 346 -692 | 2460 1594 -1384 02100 -2076 00240 -000 240	- Divisor dreistellig - Teildividenden vierstellig - Gleiche Ziffern nacheinander herunterholen - Null im Dividenden und daraus - End-Null herunterholen, wenn vorhergehende Teildivision nicht aufgeht - Teildividend < Divisor, Null im Quotienten
C.6 810011 | 67 -67 | 12089 140 -134 00601 -536 0651 -603 048	- Divisor zweistellig - Teildividend < Divisor, Null im Quotienten - Gleiche Ziffern nacheinander herunterholen - Zehnerübergänge in allen Subtraktionen - Ergebnis mit Rest

Tabelle 20: Die Testaufgaben 5-6 der Gruppe C und ihre Merkmale

4.2.2.2 Durchführung der Tests

4.2.2.2.1 Testinstruktionen - Anweisungen

Zu Beginn der Testsitzung wurde den Schülern in wenigen Sätzen das *Ziel* des Tests erläutert. Ihnen wurde erklärt, dass dieser im Rahmen einer wissenschaftlichen Arbeit an einer deutschen Universität durchgeführt wurde, um die Leistungen der Schüler bezogen auf die schriftliche Division festzustellen. Danach wurde erklärt, was von den Schülern gefordert wurde. Sie sollten ihre Lösungen deutlich auf dem Blatt notieren. Den Schülern stand während des Tests keinerlei Material zur Verfügung. Ihnen wurde von vornherein erklärt, dass sie für ihre Leistungen keine Bewertung bekommen würden. So sollten mit der Ziffernzensur verbundene Ängste vermieden werden.

In der Folge wurden die Schüler angehalten, ihren Schreibtisch nicht als Notizblatt zu benutzen, sondern alles auf ihrem Arbeitsblatt festzuhalten, um somit alle Notizen und begleitende Operationen zur Verfügung zu haben. Dies erwies sich in der Folge als große Hilfe, da in vielen Fällen die Vorgänge und die Stadien erkennbar wurden, die dem Vollenden einer Aufgabe vorangingen und die sonst verborgen geblieben wären.

Wichtig war ferner die Angabe der *Bearbeitungszeit*. Diese durfte die 60 Minuten nicht überschreiten. In den Instruktionen wurden die Schüler darauf hingewiesen, dass der Test aus drei Aufgabengruppen besteht, die mit entsprechenden Großbuchstaben versehen waren. Da die Schüler jedoch einen unterschiedlichen Arbeitsrhythmus hätten, würde es Schüler geben, die sich in dieser Zeit, mit allen Aufgaben und andere, die sich mit wenigeren Aufgaben auseinandersetzen würden. Um zu vermeiden, dass eine Aufgabengruppe von manchen Schülern komplett nicht bearbeitet würde, wurden die Schüler angeregt, sich ungefähr 20 Minuten mit jeder Gruppe zu beschäftigen und dann mit der nächsten fortzufahren.

4.2.2.2.2 Testablauf

Der Test wurde den Schülern klassenweise während der Unterrichtszeit vorgelegt und von der Verfasserin durchgeführt. Die Verfasserin war den Kindern schon von der Phase der Sammlung ihrer schriftlichen Leistungen (Lernkontrollen) bekannt. Es bestand jedoch keine persönliche Beziehung, welche die Auswertung der Tests eventuell durch spezifische Erwartungen beeinflussen könnte. So wurde die Durchführungsobjektivität im Sinne von Lienert & Raatz (1994, S. 8) unterstützt. Die Tatsache, dass der Test von einer Person gestellt wurde, die den Kindern schon mal begegnet war, hat zu einer vertrauteren Atmosphäre beigetragen.

In den wenigsten Fällen war der Klassenlehrer während der Testdurchführung präsent, ohne sich jedoch zu beteiligen. Meist verließ er das Klassenzimmer, um die Untersuchung nicht zu behindern. Während die Schüler arbeiteten, ging die Verfasserin im Klassenraum herum und beobachtete ihre Lösungen. Den Schülern wurden keine Rückmeldungen zu ihren Aufgabenlösungen gegeben. Sie wurden nur angehalten, mit einer anderen Aufgabe fortzufahren, wenn sie bei einer Aufgabe „stecken“ blieben.

4.2.3 Auswertung des Tests

Der Test wurde zwei Wochen vor Ende des Schuljahrs 1997/98 durchgeführt. Insgesamt nahmen an den Tests 189 Kinder aus zwölf Klassen in sieben Schulen teil. Alle Schüler besuchten die vierte Klasse.

Zum Zeitpunkt der Untersuchung erfolgte in allen Klassen die Behandlung der Bruch- bzw. der Kommazahlen. Die Unterrichtung der zu prüfenden Themeneinheit lag einige Zeit zurück. Den Tests war keine Wiederholung der schriftlichen Division vorangegangen, so dass die Schüler zeigen konnten, was noch „hängengeblieben“ war und welche Fertigkeiten und Kenntnisse (und evtl. welche Fehlermuster) sich bei den Schülern wirklich gefestigt hatten (vgl. Gerster, 1982a, S. 18), nachdem auch neuer Stoff vorgestellt und behandelt wurde.

Für die Testauswertung wurden alle Divisionsstaffeln auf ein Blatt Papier geschrieben, das als Schablone genutzt wurde. Durch Vergleich der Schülerlösungen und der Musterlösungen auf der Schablone ließen sich schnell die richtigen und die fehlerhaften Lösungen feststellen. Die Auswertung erfolgte nach „richtig“ und „falsch“, da es für jede Divisionsaufgabe nur ein richtiges Ergebnis geben konnte. So lag die Schlüsselrichtung der Aufgabenbeantwortung („richtig“ oder „falsch“) fest und die Auswertungsobjektivität war praktisch vollkommen verwirklicht (vgl. Lienert & Raatz, 1994, S. 8). Jede richtige Lösung wurde mit einem Haken gekennzeichnet. Jede falsche Lösung erforderte längeres Studieren, da die nötige Fehleranalyse durchgeführt werden musste. Um die Fehleranalyse durchzuführen, wurden die auftretenden Fehlermuster in Fehlerkategorien eingeteilt, die in weitere Untergruppen untergliedert wurden. Bevor die verschiedenen Fehlerkategorien näher beschrieben werden, folgt ein kurzer Exkurs zur Fehleranalyse und zu den Schülerfehlern.

4.2.3.1 Exkurs zur Fehleranalyse und zu den Schülerfehlern

Mathematikunterricht ohne Schülerfehler ist für Sommer (1985, S. 38) undenkbar. Das Bilden von Hypothesen, die manchmal zum Scheitern verurteilt sind und die einer Korrektur bedürfen, werden (nicht nur) von ihm als notwendige Phasen des Erwerbs von Begriffen und Regeln und des Mathematikunterrichts im Allgemeinen angesehen. Dies betrifft Schüler aller Altersstufen. Im Vergleich zu den anderen Unterrichtsfächern bemühen sich die Schüler im Mathematikunterricht besonders zu irgendeiner Lösung der gestellten Aufgaben zu gelangen. Irgendwie muss jedes Problem lösbar sein. Notfalls konstruiert man zu diesem Zweck eigene Regeln. Dabei auftretende Unvereinbarkeiten mit den inneren Strukturen einer Aufgabe oder den mathematischen Konventionen werden von vielen Schülern nicht empfunden (vgl. Radatz, 1985, S. 18). So sieht die Entstehungsgeschichte der meisten Schülerfehler aus.

Für eine lange Zeit stellten Schülerfehler für die meisten Lehrer eine negative Erscheinung im Lehr- und Lernprozess dar, da sie Indizien für das Nicht-Erreichen der gesetzten Lehr- und Lernziele bildeten. Die Entwicklung der Fehleranalyse im Rahmen der Fachdidaktik veränderte die ausschließlich defizitäre Sichtweise der Schülerfehler und schrieb ihnen eine andere didaktische Sinngebung zu:

> Sie wurden „…nicht länger als zufälliges und unerwünschtes Produkt kindlichen Lernens und Bemühens aufgefasst (...), sondern als ein Phänomen, dessen Untersuchung die Theorie fruchtbar stimulieren kann“ (Lorenz, 1992, S. 28).

Die Methode der Fehleranalyse hat eine lange Tradition. Schon in den ersten drei Jahrzehnten des letzten Jahrhunderts war sie ein vieldiskutiertes Thema in den USA, in Deutschland und später auch in Russland. Im Laufe der Zeit wurde sie durch sehr unterschiedliche Ansätze beeinflusst, die wiederum auf die jeweiligen Hauptrichtungen der Bezugswissenschaften Pädagogik und Psychologie (Psychoanalyse, Gestalttheorie und Denkpsychologie) (vgl. Radatz, 1980, S. 16ff.) zurückgingen. Die Fehleranalyse bezieht sich nicht nur auf den Mathematikunterricht, sondern spielt auch eine wichtige Rolle in der unterrichtspraktischen Anwendung sowie in der fachdidaktischen Forschung der sprachlichen Unterrichtsfächer. Den dominierenden Inhaltsbereich in den meisten Studien bilden jedoch mathematische Inhalte und zwar die Arithmetik (vgl. Radatz, 1980, S. 16ff.; Lorenz & Radatz, 1993, S. 59).

In jeder Phase spielten zwei Anwendungsbereiche der Fehleranalyse eine wichtige Rolle: zunächst als Forschungsmethode für den Mathematikunterricht, um einerseits die kognitiven Prozesse des Mathematikunterrichts zu untersuchen und andererseits Mathematikcurricula zu evaluieren und Lehrgangskonzeptionen zu vergleichen. Des Weiteren als diagnostisches Mittel für den Lehrer, um Lernschwierigkeiten von Schülern aufzudecken und Anhaltspunkte für den Einsatz von Fördermaßnahmen zu gewinnen (Sommer, 1985, S. 38). Im Rahmen dieser Arbeit gewinnt der letzte Aspekt eine wichtige Bedeutung bezüglich der Verdienste der Fehleranalyse für die Unterrichtspraxis. Die Analyse der Schülerfehler gibt dem Lehrer die Möglichkeit, die Schwierigkeiten einzelner Schüler zu lokalisieren, zu interpretieren und nach den möglichen Ursachen zu suchen. Erst danach können die nötigen Hilfestellungen erfolgen. So bildet die Fehleranalyse die Grundlage für die innere Differenzierung des Mathematikunterrichts und gibt Hinweise auf adäquate Fördermaßnahmen, insbesondere zur Einzelförderung. Auf Seiten des Lehrers kann die Auseinandersetzung mit **Schülerfehler** auf eigene methodische Probleme und didaktische Unzulänglichkeiten aufmerksam machen. Fehler werden also als unverzichtbare Bestandteile des Lernprozesses angesehen, bei deren Überwindung den Schülern eine aktive Rolle zukommen sollte (vgl. Lorenz & Radatz, 1993, S. 60).

In der Unterrichtspraxis bieten sich ausreichend methodische Möglichkeiten zur Fehleranalyse. Diese reichen von der Analyse schriftlicher Arbeiten und Lösungen und der Durchführung diagnostischer Interviews bzw. informeller Gespräche zwischen dem Lehrer und dem einzelnen Schüler bis hin zum sogenannten „lautem Denken“ durch den Schüler während der Aufgabenbearbeitung und zu Beobachtungen des Lehrers während der Schülerarbeit (ebd., S. 60ff.)

Fehleranalyse ist also besonders wichtig. Es wäre jedoch unrealistisch zu erwarten, dass der Lehrer jeden Fehler, den seine Schüler machen, unter die Lupe nimmt und sich darüber ausführliche Gedanken macht. Fehler, die ihren Ursprung in Unaufmerksamkeit, Flüchtigkeit oder Erraten haben, sind für die Fehleranalyse nicht relevant. Dies ist jedoch in den seltensten Fällen alleinige Ursache. Kinder legen sich meistens Strategien zurecht und eine gewisse Vorgangsweise fest, die leider manchmal fehlerbehaftet ist (vgl. Schopper, 1993, S. 466). Bei näherer Betrachtung der Schülerfehler lässt sich feststellen, dass die meisten von ihnen eine bestimmte „Regelstruktur“ aufweisen und daher keine Flüchtigkeitsfehler sind (vgl. Gerster, 1982a, S. 14; Lorenz, 1992, S. 29). Ihnen liegt eine Lösungsstrategie zugrunde, die den Schülern sinnvoll erscheint. Diese Fehlerstrategie wird in gleichartigen Aufgaben konsequent und systematisch angewendet (Lorenz & Radatz, 1993, S. 59). Durch das Erkennen systematischer Fehler erhält der Lehrer wichtige Rückmeldungen über die Gedankengänge des Schülers, über die angewandten Strategien und über die Entwicklung des Lernprozesses. Schülerfehler sind somit nicht nur „Bilder“ individueller Schwierigkeiten und Missverständnisse (ebd.), sie sind vielmehr Fenster, die einen Blick in die Gedankenwelt des Kindes erlauben (Kafousi, 1994, S. 33). Absicht eines jeden Lehrers sollte es demzufolge sein, die eigene Diagnose- und Förderkompetenz zu erhöhen, da sich letztendlich die Früherkennung und -förderung individueller Fähigkeiten als die größte Chance für das einzelne Kind erweisen (Klewitz & Köhnke, 1997, S. 41).

Es reicht jedoch nicht aus nur die Lehrer über Schülerfehler aufzuklären und sie positiv einzustellen. Dasselbe muss auch mit den Schülern geschehen. Lörcher (1984, zitiert nach Radatz, 1985, S. 19) weist darauf hin, wie wichtig es ist, Schüler auf das Erkennen, Finden und Überwinden von Fehlern vorzubereiten. Fehler sollten auch von den Schülern als etwas Natürliches und Nützliches angesehen werden, da man aus den Fehlern lernen kann. Sie sollten wissen, dass es erlaubt ist, sich zu irren. Für alle Schüler hat dennoch das Begehen von Fehlern einen negativen Beigeschmack, da es mit Misserfolgserlebnissen verbunden ist. Wegen des Fehlerrisikos vermeiden es Schüler im Mathematikunterricht zu experimentieren und zu probieren. Diese Einstellung muss dringend modifiziert werden. Mögliche Fehler sollten die Schüler auf keinen Fall einengen. Ihnen sollte der Freiraum zur Offenheit und Improvisation (Franke, 1997, S. 32) und somit zum entdeckenden Unterricht gelassen werden. Es gehört zum Auftrag des Lehrers, den Fehlern ein positives Ansehen im Unterricht zu verleihen und die Suche nach Fehlern zu unterstützen. Er kann seine Schüler ermutigen und ihnen die Möglichkeit geben, ihre Vorschläge zu diskutieren und Vorteile oder Tücken verschiedener Lösungsstrategien selbst herauszufinden. Der Unterricht hat hierbei die überaus wichtige Aufgabe zu klären, wie Fehler positiv wirksam werden können, auch im mathematisch-inhaltlichen Bereich.

Fehler können in verschiedenen Phasen des Unterrichtprozesses (in der Vorbereitungs-, in der Erarbeitungs-, oder in der Übungsphase) auftreten und haben unterschiedliche Ursachen (Radatz, 1980, S. 34ff.):

- Mangelndes Sprach- und Textverständnis

  Zwischen der von den Kindern täglich gesprochenen Umgangssprache und der in dem Mathematikunterricht eingeführten Fachsprache (mit den fachspezifischen

Symbolen, Bezeichnungen und Begriffen) existieren Ähnlichkeiten, aber auch Bedeutungsunterschiede, die eine Anpassung des Schülerverständnisses erfordern. Bei den ersten vier Klassen können Interferenzen zwischen dem eher intuitiv-umgangssprachlichen Verständnis und dem fachsprachlichen Gebrauch im Mathematikunterricht zu Unverständnis, Missverständnis und folglich zu Fehlleistungen führen (z. B. Menge, Ecke, Körper usw.).

- Schwierigkeiten bei der Analyse von Veranschaulichungsmitteln

  Zahlreiche mathematische Themenbereiche (z. B. der Zahlenstrahl, Pfeildiagramme, Mengendiagramme, Veranschaulichungen zur Gesetzmäßigkeit arithmetischer Operationen, graphische Bündelungen usw.) werden in den Lehrbüchern ikonisch präsentiert und durch Diagramme, Darstellungen oder Abbildungen visualisiert. Angesprochen werden die anschauungsmäßigen Fähigkeiten der Schüler. Bei der Informationsaufnahme können auf dieser Ebene Fehler entstehen, die auf die individuellen Unterschiede in der Entwicklung und Ausprägung von Raumanschauung und räumlichen Denken auf Seiten der Schüler zurückzuführen sind (Jakimanskaya, 1976; Fennema, 1976).

- Falsche Assoziationen und Einstellungen

  Häufig setzen sich bei Schülern zurückliegende Erfahrungen und vorangegangene Inhalte gegen neue durch, wodurch sich das Bild eines Ähnlichkeitsfehlers (im Sinne von Seemann, 1929) oder der Perseveration (Pippig 1975, 1977) ergibt. Durch das Beibehalten wirksamer Lösungsstrategien auf veränderte Aufgabenbedingungen entstehen Einstellungsfehler (Luchins-Effekte).

- Gebundensein einer Begrifflichkeit an sehr spezifische Repräsentationen

  Werden im Unterricht sehr verengt oder spezifisch bestimmte Begriffe erarbeitet, sind viele Schüler nicht in der Lage Transferleistungen oder Verallgemeinerungen durchzuführen und begehen Fehler.

- Nichtberücksichtigen relevanter Bedingungen der mathematischen Aufgabe bzw. des Problems

  Häufig werden von den Schülern aufgrund subjektiver Vorstellungen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben wesentliche Bedingungen vernachlässigt, ausgelassen oder zusätzliche Bedingungen eingefügt, so dass fehlerhafte Lösungen entstehen.

- Nichtabschließen der Aufgabenbearbeitung, wobei einer oder mehrere Rechenschritte ausgelassen werden

- Verlieren von Zwischenschritten im Lösungsprozess
  Sind für das Erreichen der Lösung mehrere Teilschritte notwendig, kann es durch Gedächtnisschwächen (Kurzzeitgedächtnis) zu Ausfällen und so zu Fehllösungen kommen.

- Fehlerursachen in einer Versuch-Irrtum Lösungsstrategie

Dabei werden die Bedingungen der Aufgabe nicht ausreichend analysiert und reflektiert. Hierbei wird die kognitive Stildimension des Schülers in Impulsivität und Reflektiertheit unterschieden. Impulsive Schüler antworten schnell, ohne die Angemessenheit und Gültigkeit ihrer Hypothese ausreichend zu überprüfen. Reflektierende Schüler zögern, ehe sie ihre Lösungshypothese anbieten. Sie analysieren intensiver die Aufgabenbedingungen und brauchen deshalb mehr Bearbeitungszeit, machen aber weniger Fehler.

- Nicht ausreichende Kenntnisse, Fertigkeiten und unzureichendes Begriffsverständnis

  Gemeint sind hier die Vorkenntnisse, die Auswirkungen auf jedes neue Wissenselement ausüben.

Durch diese Ursachen können viele Schülerfehler nachvollzogen und beschrieben werden. Der Versuch, Fehlerursachen verschiedenen Ebenen zuzuordnen, macht jedoch die Grenzen der Fehleranalyse deutlich:

> „Die Analyse von Schülerfehlern in der Unterrichtspraxis muss sich weitestgehend auf die Beschreibung von mathematisch-inhaltlichen oder verfahrensbezogenen Aspekten beschränken. Wahrnehmbar, nachvollziehbar und beschreibbar sind Fehlermuster. Sie erlauben eine inhaltlich-deskriptive Fehlertypologie bzw. Fehlerklassen (...), aus denen sich didaktisch akzentuierte Hilfs- und Fördermaßnahmen ableiten lassen. Dieser durchaus hilfreiche Aspekt einer Diagnose/Analyse bei rechenschwachen Schülern kann aber nur Aufschlüsse über die curricularen, äußeren Erscheinungsbilder geben. Bei der Diagnose und Therapie auf den anderen Ebenen für Lernschwierigkeiten, etwa die Aufnahme und Verarbeitung von Informationen während des Bearbeitungsprozesses oder Ursachen bei den kognitiven Stützfunktionen betreffend, hilft eine Fehleranalyse wenig“ (Lorenz & Radatz, 1993, S. 62).

Trotz dieser Einschränkung sollte man die Fehleranalyse als eine besonders hilfreiche Methode anerkennen, um Lernschwierigkeiten einzelner Schüler zu erkennen, in inhaltlich spezifischer Weise zu beschreiben und aus dem erkannten Fehlermuster curriculare Hinweise für Fördermaßnahmen zu gewinnen.

4.2.3.2 Daten aus den Tests

Mit diesen Erkenntnissen über die Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse wurde zum nächsten Schritt, zur Auswertung der Tests, übergegangen. Nachdem die Schülerlösungen in richtige und fasche eingeteilt wurden, wurden die fehlerhaften Lösungen untersucht. Es sollte festgestellt werden, in welchen Teilschritten der Division bestimmte Fehler aufgetreten sind, wie sich diese Fehler beschreiben lassen und in welcher Beziehung sie zueinander stehen. Beim Auswerten der Tests wurden die Fehler aussortiert, die keine Rückschlüsse auf eine verborgene Systematik erlaubten, sondern auf mangelnde Konzentration oder zu hohe Rechengeschwindigkeit zurückzuführen waren. Sie waren für die intendierte Fehleranalyse irrelevant, da sie einem Zufallsfaktor unterlagen. Sie wurden zwar registriert und mitberechnet aber nicht näher betrachtet. Von besonderem Interesse waren dagegen Fehlermuster, die in den Schülerlösungen konsequent auftraten, eine gewisse Regelstruktur aufwiesen und Rückschlüsse auf eine innere Systematik zuließen. Dies waren die systematischen Fehler. Wie bereits erwähnt, wurden im Rahmen der vorliegenden Untersuchung Fehler dann als *systematisch* bezeichnet, wenn sie von demselben Schüler mindestens dreimal gemacht wurden. Auf die systematischen Fehler fokussierte sich die nachfolgende Fehleranalyse. Für die gesamte Datenerhebung ist es jedoch sinnvoll, zunächst einen Überblick über alle Fehlermuster zu geben, die in den Tests aufgetreten sind. Die Beschreibung der Fehlermuster erfolgte in Anlehnung an die bereits von Gerster (1982a, S. 172) entwickelten Fehlerkategorien. Zunächst wurden grobe Fehlergruppen unterschieden, die auf die Anfangsbuchstaben verkürzt und so gekennzeichnet wurden:

V	Fehler im Verfahren
H	Fehler beim Herunterholen von Ziffern
P	Fehler beim Berechnen eines Teilproduktes
S	Fehler in der Subtraktion
Q	Fehler im Quotienten
0	Fehler mit der Null

Diese sechs groben Fehlergruppen wurden in weitere Kategorien eingeteilt, um die Fehlermuster deutlicher hervorheben zu können und mit kleinen Zahlen neben den Großbuchstaben gekennzeichnet.

Fehler im Verfahren (bei der Durchführung des Algorithmus der Division) (V)
Diese Fehler beziehen sich auf die Verfahrenskenntnisse der schriftlichen Division:

- V_1: Die Quotientenziffer wird nur mit einer Ziffer des zwei- oder dreistelligen Divisors multipliziert.
- V_2: Diese Fehlergruppe umfasst alle Schüler, die den Algorithmus der Division gar nicht beherrschen und leere Testblätter abgegeben haben sowie die Schüler, die nur die ersten Teilschritte der Division durchführen konnten.
- V_3: Fehler beim Bestimmen des Teildividenden

Fehler beim Herunterholen von Ziffern (H)

- H_1: Zwei Ziffern werden gleichzeitig vom Dividenden heruntergeholt
- H_2: Dieselbe Ziffer wird zweimal heruntergeholt
- H_3: Die letzte Ziffer des Dividenden wird nicht heruntergeholt
- H_4: Eine Zwischenziffer wird vergessen und nicht heruntergeholt
- H_5: Eine Ziffer wird nicht rechtzeitig heruntergeholt

- H_6: Die falsche Ziffer wird heruntergeholt

Subtraktionsfehler (S)
Diese Fehler traten bei der Subtraktion des Teilproduktes vom Teildividenden auf. Je nach Subtraktion wurden folgende Fehlermuster festgestellt:

- S_1: Fehler in Subtraktionen ohne Zehnerübergang
- S_2: Fehler in Subtraktionen mit Zehnerübergang
- S_3: Fehler beim Abziehen von der Null

Fehler in den Teilprodukten (P)
Beim Berechnen der Teilprodukte wurden folgende Fehlermuster erkannt:

- P_1: Richtige Ziffer im Quotienten, zugehöriges Teilprodukt falsch.
- P_2: Die Behalteziffern werden bei der Berechnung des Teilproduktes nicht berücksichtigt.
- P_3: Bei der Berechnung des Teilproduktes werden falsche Behalteziffern addiert
- P_4: Für die Berechnung eines Teilproduktes wird die Quotientenziffer nur mit einer Stelle des zwei- bzw. dreistelligen Divisors multipliziert.
- P_5: Das Teilprodukt wird an falscher Stelle notiert

Fehler in den Quotientenziffern (Q)

- Q_1: Falsche Ziffer im Quotienten, zugehöriges Teilprodukt richtig.
- Q_2: Größere Ziffer im Quotienten. Dies hat zur Folge, dass das entstehende Teilprodukt größer als der Teildividend ist. Die nachfolgende Subtraktion wird durchgeführt, indem die Erweiterungs- bzw. Borgetechnik falsch angewendet wird.
- Q_3: Kleinere Ziffer im Quotienten. Nach der Multiplikation und der Subtraktion entsteht eine Teildifferenz, die dem Divisor gleicht oder auch größer als der Divisor ist.
- Q_4: Falsche Ziffer im Quotienten, zugehöriges Teilprodukt auch falsch.
- Q_5: Eine Quotientenziffer wird nicht notiert, das Teilprodukt ist jedoch richtig.
- Q_6: Bei einer Teildivision wird ein zweistelliger Teilquotient notiert.

Fehler mit der Null (0)

- 0_1: Eine Ziffer wird vom Dividenden heruntergeholt. Der neue Teildividend ist kleiner als der Divisor, trotzdem wird keine Null im Quotienten notiert.
- 0_2: Die Teildifferenz oder auch der Rest ist kleiner als der Divisor. Die Teildifferenz bzw. der Rest wird noch einmal dividiert und so wird eine zusätzliche Null im Quotienten gesetzt.
- 0_3: Die letzte Ziffer des Dividenden ist eine Null (Endnull). Diese wird heruntergeholt aber nicht weiter beachtet. Im Quotienten fehlt daher eine Null.
- 0_4: Die Endnull des Dividenden wird ignoriert.
- 0_5: Eine Zwischennull wird heruntergeholt, aber nicht weiter beachtet.
- 0_6: Die zwei letzten Ziffern des Dividenden sind zwei Nullen. Diese werden automatisch dem Quotienten angehängt.

Obige Fehlermuster wurden in dem an 12 Grundschulklassen (4. Schuljahr) durchgeführten Divisionstest ermittelt. Im Anhang befinden sich die Tabellen mit den Fehlern (Fehlermuster und Fehlerhäufigkeit), die in jeder der 12 Grundschulklassen aufgetreten sind.

Alle Fehler, die eine Häufigkeit ≥ 3 hatten, machten die systematischen Fehler aus und wurden in den Tabellen farblich hervorgehoben. Die systematischen Fehler wurden aus allen Tabellen herausgesucht und in einer Gesamttabelle zusammengefasst. Die Zusammenfassung aller Tabellen liefert ein Gesamtbild aller systematischen Fehler, die in dieser Untersuchung aufgetreten sind:

	Systematische Fehler													
Klassen	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**V_1**	**V_2**	**P_1**	**P_2**	**Q_1**	**Q_2**	**Q_3**	**Q_4**	**0_1**	**0_2**	**Σ**
Klasse 1 (N=20)				1	1	1						2	1	6
Klasse 2 (N=20)		1	1		1	3			1	2	2			11
Klasse 3 (N=14)		4		1	1	2		1			1	1	1	12
Klasse 4 (N=14)		2			2	1				2	1	3		11
Klasse 5 (N=10)		1				1		1			1		1	5
Klasse 6 (N=12)					1			2	1	1		1	1	7
Klasse 7 ((N=22)					3	1	1				1	1	1	8
Klasse 8 (N=22)		5			10			1		2	3	3	2	26
Klasse 9 (N=13)		1		1	5				1	2	1	1		12
Klasse 10 (N=14)	1	6			3							2		12
Klasse 11 (N=16)		1		1		4				1	2	5		14
Klasse 12 (N=12)						1				1		1		3
Summe ΣN=189	**1**	**21**	**1**	**4**	**27**	**14**	**1**	**5**	**3**	**11**	**12**	**20**	**7**	**127**
Relative Häufigkeit	0,8	16,5	0,8	3,1	21,3	11	0,8	3,9	2,4	8,7	9,4	15,7	5,5	

Tabelle 21: Übersicht über die systematischen Fehler der Untersuchung

Die Auflistung der systematischen Fehler nach ihrer Erscheinungshäufigkeit ergibt folgende Reihenfolge von der größten zur kleinsten Häufigkeit: V_2(27), S_2(21), 0_1(20), P_1(14), Q_4(12), Q_3(11), 0_2(7), Q_1(5), V_1(4), Q_2(3), S_1(1), S_3(1), P_2(1). Die Streuung der Fehler wird im folgenden Diagramm deutlich:

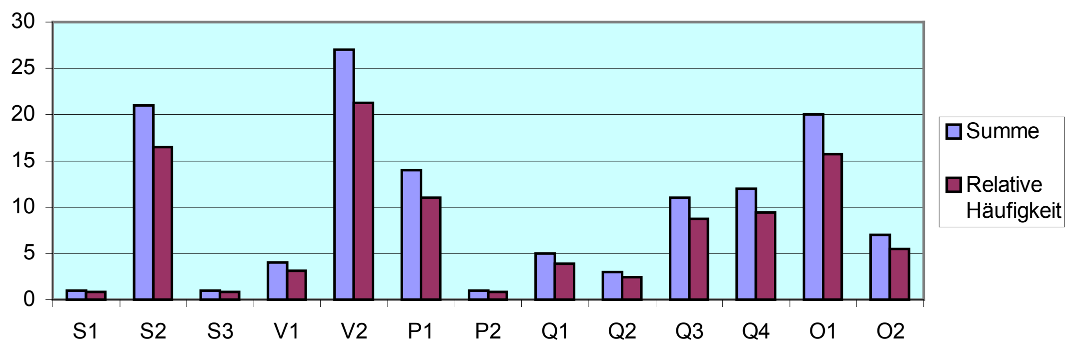


Abbildung 4: Übersicht über die systematischen Fehler der Untersuchung im Säulendiagramm

Aus dem Diagram lassen sich die Tendenzen erkennen. Die größte Fehlerrate wurde beim Fehlermuster V_2 registriert, das alle Schüler umfasst, die die schriftliche Division bruchstückhaft oder gar nicht durchführen konnten. Die Subtraktion mit Zehnerübergang (Fehlermuster S_2) wies die zweitgrößte Fehlerrate auf. Annähernd gleiche Werte zeigten sich ebenfalls bei dem Fehlermuster 0_1, in dem eine Null im Quotienten fehlte. Die bereits erwähnten Fehlermuster machten die Hauptgruppen der systematischen Fehler aus, in denen die Häufigkeiten zwischen 20 und 27 schwankte. Neben diesen Hauptgruppen machten Fehler in den Teilprodukten (P_1), in der Auswahl der Quotientenziffern (Q_3, Q_4, Q_1) und beim Notieren von Zwischennullen im Quotienten (0_2) eine mittlere Gruppe aus, in der die Häufigkeiten Werte zwischen 5 und 14 einnahmen. Schließlich wurde die niedrigste Fehlerrate mit Häufigkeiten zwischen 1 und 4 in 5 Fehlergruppen registriert. Dabei handelte es sich um Fehler beim Schätzen de Quotientenziffern (Q_2), Fehler im Verfahren (V_1), Fehler in den Subtraktionen (S_1 und S_3) und in der Berechnung der Teilprodukte (P_2).

In der Folge wird auf jede Fehlergruppe eingegangen und die einzelnen Fehlermuster werden an Hand von Schülerbeispielen näher erläutert. Gleichzeitig werden die möglichen Entstehungsursachen dieser Fehlermuster aufgedeckt. Neben dem Namen des jeweiligen Schülers wird in Klammern die Abkürzung der jeweiligen Klasse notiert. Aus Platzgründen werden an dieser Stelle nur ausgewählte Aufgaben dargestellt, die die beschriebenen Fehlermuster beinhalten.

4.2.3.2.1 Fehler im Verfahren der schriftlichen Division (Fehlermuster V_2)

Wie man der Tabelle entnehmen kann, bezieht sich der größte Fehleranteil auf die Kenntnis des Algorithmus (typische Verfahrenskenntnisse) der Division (V_2). Auf die Komplexität des Algorithmus der schriftlichen Division wird auch in der griechischen Literatur hingewiesen. „Sie ist eine wirklich sehr schwierige Operation“ heißt es im Lehrerband „Meine Mathematik“ der 4. Klasse (S. 168). In der mathematischen Zeitschrift „Euklides C´“ findet man in einem Bericht von Troulis die Bemerkung, dass „die Division der natürlichen Zahlen auch den Schülern der 6. Klasse große Schwierigkeiten bereitet“ (1991, S. 66). „In allen Ländern der Welt begegnen die Schüler viele Schwierigkeiten bei der Durchführung des Algorithmus der Division“ generalisieren Filippou & Christou in ihrer „Didaktik der Mathematik“ (1995, S. 268). Den Umfang dieses Problems zeigt auch seine Häufigkeit. In 9 der 12 Klassen, in denen der Test durchgeführt wurde, gab es insgesamt 27 Schüler, die nicht in der Lage waren, den Algorithmus der Division durchzuführen. Unter diesen Schülern befanden sich auch Schüler ausländischer Herkunft. Bei wenigen von ihnen spielte jedoch die Sprache eine Rolle beim Auftreten von Lernschwierigkeiten, da die meisten von ihnen längere Zeit in Griechenland lebten.

Dieses Fehlermuster hatte verschiedene Erscheinungsformen: Manche Schüler konnten überhaupt nicht dividieren und gaben ihre Testblätter leer ab oder notierten zufällige Ziffern an verschiedenen Stellen, ohne dass zwischen ihnen ein Zusammenhang bestand. Bei manchen Lösungen konnte man jedoch Beziehungen zwischen den notierten Zahlen erkennen. Folgende Beispiele sollen dies verdeutlichen:

<table>
<tr><td>a.
191 44
-932 988
861</td><td>b.
8600 4
-953 263
113
00</td><td>c.
2310 9
-7689 0.250
5370
12
0250</td><td>d.
191 44
-353 2.000
242
-242
000</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thomas (Kl. 9)</td><td colspan="2">Christos (Kl. 8)</td></tr>
</table>

Thomas notierte zufällige Zahlen im Quotienten und als Teilprodukte, da er wahrscheinlich nicht wusste, wie man die Quotientenziffern und die zugehörigen Teilprodukte berechnet (a. und b.). Er bemühte sich jedoch in der Folge die Subtraktionen mit diesen Zahlen auszurechnen. Dabei zog er die kleinste von der größten Zahl ab und rechnete falsch mit der Null. Dieselben Schwierigkeiten hatte auch Christos. Auch er schrieb als Teilprodukte zufällige Zahlen, die in keinem Zusammenhang zu den Ziffern des Quotienten standen. Im Quotienten setzte er sogar eine Null als erste Ziffer und kennzeichnete durch einen Punkt die Tausenderstelle (c.). Auch seine Subtraktionen zeigten, dass er die Rechenrichtung nicht berücksichtigte, kleinere von größeren Zahlen abzog und beim Abziehen von der Null Schwierigkeiten hatte.

<table>
<tr><td>a.
6396 3
-63 6399
00
0</td><td>b.
75665 37
-75 75702
00
00</td><td>c.
6396 3
-9 3162
33
-3
90
-18
889
-6
883</td><td>d.
191 44
-8 22
111
-8
117</td><td>e.
224 18
-8 11
264
-8
264</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kostas (Kl. 6)</td><td colspan="3">Ageliki (Kl. 8)</td></tr>
</table>

Schwierigkeiten beim Abschätzen der Quotientenziffern hatte auch Kostas, er ging jedoch anders vor. Aus den Nebenrechnungen, die er auf seinem Testblatt notierte, war es möglich seine Vorgehensweise zu entziffern. Er ermittelte jedes Mal den Quotienten, indem er den Dividenden zu dem Divisor addierte (a. und b.). Im nächsten Schritt setzte er das Teilprodukt dem Teildividenden gleich, führte die Subtraktion aus und notierte unter dieser Subtraktion weitere Nullen, die das Beenden des Verfahrens anzeigen sollten. Auf diese Wiese ist er in allen Aufgaben des Tests vorgegangen.

Ageliki wusste, welche Teilhandlungen in welcher Abfolge für den Algorithmus der Division nötig sind, konnte aber die Quotientenziffern nicht richtig abschätzen und gelang zu sehr großen Teildifferenzen und Teildividenden. Die Subtraktionen mit Zehnerübergang waren auch problematisch für sie, da sie bei allen die Rechenrichtung nicht einhielt, Schwierigkeiten beim Abziehen von der Null und bei der Anwendung der Erweiterungstechnik hatte (c.). In den Aufgaben mit zweistelligem Divisor rechnete sie nur mit einer Ziffer des Divisors, da sie wahrscheinlich nicht wusste, wie sie mit einem mehrstelligem Divisor umgehen soll. Dass bei allen Aufgaben ein zu großer Rest übrig blieb, wurde von ihr nicht berücksichtigt (d., e.).

Einige Schüler bemühten sich den ersten Schritt der Division durchzuführen, wussten dann aber nicht mehr weiter.

<table>
<tr><td>a.
2310 | 9
-18 | 2
15</td><td>b.
8600 | 4
-16 | 4
7000</td><td>c.
13104 | 56
-56 | 1
67</td><td>d.
3689 | 8
-16 | 2
208</td><td>e.
8600 | 4
-8 | 2265
06
-8
260
-24
020
-20
0000</td></tr>
<tr><td colspan="3">Vangelis (Kl. 9)</td><td colspan="2">Vangelis (Kl. 4)</td></tr>
</table>

Wie Vangelis waren viele Schüler nicht in der Lage, den ersten Teilschritt der Division erfolgreich auszuführen. Manchmal wurde die erste Quotientenziffer richtig geschätzt, doch bei der Berechnung der Teildifferenz machten sich die Schwächen der Schüler in der Subtraktion durch die Nicht-Berücksichtigung der Erweiterungsziffer (a.) und durch falsche Anwendung der Erweiterungstechnik (c.) bemerkbar. An derselben Aufgabe kann aber auch die Verwechselung der Subtraktion mit der Addition zum falschen Ergebnis geführt haben. In anderen Fällen misslang das Bestimmen des Teildividenden und die Nullen wurden zwar heruntergeholt aber nicht weiter beachtet (b.).

Ein weiterer und gleichnamiger Schüler hatte auch Schwierigkeiten beim Schätzen der Quotientenziffern. In der ersten Aufgabe (d.) wurde sie zu klein geschätzt, in der zweiten dagegen zu groß (e.). Zusätzlich machten sich Fehler in den Subtraktionen bzw. in der Erweiterungstechnik (0-8=2) sowie Unsicherheiten beim Herunterholen der Ziffern und Notieren der Teilprodukte erkennbar.

Es ist anzunehmen, dass die Schüler, bei denen dieses Fehlermuster auftrat, nicht über hinreichende Verfahrenskenntnisse verfügten. Welche Ziffern für die einzelnen Teildivisionen zusammengefasst werden müssen und wie der jeweilige Rechenschritt ausgeführt werden muss, war für sie problematisch oder auch unbekannt. Einige von ihnen improvisierten ihre eigenen Zwischenergebnisse und führten dann damit Operationen aus, die sie meinten zu beherrschen. Offensichtlich beschränkten sich die Schwierigkeiten dieser Schüler nicht nur auf die Division, sondern bezogen sich auch auf andere Operationen. Aus den Divisionsaufgaben ließen sich ihre Schwächen in der schriftlichen Subtraktion erkennen. Es stellte sich heraus, dass sie oft die Rechenrichtung nicht berücksichtigten und die kleine von der größeren Zahl abzogen (a., b.), an einer beliebigen Stelle des Minuenden erweiterten ohne in der Folge die Erweiterungsziffer zu berücksichtigen (e.), fehlerhaft mit der Null umgingen (f.) und addierten, statt zu subtrahieren. In wie weit bei ihnen auch die übrigen Rechenoperationen fehleranfällig waren, ist aus den Tests nicht ersichtlich. Für die Schüler, die leere Testblätter abgaben, konnten keine Feststellungen darüber getroffen werden, welchen Wissensstand sie hatten und bei welchen Inhalten die ersten Lücken auftraten. Man kann jedoch die Hypothese aufstellen, dass diese Schüler nicht in der Lage waren, Divisionsaufgaben zu lösen, weil ihnen die vorausgesetzten Teilhandlungen und Rechenoperationen unbekannt oder nicht geläufig waren. Ihre Wissenslücken stammen aus Lernphasen, die weit vor der Behandlung der Division liegen und sollten in jedem Fall individuell diagnostiziert werden.

4.2.3.2.2 Fehler bei der Subtraktion mit Zehnerübergang (Fehlermuster S_2)

Die zweitgrößte Fehlerrate (21 Schüler) wurde in den Subtraktionen der Teilprodukte von den Teildividenden registriert und zwar in Subtraktionen mit Zehnerübergang. Dabei wurden verschiedene Fehlerursachen erkannt:

a. $2^{1}430$ | 18 -1 8 | 123 0 43 - 36 070 -54 16	b. 191 | 44 -88 | 2170 71 -44 33 -28 16	c. 51152 | 24 -48 | 2839 191 -182 0095 -72 332 -216 118	d. 13104 | 56 -10 | 2166 031 -56 370 -336 6344 -336 009
Katerina (Kl. 11)	Lena (Kl. 8)	Charalambos (Kl. 11)	Giorgos (Kl. 11)

Diese Aufgaben stehen als Beispiele für die Schüler, die vor dem Zehnerübergang auswichen. Meistens zogen die Schüler, wie Katerina in der ersten Aufgabe (a.), die kleinste von der größeren Zahl ab, ohne die Rechenrichtung zu beachten. Eigenartig ist, dass die Schülerin die Übertragsziffer notiert hatte, was darauf hindeutet, dass ihr bewusst war, dass in diesem Schritt ein Zehnerübergang erforderlich war. Diese Übertragsziffer berücksichtigte sie auch in der nächsten Stellenwertspalte.

Auch Lena scheint die kleinste von der größten Zahl abzuziehen ohne Rücksicht auf die Rechenrichtung. In ihrer Lösung werden jedoch mehrere Problembereiche deutlich. Sie bestimmte den ersten Teildividenden falsch, wählte die erste Quotientenziffer zu groß, berechnete das dritte Teilprodukt, indem sie nur mit der Einerziffer des Divisors multiplizierte, dividierte den Rest und gelang wahrscheinlich durch Zählfehler zur falschen Teildifferenz in der letzten Teildivision.

In der nächsten Aufgabe (c.) wurde in der ersten und vierten Subtraktion wieder dem Zehnerübergang in der Einerspalte ausgewichen, indem hier addiert statt subtrahiert wurde. Dabei wurde die Erweiterungsziffer im zweiten Fall in der Zehnerspalte berücksichtigt. Für diesen Schüler waren jedoch auch die Zerlegungen der einstelligen Zahlen fehleranfällig, wie man in der dritten Subtraktion und zwar in der Zehnerspalte betrachten kann (9-7=3).

Giorgos hatte in der vierten Aufgabe (d.) große Schwierigkeiten in den Subtraktionen. In der zweiten Subtraktion addierte er in der Einerstelle, berücksichtigte jedoch die Erweiterungsziffer in der nächsten Spalte, in der er durch falsche Rechenrichtung zu seinem Ergebnis gelang. Wohl möglich ist aber auch, dass er durch falsche Zählstrategien 5-3=3 errechnete. Dass er eine größere von einer kleineren Zahl abgezogen hat, blieb unbemerkt. In der dritten Subtraktion addierte er wieder in der Hunderterstelle. In der letzten Subtraktion kam er wahrscheinlich durch Zählfehler (zählte die Anfangszahl mit) in der Einerspalte zum falschen Ergebnis und ließ die Tausenderziffer unberücksichtigt.

Außer den Schülern, die dem Zehnerübergang auswichen, gab es Schüler, die sich dem Zehnerübergang „stellten“. Einige Fehler sind ihnen dennoch unterlaufen. Welcher Art diese Fehler waren, soll in den nächsten Beispielen verdeutlicht werden:

a.	b.	c.	d.	e.
493 | 21 -42 | 24 073 -84 89	75665 | 37 -74 | 205 0166 -185 981	493 | 21 073 | 27 26	2430 | 18 -36 | 27 983	13104 | 56 -112 | 234 0190 -168 224 -236 988
Aris (Kl. 1)	Athina (Kl. 9)	Dimitris (Kl. 10)	Emilia (Kl. 11)	Melina (Kl. 11)

Dem Abziehen einer größeren von einer kleineren Zahl wurde in den Tests sehr oft begegnet. Dies trat nicht nur auf, weil die Schüler die Rechenrichtung veränderten, sondern auch weil sie die Erweiterungstechnik falsch anwendeten. Wie Aris (a.) und Athina (b.) jeweils in der zweiten Subtraktion erweiterten sie den Minuenden am höchsten Stellenwert, um das Abziehen zu ermöglichen, ohne sich darüber Gedanken zu machen, was durch diese Erweiterungsziffer geschieht, oder woher sie stammt. Auf diese Weise waren sie jederzeit in der Lage, eine Subtraktion durchzuführen, die eigentlich im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar ist. Dass dabei ein Rest herauskam, der größer als der ursprüngliche Minuend war, blieb unbemerkt.

Derselbe Fehler trat gehäuft in einer Klasse auf, in der die Schüler die Kurzform der Division verwendeten, in der die Teilprodukte nicht notiert werden und folglich die Subtraktionen im Kopf berechnet werden müssen. Dimitris scheint wie folgt zu rechnen: Bei der Berechnung des zweiten Teilproduktes errechnete er in der Einerspalte eine 7 (1*7=7), die abgezogen von der erweiterten 3 (also 13) eine 6 ergab. Im nächsten Schritt fand er 15 (2*7=14, 14+1=15), die er nicht von der 7 sondern von 17 abzog und dadurch das Ergebnis 2 erhielt. Um die 17 zu bilden, hat er wieder unwillkürlich erweitert.

Auch Emilia und Melina unterlagen der Versuchung, die Subtraktionen durchzuführen, indem sie nach Bedarf erweiterten. Beide zogen eine kleinere von einer größeren Zahl ab (Emilia in der ersten und Melina in der dritten Subtraktion), indem sie die größte Ziffer des Minuenden erweiterten. Auch sie bemerkten nicht, dass die Größenordnung des Restes bzw. der Teildifferenz nicht stimmen konnte.

Weitere Schüler folgten zwar der richtigen Rechenrichtung, zeigten aber Schwächen in dem Einsundeins, wie man in den nächsten Beispielen erkennt:

<table>
<tr><td>a.
362286 9
-36 40265
022
-18
058
-54
046
-45
01</td><td>b.
51152 24
-48 2131
031
-24
075
-72
032
-24
07</td><td>c.
51152 24
-48 2177
041
-24
185
-168
0182
-168
15</td><td>d.
191 44
-176 4
026</td><td>e.
2430 18
-18 14
073
-54
010</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stella (Kl. 1)</td><td colspan="3">Christos (Kl. 4)</td></tr>
</table>

Stella kam in ihren Berechnungen zu Subtraktionsergebnissen, die sich um eins, höchstens um zwei von den richtigen Ergebnissen unterschieden. Es scheint sehr plausibel, dass die Schülerin durch falsche Zählstrategien zu diesen falschen Ergebnissen gelang, die in der Literatur als „Einspluseinsfehler der Nähe" (Gerster, 1982a, S. 28) beschrieben werden. So zählte sie hin und wieder (in der zweiten Subtraktion von a.) die Anfangszahl mit oder nur die zwischen liegenden Zahlen (in der vierten Subtraktion von b.). Auch Christos machte ähnliche Fehler. In seinen Berechnungen waren alle Teildifferenzen um eins größer als die richtigen Ergebnisse. Er wendete also konsequent eine Zählstrategie an, in der er die Anfangszahl mitrechnete.

Weitere Probleme bereiteten den Schülern die Behalteziffern in den Subtraktionen, wie in den folgenden Beispielen deutlich wird:

<table>
<tr><td>a.
51152 24
-48 2129
031
-24
071
-48
335
-216
019</td><td>b.
2430 18
163 189
200
48</td><td>c.
2430 18
-26 28
083
-84
090</td><td>d.
224 18
-26 26
064
-68
06</td></tr>
<tr><td>Natasa (Kl. 1)</td><td>Dimitris (Kl. 10)</td><td colspan="2">Christos (Kl. 11)</td></tr>
</table>

In der ersten Aufgabe kam Natasa beim Herunterholen der Ziffern durcheinander. In der dritten Subtraktion vergaß sie den Übertrag aus der Einerspalte und in der vierten Subtraktion addierte sie offensichtlich eine Übertragsziffer zuviel in der Hunderterspalte.

Dimitris wendete die Kurzform an. Er vergaß in der ersten Subtraktion, die er nicht notierte, die Übertragsziffer aus der Einerspalte. Seine Berechnungen sahen wohl so aus: „1*8=8, 4-8 geht nicht, 14-8=6. 1*1=1, 2-1=1. In der Folge gelang er durch Einmaleinsfehler (8*8=63, 3-3=0, 1*8=8, 8+6=14, 16-14=2) zur Teildifferenz 20. Er fuhr fort mit dem Herunterholen einer weiteren Ziffer vom Dividenden. Mit der größten Ziffer, die er im Quotienten setzen konnte (der 9), ergab sich ein wiederum zu großer Rest. Diese Tatsache irritierte den Schüler jedoch nicht und er beendete an dieser Stelle seine Lösung.

Auch Christos ging nicht regelgemäß mit den Behalteziffern um. Er vergaß sie sowohl bei der Berechnung der Teilprodukte als auch in den Subtraktionen. Er erkannte, wo ein Zehnerübergang erforderlich war, erweiterte die entsprechende Ziffer der Minuenden und berechnete auch die Ergänzungen richtig, aber in der Folge vergaß er (eher ignorierte er) die Erweiterungsziffer, um wahrscheinlich das Abziehen zu ermöglichen.

Die schriftliche Subtraktion wird in der ersten Klasse vorgestellt und in den nächsten Klassen eingehend geübt und vertieft. Die Überschreitung des Zehners wird zunächst in der ersten Klasse thematisiert und entsprechende Aufgaben werden durch „Rückwärtszählen", unter Rückgriff auf die Verdopplungsaufgaben sowie die Umkehrbarkeit von Addition und Subtraktion und schließlich mit der Strategie „Zehnerbildung rückwärts" berechnet. In der zweiten Klasse werden die Erweiterungs- und die Borgetechnik eingeführt, die auch in den nachfolgenden Jahrgängen genügend trainiert werden. Trotz der umfangreichen Übungen bleibt das Überschreiten des Zehners problematisch, wie die entsprechenden Fehler im Test belegen. Berücksichtigt man die Tatsache, dass der Test an Viertklässlern durchgeführt wurde und sogar gegen Ende des Schuljahrs 1997/98, sind die Schwierigkeiten der Schüler beunruhigend. Ihre Fehlermuster sind entstanden, weil sie offensichtlich Schwierigkeiten mit der Erweiterungstechnik hatten, die Rechenrichtung nicht beachteten, aus Konzentrationsmangel die Subtraktion mit der Addition verwechselten und fehlerhaft mit den Behalteziffern umgingen. Die verschiedenen Fehler in den Subtraktionen mit Übergang lassen die Vermutung zu, dass die Schüler zählende Strategien anwenden und daher keinen Gebrauch von heuristischen Strategien machen oder dass sie heuristische Strategien erfolglos einsetzen. Das wiederum führt zu der Annahme, dass sie die Grundaufgaben der Subtraktion weder automatisiert haben, noch sicher beherrschen. Diese Tatsache hängt unmittelbar damit zusammen, dass im griechischen Lehrbuch die Grundaufgaben nicht systematisch erarbeitet werden. Zwar werden sie thematisiert, aber ohne Zusammenhang zueinander. Es wird mehr Wert auf die Umkehrbarkeit zwischen Addition und Subtraktion gelegt, um die Ergebnisse der Grundaufgaben der Subtraktion aus den additiven Grundaufgaben abzuleiten. Dies ist aber den meisten Schülern auch nicht gelungen. Abschließend lässt die Tatsache, dass im griechischen Lehrbuch nur das Abziehverfahren thematisiert wird, die Frage offen, ob das Ergänzungsverfahren weniger fehleranfällig für die Schüler wäre.

4.2.3.2.3 Fehlende Null im Quotienten (Fehlermuster 0_1)

Es handelt sich um das Fehlermuster, in dem eine Ziffer des Dividenden heruntergeholt wurde, der Teildividend kleiner als der Divisor war, doch keine Null im Quotienten gesetzt wurde, wie in den folgenden Beispielen deutlich wird:

<table>
<tr><td>a.
832 | 4
-8 | 28
032
-32
00</td><td>b. 362286 | 9
-36 | 4259
0022
-18
048
-40
086
-81
05</td><td>c.
8040 | 2
-8 | 420
004
-4
00</td><td>d.
75665 | 37
-74 | 245
0166
-148
185
-185
000</td></tr>
<tr><td>Chara (Kl. 6)</td><td>Maria (Kl. 7)</td><td colspan="2">Melina (Kl. 11)</td></tr>
<tr><td>e.
362286 | 9
-36 | 4277
0022
-18
048
-42
066
-63
03</td><td>f.
832 | 4
-8 | 26
032
-32
00</td><td>g.
832 | 4
-8 | 280
032
-32
00</td><td>h.
804<s>0</s> | 4
-8 | 280
004
-4
00</td></tr>
<tr><td>Charalambos (Kl. 11)</td><td>Leonidas (Kl. 6)</td><td>Spiros (Kl. 6)</td><td>Christina (Kl. 4)</td></tr>
</table>

In all diesen Fällen außer in der vierten Aufgabe ging die erste Teildivision auf. In der Folge holten die Schülerinnen und Schüler die nächste Ziffer vom Dividenden herunter, die kleiner als der Divisor (a., b., d., e., f., g.) oder eine Null (c., h.) war. Da diese Teildivision „nicht ging", wurde auch keine Ziffer im Quotienten notiert, so dass eine Teildivision fehlte. Fortgefahren wurde mit dem Herunterholen einer weiteren Ziffer, mit der ein größerer Teildividend gebildet wurde. Auch die Endnull wurde manchmal als „nichts" interpretiert und weggestrichen, so dass erneut eine Teildivision fehlte. Diese Fehler mit der Null traten jedoch nicht isoliert auf (h.). Zusätzlich ergaben sich überflüssige Nullen im Quotienten dadurch dass der Rest dividiert wurde (c.) und durch Einmaleinsfehler falsche Quotientenziffern (e.) und falsche Teilprodukte (b., f.) notiert wurden.

Diesem Fehlermuster wurde in den Tests sehr oft begegnet. Mit der Häufigkeit 20 war es ein Fehler, der als systematischer in 10 der 12 Klassen aufgetreten war. Offensichtlich wurden Divisionen des Typs 2:9, 0:2 von den Schülern zu nicht lösbaren Divisionen erklärt, die folglich keine Quotientenziffern ergaben. Wahrscheinlich wurde diese falsche Rechenstrategie durch Sprechweisen wie „2:9 geht nicht" verstärkt. Die Schüler hatten weiterhin nicht realisiert, dass in Stellenwertsystemen, wie dem dekadischen System, „jede Ziffer zwei Informationen übermittelt, ihren Zahlenwert und zusätzlich - aufgrund ihrer Position im Zahlwort - ihren Stellenwert" (Padberg, 1996, S. 54), was hieße, dass nicht nur mit Zahlen sondern gleichzeitig mit Stellenwerten gerechnet wird. Vermutlich wurde die Kurzform der Division zu früh eingeführt und das hielt die Schüler davon ab zu verstehen, dass jede Staffel in der Division eine Quotientenziffer ergibt. Demzufolge war das Verständnis der Stellenwerte und der stellenwertbelegenden Rolle der Null im Quotienten lückenhaft. Es ist auch weiterhin anzunehmen, dass die Schüler keine Überschlagsrechnungen durchführten, welche ihnen helfen würden, eine Vorstellung der Größenordnung des Quotienten zu bekommen, und auch vor der Rechnung die Stellenzahl des Quotienten nicht bestimmten, da sie auf diese Weise anhand der Stellenzahl des Quotienten fehlerhafte Ergebnisse erkennen würden.

4.2.3.2.4 Fehler in den Teilprodukten (Fehlermuster P_1)

Bei diesem Fehlermuster wurde die richtige Zahl im Quotienten notiert, das entsprechende Teilprodukt war jedoch falsch. Mit der Häufigkeit 14 wurde dieser Fehler in 8 Klassen registriert.

<table>
<tr><td>a.
2310 | 9
-18 | 256
051
-45
060
-59
01</td><td>b.
362286 | 9
-32 | 45031
042
-42
0028
-27
016
-9
7</td><td>c.
2310 | 9
-18 | 256
051
-45
060
-53
07</td><td>d.
191 | 44
-173 | 4
018</td><td>e.
2430 | 18
-18 | 13
063
-52
11</td></tr>
<tr><td colspan="2">Angela (Kl. 3)</td><td colspan="3">Marios (Kl. 3)</td></tr>
<tr><td>f.
493 | 21
-41 | 24
083
-81
02</td><td>g.
851400 | 346
6812 | 2
2704</td><td>h.
224 | 18
-18 | 12
044
-26
18</td><td>i.
51152 | 24
-48 | 213
031
-24
075
-68
072
-68
04</td><td>j.
51152 | 24
031 | 213
075
00</td></tr>
<tr><td>Maria (Kl. 7)</td><td>Eleni (Kl. 7)</td><td>Chara (Kl. 6)</td><td>Panagiotis (Kl. 9)</td><td>Voula (Kl. 10)</td></tr>
</table>

Die Analyse der Schülerlösungen ergab, dass verschiedene Ursachen zu falschen Teilprodukten führten:

Zunächst resultierten falsche Teilprodukte durch Unsicherheiten bzw. Unzulänglichkeiten im Einmaleins. Manche Schüler hatten bestimmte Einmaleinsergebnisse falsch abgespeichert und reproduzierten in der Folge diese fehlerhaften Ergebnisse. Dies war deutlich in den Aufgaben mit einstelligem Divisor, da in diesen das errechnete Teilprodukt vollständig notiert wurde. Dabei handelte es sich um Einmaleinsfehler der Nähe (in b. 4*9=32), Einmaleinsfehler durch Perseveration (in a. 6*9=59 und in b. 5*9=42) und Fehler beim Abzählen (in c. 6*9=53, wahrscheinlich hat der Schüler hier durch Weiterzählen die Vielfachen berechnet und hat sich dabei um 1 verzählt). Es ist anzunehmen, dass durch Einmaleinsfehler auch die falschen Teilprodukte in den Aufgaben d., e. und j. zustande gekommen sind. So hat wohl Marios in d. für dasselbe Produkt (4*4) zwei verschiedene Ergebnisse berechnet, zunächst 13 und dann das richtige Ergebnis 16. Ähnlich hat er wohl in e. 3*8=22 gefunden. In diesen Aufgaben mit zweistelligem Divisor ist es schwieriger, die genauen Berechnungen des Schülers nachzuvollziehen. Es können sowohl Fehler beim Multiplizieren als auch beim anschließenden Addieren der Behalteziffern oder auch in beiden Teiloperationen auftreten.

Bestimmte Multiplikationsaufgaben führten die Schüler zu Irritationen, wie z. B. die Multiplikationsaufgaben mit der Eins (f.). In diesen Fällen wurde offensichtlich die Rolle der 1 als neutrales Element missverstanden und dominierte in den entsprechenden Ergebnissen. So berechnete auch Maria in diesem Beispiel 1*2=1 und 1*4=1.

Zusätzlich wurden Schwierigkeiten in der schriftlichen Multiplikation mit mehrstelligem Multiplikator festgestellt. Wie Eleni (g.) notierten manche Schüler die Behalteziffern als zusätzliche Ziffern in den Teilprodukten und errechneten somit falsche Teilprodukte. Aus ihre Rechnung geht auch hervor, dass sie den ersten Teildividenden nicht richtig bestimmt hat und dass sie die Null, wie viele andere Schüler, als „nichts" interpretierte und ignorierte.

Das Nichtberücksichtigen bzw. das falsche Umgehen mit den Behalteziffern löste weiterhin dasselbe Fehlermuster aus. Chara vergaß in dem zweiten Teilprodukt die Behalteziffer aus der Einerstelle (h.), Panagiotis (i.) errechnete in der letzten Teildivision durch Einmaleinsfehler 4*3=8, erhielt so ein einstelliges Ergebnis und hatte demnach keine Behalteziffer, die er berücksichtigen musste. Es kann aber auch sein, dass er 4*3=18 errechnete und in der Folge die Behalteziffer vergaß.

In den meisten oben ausgeführten Beispielen war es möglich aus den erhaltenen Teilprodukten die fehlerhaften Rechenstrategien der Schüler zu erkennen. In einigen Fällen war dies komplizierter, da unterschiedliche Rechenwege zu denselben falschen Ergebnissen geführt haben können. Hier müssen qualitative Erhebungsmethoden eingesetzt werden, damit die Schüler selbst zu Wort kommen, ihre Gedankengänge offen legen und Gewissheit über die verwendeten Strategien verschaffen. Bei den festgestellten Einmaleinsfehlern handelte es sich um Fehler der Nähe und Perseverationsfehler. Einmaleinsfehler der Nähe treten hervor, wenn beim Erlernen des Einmaleins das Aufsagen von Einmaleinsreihen überbetont wurde. Demzufolge haben die Schüler Schwierigkeiten, aus der Einmaleinsreihe das entsprechende Einmaleinsergebnis abzurufen. Es ist aber auch möglich, dass sie während des Aufsagens der entsprechenden Einmaleinsreihe die Finger als Hilfe verwenden und sich beim Zählvorgang verzählten (vgl. Gerster, 1982a, S. 129). Durch Verzählen gelangen die Schüler auch zu Teilprodukten, die um 1 zu groß oder zu klein waren, während sie versuchten durch fortgesetztes Addieren die Vielfachen einer Zahl zu ermitteln. Perseverationsfehler entstehen dann, wenn sich bestimmte Ziffern aus vorangegangenen Handlungsabschnitten im Bewusstsein der Schüler durchsetzen (ebd., S. 31). Sowohl Einmaleinsfehler der Nähe und Fehler beim Abzählen als auch Fehler durch Perseveration zeigen, dass die Einmaleinssätze zwar geübt, aber nicht erfolgreich gefestigt und automatisiert werden konnten. Die Schüler konnten sich nur annähernd an die Ergebnisse erinnern und vermutlich standen ihnen auch keine Strategien zur Verfügung, mit deren Hilfe sie ihre Unsicherheiten überwinden und die Einmaleinsaufgaben nachrechnen konnten. Es liegt nahe, dass sie die Einmaleinskenntnisse mechanisch durch Auswendiglernen erworben haben, dass sie demnach lediglich auf ihr Gedächtnis und ihr Erinnerungsvermögen angewiesen waren und diese Strategie hat sich langfristig als uneffektiv erwiesen hat.

Auf Konzentrationsschwächen lässt sich wohl das Vergessen von Behalteziffern zurückführen, wobei das Ignorieren dieser oder das Schreiben der Behalteziffern als zusätzliche Ziffern in den Teilprodukten mit unzureichenden Verfahrenskenntnissen und fehlender Einsicht in die Stellenwertschreibweise zu erklären sind.

Schließlich können Einmaleinsfehler mit der Eins durch Verwechselung der Rolle der Null und der Eins in der Multiplikation wegen mangelnder anschaulicher Vorstellung der Multiplikation mit der Eins oder durch Vernachlässigung des Übens mit der Eins im Unterricht entstanden sein.

4.2.3.2.5 Fehler in den Quotientenziffern (Fehlermuster Q_4)

Ähnlich wie das Fehlermuster P_1 ist auch das Fehlermuster Q_4. Hier wurde eine falsche Ziffer im Quotienten gesetzt und das dazugehörige Teilprodukt auch falsch berechnet. Mit der Häufigkeit 12 trat dieser Fehler in 8 der 12 Klassen auf. Die nachfolgenden Beispiele sollen dieses Fehlermuster verdeutlichen:

a.	b.	c.
13104 | 56 -130 | 501 00104 -56 048	75665 | 37 -74 | 25 0166 -165 0015	2430 | 18 -26 | 213 023 -18 160 -34 30
Theodora (Kl. 3)	Dimitra (Kl. 3)	Lena (Kl. 8)

Theodora (a.) bestimmte richtig den ersten Teildividenden, setzte jedoch eine zu große Ziffer im Quotienten und kam durch Fehler bei der Berechnung des Teilproduktes zu einem verhältnismäßig kleinem Teilprodukt. Sie hat wohl dabei wie folgt gerechnet: 5*6=30, schrieb die 0 auf und merkte sich die 3. In der Folge rechnete sie 5*5=10, vermutlich weil sie die Multiplikation mit der Addition verwechselte und addierte schließlich die Behalteziffer 10+3=13. So fand sie das Teilprodukt 130.

Dimitra (b.) vergaß eine Zwischennull im Quotienten zu setzen (Fehlermuster 0_1) und schätzte die Quotientenziffer in der dritten Teildivision zu groß. An das Teilprodukt 165 gelangte sie, indem sie vermutlich nach dem Multiplizieren eine falsche Behalteziffer (1 statt 3) addierte. Problematisch waren die Behalteziffern auch für Lena (c.). In der ersten Teildivision schätzte sie die Quotientenziffer zu groß und berechnete das Teilprodukt, indem sie die Behalteziffer ganz ausließ bzw. vergaß. Trotzdem war das Teilprodukt größer als der Teildividend, was die Schülerin nicht davon abhielt, die Subtraktion durchzuführen und dabei die größere von der kleinsten Zahl abzuziehen. Auf diese Weise wich sie dem Zehnerübergang aus. Es scheint sehr wahrscheinlich, dass sie auch in der zweiten Subtraktion die Rechenrichtung nicht einhielt und durch Zählfehler 8-3=6 rechnete. Die dritte Quotientenziffer schätzte sie zu klein und ließ bei der Berechnung des Teilproduktes wieder die Behalteziffern aus. Der verbliebene große Rest (30) blieb dabei unberücksichtigt.

<table>
<tr><td>d.
2310 │ 9
-21 │ 3300
021
21
000</td><td>e.
362286 │ 9
-36 │ 8320
0022
-21
18
-18
006</td><td>f.
851400 │ 346
-692 │ 2336
1169
-7678
4491</td></tr>
<tr><td>Katerina (Kl. 8)</td><td colspan="2">Lydia (Kl. 8)</td></tr>
</table>

Zu groß schätzte die Quotientenziffern auch Katerina (d.). Durch Einmaleinsfehler der Nähe errechnete sie 3*9=21 (Nähe zu 3*7=21). Die überflüssige Null im Quotienten notierte sie wohl durch Dividieren des Restes in der zweiten Teildivision. Lydia hatte dieselben Schwierigkeiten. Sie wählte auch große Quotientenziffern in der ersten Aufgabe (e.) und rechnete durch Einmaleinsfehler der Nähe 8*9=36 und 3*9=21. In der zweiten Aufgabe (f.) schätzte sie zwar die erste Quotientenziffer richtig, hatte aber Probleme bei der Subtraktion. Sie vergaß die Erweiterungsziffer aus der Einerstelle und wendete die Erweiterungstechnik falsch an (erweiterte ohne Grund am höchsten Stellenwert des Minuenden). Auch in der zweiten Subtraktion zog sie eine kleinere von einer größeren Zahl ab. Die zweite Quotientenziffer schätzte sie richtig (in Bezug zu dem falschen Teildividenden) berechnete jedoch das entsprechende Teilprodukt falsch.

Außer den Schülern, die eine (oder mehrere) Quotientenziffer falsch und gleichzeitig zu groß schätzten, gab es Schüler, die die Quotientenziffer zu klein schätzten und das dazugehörige Produkt auch falsch berechneten. Hierzu folgen einige Beispiele:

<table>
<tr><td>a.
224 │ 18
-18 │ 12
064
-064
000</td><td>b.
832 │ 4
-8 │ 27
032
-31
01</td><td>c.
13104 │ 56
-112 │ 12
0190
-122
078</td><td>d.
6396 │ 3
-6 │ 2094
039
-27
0126
120
006</td><td>e.
3689 │ 8
48 │ 460
09
0</td></tr>
<tr><td>Areti (Kl. 5)</td><td>Georgia (Kl. 4)</td><td>Gavrilos (Kl. 2)</td><td>Vasilis (Kl. 9)</td><td>Ioannis (Kl. 10)</td></tr>
</table>

Areti (a.) berechnete die erste Teildifferenz mit falscher Rechenrichtung, wählte als zweite Quotientenziffer eine 2, d. h. eine zu kleine Ziffer. Da sie wahrscheinlich Schwierigkeiten beim Berechnen des Teilproduktes hatte, setzte sie einfach das Teilprodukt dem Teildividenden gleich und beendete somit das Verfahren.

Georgia (b.) notierte im Quotienten eine 7, es scheint aber, dass sie mit der 8 multiplizierte und Fehler beim Abzählen machte, daher war ihr Teilprodukt um 1 kleiner als das richtige. Die falsche Ziffer notierte auch Gavrilos (c.) im Quotienten. Er notierte eine 1, seine Berechnungen zeigen offensichtlich, dass er mit der 2 multiplizierte und vergaß, die Quotientenziffer zu korrigieren. In der zweiten Teildivision behielt er dieselbe Quotientenziffer, die diesmal zu klein geschätzt wurde und berechnete das Teilprodukt falsch (er addierte falsche Behalteziffer). Der große Rest und die letzte Ziffer des Dividenden entgingen der Aufmerksamkeit des Schülers.

Vasilis (d.) hatte in seinen Berechnungen Schwierigkeiten mit der Teildivision 3:3, für die er eine Null im Quotienten notierte. Wahrscheinlich war für ihn jede Zahl durch 3 teilbar, die größer aber nicht gleich 3 ist. Mit dem Herunterholen einer weiteren Ziffer vom Dividenden wurde der Teildividend 39 gebildet, der dividiert durch 3 eine zweistellige Zahl ergeben würde. Da jedoch im Quotienten kein zweistelliger Teilquotient gesetzt werden darf, war Vasilis gezwungen, eine 9 zu wählen. Aus der Subtraktion ergab sich erneut ein zu großer Teildividend (12). Nun schrieb der Schüler eine 4 im Quotienten, mit der diese Teildivision aufgehen würde. Während er an diesem Schritt arbeitete, merkte er, dass er noch eine Ziffer vom Dividenden herunterholen muss. Um weitere Schwierigkeiten zu vermeiden, holte er diese Ziffer herunter, schrieb sie neben das errechnete Teilprodukt, ergänzte den Subtrahenden mit einer Null (für die Einerstelle) und führte auf diese Weise die Subtraktion aus. So berechnete er ein falsches Teilprodukt und in seiner Division fehlte gleichzeitig ein Teilschritt.

Ioannis (e.) schätzte alle Quotientenziffern bis auf die letzte richtig. Die dritte Teildivision 9:8 hielt er für nicht lösbar und notierte eine Null im Quotienten. Grund dafür ist wahrscheinlich dass er durch falsche Rechenrichtung 8:9 dividierte und so auf diesen Teilquotienten kam. Aus dem Rest der Subtraktion (0) erkennt man, dass er als Teilprodukt eine Zahl erhielt, die dem Teildividenden glich. Also muss er 9*0=9 gerechnet haben, d. h. hier ist ein Einmaleinsfehler mit der Null aufgetreten. Aus seiner Lösung ist auch ersichtlich, dass er die Teilprodukte nicht stellengerecht untereinander geschrieben hat.

Wie aus den Beispielen deutlich wird, wurde eine falsche Ziffer im Quotienten gesetzt, die entweder kleiner oder größer als die richtige Ziffer war und die Berechnung des dazugehörigen Teilproduktes war auch fehlerhaft. Die Wahl einer falschen Quotientenziffer zeigt, dass die Schüler Schwierigkeiten haben zu überschlagen, wie oft der Divisor in den Teildividenden passt. Sie versuchen die Quotientenziffern aus dem Einmaleins bzw. aus den Vielfachen des Divisors zu ermitteln, wobei sie in neue Schwierigkeiten geraten. Die Schwächen der Schüler im Einmaleins wurden auch in diesem Abschnitt deutlich. Es traten Einmaleinsfehler der Nähe, beim Abzählen und Fehler mit der Null auf. Manchmal wurde addiert statt multipliziert, es wurden falsche Behalteziffern addiert oder diese ganz ausgelassen und so resultierten auch falsche Teilprodukte. Durch fortgesetztes Addieren des Divisors entstanden (vermutlich durch falsche Zählstrategien) Teilprodukte, die sich um 1 oder 2 von den richtigen Ergebnissen unterschieden. Es ist anzunehmen, dass viele Kinder keine Rundungen bzw. Überschlagsrechnungen durchführten, um eine Vorstellung der Größenordnung des Teilquotienten zu bekommen. Bei einigen Schülern stellt sich die Frage, ob sie überhaupt Rundungsregeln oder Überschlagstechniken kennen. Für viele Schüler besteht auch die Vermutung, dass sie nicht wissen, wie sie sich verhalten sollen, wenn sie eine Quotientenziffer falsch geschätzt haben (vgl. Gerster, 1982a, S. 178).

4.2.3.2.6 Fehler in den Quotientenziffern (Fehlermuster Q_3)

In diesem Fehlermuster wurde die Quotientenziffer zu klein geschätzt, das zugehörige Teilprodukt wurde richtig berechnet. Nach dem Subtrahieren entstand eine Teildifferenz, die dem Divisor glich oder sogar größer als der Divisor war. Wie die Schüler mit der großen Teildifferenz umgingen, soll durch die folgenden Beispiele verdeutlicht werden. In 7 Klassen waren es 11 Schüler, die diesen systematischen Fehler machten.

a.	b.	c.
75665 | 37 -37 | 110315 38 -37 0166 -111 055 -37 185 -185 000	51152 | 24 -24 | 11131 27 -24 031 -24 075 -72 032 -24 08	851400 | 346 -692 | 24510 1594 -1384 02100 -1730 00370 -346 000240
Spiros (Kl. 6)	Chara (Kl. 6)	Kostantina (Kl. 5)

Die am häufigsten registrierte Reaktion der Schüler auf eine zu große Teildifferenz war das Setzen einer zusätzlichen Ziffer im Quotienten und das Dividieren in derselben Stellenwertspalte, wie die obigen Beispiele zeigen. Spiros schätze die erste und zweite Ziffer zu klein und war gezwungen, noch mal in derselben Spalte zu dividieren. Auf diese Weise ergab sich aus der Division mit einem fünfstelligen Dividenden ein sechsstelliger Quotient. Auch Chara und Kostantina schätzten jeweils die erste und dritte Ziffer zu klein und dividierten noch einmal in derselben Stellenwertspalte. Derselbe Fehler trat auch in den Lösungen von Stathis und Stavroula auf, die die Kurzform der Division anwendeten:

a.	b.
224 | 18 144 | 162 36 00	493 | 21 093 | 2031 30 11
Stavroula (Kl. 10)	Stathis (Kl. 10)

Stavroula subtrahierte in der ersten Subtraktion falsch, da sie die Erweiterungsziffer nicht berücksichtigte (22-18=14). Durch diesen Subtraktionsfehler und die heruntergeholte Ziffer entstand ein großer Teildividend. In der Folge setzte sie die zweite Quotientenziffer zu klein und dividierte daher noch mal in derselben Spalte. Stathis berechnete auch die erste Subtraktion falsch. Die zweite Quotientenziffer wurde auch hier zu klein geschätzt, was den Schüler dazu verleitete, wieder in dieser Spalte zu dividieren. Durch den Rest 11 erkennt man schließlich, dass beim Abziehen von der Null falsch gerechnet wurde (30-21=11).

Nicht alle Schüler reagierten jedoch mit mehrmaligen Dividieren in derselben Stellenwertspalte. Einige berücksichtigten die großen Teildifferenzen oder Reste gar nicht, wie in den folgenden Beispielen zu sehen ist:

a.	b.	c.	d.	e.
832 4 -8 207 032 -28 04	2430 18 -18 129 063 -36 270 -162 108	224 18 -18 11 244 -18 226	75665 37 -74 25 01665 -185 1480	2430 18 163 189 200 48
Dimitris (Kl. 12)	Magda (Kl. 6)	Faidon (Kl. 8)	Chara (Kl. 6)	Augustis (Kl. 10)

In all diesen Fällen wurde neben anderen Fehlern (Subtraktionsfehlern in c. und e. und Fehler beim Herunterholen der Ziffern in d.) eine Quotientenziffer zu klein geschätzt, die Teildifferenz war jedes Mal größer als der Divisor, (außer in a.). Die Schüler sahen sich jedoch nicht gezwungen, die Teildifferenz zu verringern, sondern fuhren mit der Division wie gewöhnlich fort. D. h. sie holten die nächste Ziffer vom Dividenden herunter und so bildete sich ein zu großer Teildividend. Sogar das Setzten einer 9 im Quotienten, ergab ein verhältnismäßig kleines Teilprodukt und in der Folge einen Rest, der größer als der Divisor war. Dieser Rest wurde dann stehen gelassen. Auch in den Fällen, in denen der Rest dem Divisor glich (a.), wurde nichts Weiteres unternommen. Die Schüler berücksichtigten die Größe des Restes nicht und beendeten ihre Lösungen.

Zusammenfassend resultierte durch das Setzen einer zu kleinen Quotientenziffer und der richtigen Berechnung des Teilproduktes eine große Teildifferenz (≥ Divisor). An dieser Stelle reagierten die Schüler auf zweierlei Art: entweder schrieben sie eine zusätzliche Ziffer im Quotienten und dividierten erneut in derselben Stellenwertspalte oder sie holten eine weitere Ziffer vom Dividenden herunter, dividierten den erneut großen Teildividenden und hinterließen einen Rest, der größer als der Divisor war. Das Wählen einer kleinen Quotientenziffer hängt mit der Schwierigkeit zusammen, die die Schüler beim Überschlagen haben. Das mehrmalige Dividieren in derselben Spalte lässt die Annahme zu, dass die Schüler die Einsicht in die Divisionsstaffel nicht gewonnen haben und diese formal anwendeten (Gerster, 1982a, S. 185). Zusätzlich fehlte ihnen eine Vorstellung von der Größenordnung der Teildifferenz als Hinweis auf mögliche Fehler bei den Quotientenziffern. Vermutlich haben auch keine Kontrollen bzw. Vergleiche zwischen der Teildifferenz (bzw. dem Rest) und dem Divisor stattgefunden, die zu dieser Feststellung führen könnten. Das Hinterlassen eines großen Restes lässt die Vermutung zu, dass die Schüler keine Regel kannten darüber, wann das Divisionsverfahren endet (ebd., S. 181). Betrachtet man die Größe der erhaltenen Quotienten, ist schließlich anzunehmen, dass die Schüler keine Vorstellung von der Größenordnung der Quotienten hatten, die Stellenzahl des Quotienten vorab nicht bestimmten und auch keine Überschlagsrechnungen durchführten.

4.2.3.2.7 Zusätzliche Null im Quotienten (Fehlermuster 0_2)

Hierbei handelt es sich um das Fehlermuster, in dem zusätzlich die Teildifferenz bzw. der Rest dividiert und eine zusätzliche Null im Quotienten notiert wurde. Mit der Häufigkeit 7 trat dieser Fehler in 6 Klassen auf. Folgende Beispiele helfen das Fehlermuster zu verdeutlichen:

<table>
<tr><td>a.
832 | 4
-8 | 280
032
-32
00</td><td>b.
191 | 44
-176 | 40
015</td><td>c.
832 | 4
032 | 280
0
0</td><td>d.
493 | 21
073 | 230
10
00</td></tr>
<tr><td colspan="2">Spiros (Kl. 6)</td><td colspan="2">Stavroula (Kl. 10)</td></tr>
<tr><td>e.
224 | 18
-18 | 120
044
-36
08</td><td>f.
224 | 18
-18 | 1640
044
-32
12</td><td>g.
191 | 44
-132 | 310
059
-44
15</td><td>h.
2310 | 9
-18 | 2560
051
-45
060
-54
06</td></tr>
<tr><td>Athanasia (Kl. 6)</td><td colspan="3">Pelagia (Kl. 1)</td></tr>
</table>

Bei diesen Aufgaben wurde eine zusätzliche Null im Quotienten notiert und zwar eine Endnull, was darauf hindeutet, dass alle Schüler zusätzlich den Rest dividiert haben. In einigen Fällen ist dieser Fehler nicht allein (a., b., d., e.), sondern in Verbindung mit anderen Fehlermustern aufgetreten. So fehlt in der Lösung von Stavroula (c.) auch eine Zwischennull im Quotienten. Pelagia schätzte in der zweiten Teildivision der Aufgabe f. die Quotientenziffer zu groß und vergaß in der Folge diese wegzuradieren. Bei ihrem Versuch, die richtige Quotientenziffer zu ermitteln, multiplizierte sie nur mit der einen Ziffer des Divisors (Fehlermuster P_4) und berechnete deshalb das Teilprodukt falsch. In Aufgabe g. schätzte sie die Quotientenziffer zu klein und dividierte noch mal in derselben Stellenwertspalte.

Außer des Setzens einer zusätzlichen Endnull im Quotienten wurden in vielen Fällen eine (oder mehrere) Zwischennull(en) im Quotienten notiert. Dies wird an den nachfolgenden Beispielen deutlich:

<table>
<tr><td>a.
8600 | 4
-8 | 20150
06
-4
20
-20
000</td><td>b.
851400 | 346
-692 | 2033
1594
1038
112140
1038</td><td>c.
224 | 18
-18 | 102
044
-36
08</td><td>d.
13104 | 56
-112 | 20304
0190
-168
224
-224
000</td></tr>
<tr><td>Akis (Kl. 1)</td><td>Athina (Kl. 9)</td><td colspan="2">Georgia (Kl. 7)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>e.
8600 4
-8 21050
06
-4
20
-20
000</td><td>f.
362286 9
-36 4020504
022
-18
048
-45
036
-36
00</td><td>g.
51152 24
-48 2010301
031
-24
075
-72
032
-24
08</td><td>h.
2430 18
-18 10305
063
-54
090
-90
00</td></tr>
<tr><td>Savas (Kl. 1)</td><td colspan="3">Ioanna (Kl. 3)</td></tr>
</table>

Die Schüler haben hier eine zusätzliche Zwischennull im Quotienten notiert, indem sie die Teildifferenz dividierten, bevor sie die nächste Ziffer herunterholten, um den neuen Teildividenden zu bilden. Bei einigen Schülern trat dieser Fehler nur einmal innerhalb derselben Aufgabe auf (a., b., c., e.), wobei andere Schüler systematisch alle Teildifferenzen in der Divisionsstaffel dividierten (d., f., g., h.). Wie auch bei den anderen Fehlermustern traten neben diesem Fehlermuster weitere Fehlerarten, wie z. B. Subtraktionsfehler in b. auf.

Es kam in einigen, jedoch nicht vielen, Fällen auch vor, dass die Schüler sowohl die Teildifferenz als auch den Rest dividierten, wie Ioanna und Panagiotis in ihren Lösungen:

<table>
<tr><td>a.
8040 2
-8 400200
004
-4
000</td><td>b.
6396 3
-6 2010320
03
-3
09
-9
06
-06
00</td><td>c.
2430 18
-18 1040
063
-62
010</td><td>d.
851400 346
-692 2040
1594
-1384
0210</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ioanna (Kl. 3)</td><td colspan="2">Panagiotis (Kl. 5)</td></tr>
</table>

Dadurch entstanden noch größere Quotienten, die jedoch bei den Schülern keine Zweifel hervorriefen. Alle diese Fehler hatten zur Folge, dass sich die Stellenzahl des Quotienten vergrößerte und die Ziffern einen anderen (falschen) Stellenwert erhielten. Die Schüler, die den Rest oder die Teildifferenzen dividierten, hatten offensichtlich Unsicherheiten im Stellenwertverständnis und wussten nicht, wann das Divisionsverfahren endet. Weiterhin hatten sie keine Vorstellung von der Größenordnung des Quotienten, so dass sie die Stellenzahl des Quotienten nicht im Vorhinein bestimmen konnten. Dies lässt die Annahme zu, dass sie keine Überschlagsrechnungen durchführten. Ein weiterer Grund für das Dividieren der Teildifferenz bzw. des Restes kann die Übergeneralisierung oder die falsche Interpretation einer Regel sein: Eine Null wird im Quotienten gesetzt, wenn der Teildividend kleiner als der Divisor ist. Anscheinend haben die Schüler nicht verstanden, dass sich diese Regel nur auf den Teildividenden bezieht, oder wussten nicht, welche Ziffern den neuen Teildividenden ausmachen.

4.2.3.2.8 Fehler in den Quotientenziffern (Fehlermuster Q_1)

Bei diesem Fehlermuster wurde eine falsche Ziffer im Quotienten notiert, das dazugehörige Teilprodukt wurde jedoch richtig berechnet. Es ist also die Umkehrung des Fehlermusters P_1. Mit der Häufigkeit 5 wurde dieser systematische Fehler in 4 Klassen registriert. Es folgen einige Beispiele zu diesem Fehlermuster:

<table>
<tr><td>a.
6396 | 3
-6 | 3132
03
-3
09
-9
06
-6
0</td><td>b.
832 | 4
-8 | 48
032
-32
000</td><td>c.
3689 | 8
-32 | 681
048
-48
009
-8
1</td><td>d.
832 | 4
-8 | 206
032
-32
00</td><td>e.
362286 | 9
-36 | 40294
0022
-18
048
-45
036
-36
00</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eleni (Kl. 8)</td><td colspan="3">Zafiris (Kl. 5)</td></tr>
<tr><td>f.
2430 | 18
-18 | 150
063
-54
090
-90
00</td><td>g.
224 | 18
-18 | 135
044
-36
08</td><td>h.
2430 | 18
-18 | 134
063
-54
090
-90
00</td><td>i.
51152 | 24
-48 | 214
031
-24
75
-72
032
-24
08</td><td>j.
13104 | 56
-112 | 235
190
-168
224
-224
000</td></tr>
<tr><td>Dimitra (Kl. 3)</td><td>Leonidas (Kl. 6)</td><td colspan="3">Smaro (Kl. 6)</td></tr>
</table>

Dieser Fehler ist sowohl in Aufgaben mit einstelligem als auch mit zweistelligem Divisor aufgetreten, wie man den Beispielen entnehmen kann. Im Quotienten wurden eine falsche (a., b., d., e., h., i., j.), in manchen Fällen sogar zwei falsche Ziffern notiert (c.), aber das entsprechende Teilprodukt war richtig. Fehlerhaft war also in diesen Aufgaben der Quotient und zwar bestimmte Ziffern im Quotienten. In manchen Fällen wurden auch überflüssige Quotientenziffern notiert, denen keine Teildivisionen zugeordnet werden konnten (g.), in anderen Fällen fehlten Quotientenziffern, während die dazugehörige Teildivision vorhanden war (i., f.) oder es traten Fehler mit der Null auf (b.).

Da in den meisten Aufgaben keine Teildivision fehlte und die Teildifferenzen richtig berechnet wurden, kann man davon ausgehen, dass diese Fehler Flüchtigkeitsfehler sind. Die Schüler berechneten offensichtlich in den Aufgaben mit einstelligem Divisor die Quotientenziffern durch Aufsagen der Einmaleinsreihen und notierten in der Folge durch erhöhte Rechengeschwindigkeit, Konzentrationsstörungen oder durch Fehler beim Abzählen die falsche Ziffer im Quotienten. Möglich ist aber auch, dass diese Fehler durch Unsicherheiten im Einmaleins zustande gekommen sind. Die Einmaleinskenntnisse wurden nicht ausreichend gefestigt und automatisiert, so hatten die Schüler Schwierigkeiten, aus der Einmaleinsreihe den zum Einmaleinsergebnis passenden Multiplikator abzurufen (vgl. Gerster, 1982a, S. 129). In manchen Fällen wurde deutlich, dass die Multiplikations- mit den Additionsergebnissen in den entsprechenden Aufgaben verwechselt wurden und so wurde

z. B. 3*3=6 und 4*4=8 berechnet (a. und b.). In den Aufgaben mit zweistelligem Divisor scheint es plausibel, dass die Schüler durch mehrmaliges Probieren (Multiplizieren außerhalb der Divisionsstaffel) zur richtigen Quotientenziffer gelangten und vergaßen, die davor ausgewählte Quotientenziffer zu korrigieren oder gar die richtige Ziffer im Quotienten zu notieren.

4.2.3.2.9 Fehler im Verfahren (Fehlermuster V_1)

Dieses Fehlermuster bezieht sich ausschließlich auf die Aufgaben des Tests mit zweistelligem Divisor. Die Schüler berechneten die Teilprodukte in diesen Aufgaben indem sie die Quotientenziffern nur mir einer Ziffer des Divisors multiplizierten. Mit der Häufigkeit 4 wurde dieser Fehler in 4 Klassen registriert. Dazu folgen einige Beispiele:

a.	b.	c.	d.	e.
224 | 18 -2 | 23 024 -24 00	2430 | 18 -2 | 2230 04 -2 23	2430 | 18 -24 | 303 0030 -24 06	75665 | 37 -6 | 25221 15 -15 006 -6 06 -6 05 -3 2	851400 | 346 -6 | 283 25 -24 012 -9 024
Giorgos (Kl. 11)		Christina (Kl. 12)	Giannis (Kl. 1)	

Die Schüler, die diesen Fehler machten, hatten ihre Aufmerksamkeit den Aufgaben mit einstelligem Divisor gewidmet. Nur zwei bis höchstens drei Aufgaben mit zweistelligem Divisor haben sie versucht zu lösen, jedoch ohne Erfolg. In den meisten Fällen wurde die Aufgabenbearbeitung unterbrochen (wie in b. und e.). Wie an den Beispielen deutlich wird, berücksichtigten die Schüler nur eine Ziffer des Divisors, um die Teilprodukte zu berechnen. Mal war diese die Einerziffer (b., d., e.), mal die Zehnerziffer (c.) und manchmal beide Ziffern abwechselnd (a.).

Es ist offensichtlich, dass die Schüler das Divisionsverfahren mit zweistelligem Divisor nicht beherrschten. Aus diesem Grund versuchten sie wohl ihre Kenntnisse aus dem Verfahren mit einstelligem Divisor zu übertragen und lösten die Aufgaben so, als wäre der Divisor einstellig. Es ist unwahrscheinlich, dass sie diese Fehler aus Konzentrationsschwäche machten. Nur wenn sie so bei der Berechnung eines Teilproduktes vorgehen würden, könnte man diese Vermutung akzeptieren. Aus den Beispielen geht jedoch hervor, dass sie systematisch bei allen Teildivisionen derselben Aufgabe diese Strategie anwendeten. Offensichtlich wussten sie nicht, wie man die Quotientenziffern in Aufgaben mit zweistelligem Divisor berechnen kann und beschränkten sich immer auf eine Ziffer des Divisors.

4.2.3.2.10 Fehler in den Quotientenziffern (Fehlermuster Q_2)

Hier wurde eine Quotientenziffer zu groß geschätzt. Dieser Fehler wurde von drei Schülern in drei Klassen systematisch begangen. Das inverse Fehlermuster, indem eine Quotientenziffer zu klein geschätzt wurde, haben viermal so viele Schüler (11) gemacht. Welche Konsequenzen dieser Fehler mit sich bringt, soll in den folgenden Beispielen deutlich werden:

a. 224 | 18 -18 | 147 044 -72 72 126	b. 75665 | 37 -74 | 205 0166 -185 981	c. 851400 | 346 -692 | 2033 1594 1038 112140 1038	d. 224 | 18 -26 | 26 064 -68 06
Athina (Kl. 9)			Christos (Kl. 11)
e. 851400 | 346 -46 | 1859 391 -368 0234 -230 0040 -414 626	f. 810011 | 67 -67 | 12953 140 -134 0060 -603 4571 -335 2361 -201 160	g. 810011 | 67 -67 | 12155 140 -134 0060 -67 0031 -335 0061 -330 0731	h. 2310 | 9 -18 | 257 051 -45 060 -63 3
Katerina (Kl. 4)		Warwara (Kl. 2)	Alekos (Kl. 11)

In diesen Beispielen wurden eine oder mehrere Ziffern zu groß geschätzt. Dies hatte zur Folge, dass zu große Teilprodukte entstanden, die größer als die Teildividenden waren. Diese Subtraktionen sind im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbar, da eine größere Zahl von einer kleineren nicht abgezogen werden kann. Die Schüler fuhren jedoch mit den Subtraktionen fort. Sie berechneten die Teildifferenzen, indem sie den Minuenden (und gleichzeitig Teildividenden) an seinem höchsten Stellenwert erweiterten und der Erweiterungsziffer in der Folge keine Beachtung mehr schenkten. Manchmal wurde auch die Erweiterungsziffer aus der Einerstelle nicht berücksichtigt (d., g. und h.) und falsch von der Null abgezogen (g.). Die Schüler wendeten also die Erweiterungstechnik falsch an. Nicht nur die Subtraktionen, sondern auch die Teilprodukte waren in einigen Fällen fehlerbehaftet. Athina (c.) berücksichtigte nicht die stellengerechte Anordnung der Teilprodukte innerhalb der Divisionsstaffel, Christos (d.) vergaß die Behalteziffern bei der Berechnung der Teilprodukte, Katerina (e.) berechnete die Teilprodukte anhand der zwei ersten Ziffern des Divisors (der Einer- und Zehnerstelle) und Warwara (g.) erhielt durch Einmaleinsfehler ein falsches Teilprodukt.

Die Wahl einer großen Quotientenziffer hängt mit den Schwierigkeiten der Schüler beim Überschlagen zusammen. Offensichtlich haben sie nicht verstanden, wie man die Quotientenziffern überschlagsmäßig berechnet oder die Überschlagstechnik wurde unzureichend geübt. Durch große Quotientenziffern ergaben sich, wie bereits erwähnt, Teilprodukte, die größer als die Teildividenden waren. Spätestens nach der Berechnung der Teilprodukte müssten die Schüler erkennen, dass die bevorstehenden Subtraktionen nicht möglich sind. Das war jedoch nicht der Fall, da die Schüler vermutlich nicht die nötigen Vergleiche zwischen Minuenden und Subtrahenden durchführten. So waren sie auch nicht in der Lage, die großen Teilprodukte als Hinweise auf falsch (zu groß) geschätzte Quotientenziffern zu interpretieren. Offensichtlich war ihnen auch nicht bekannt, wie man sich bei einer falsch geschätzten Ziffer verhalten muss bzw. wie man diese Ziffer korrigieren kann. Das Hinterlassen eines großen Restes, das in vielen Fällen beobachtet wurde, lässt schließlich die Vermutung zu, dass die Schüler keine Regel kannten, wann das Divisionsverfahren endet (Gerster, 1982a, S. 181).

4.2.3.2.11 Fehler in Subtraktionen ohne Zehnerüberschreitung (Fehlermuster S_1)

Die größten Schwierigkeiten hatten die Schüler in den Subtraktionen mit Zehnerübergang. Darüber hinaus gab es einzelne Schüler, die fehlerhaft Subtraktionen ohne Zehnerübergang berechneten. Als systematischer Fehler trat dieser Fehler nur einmal auf. In den entsprechenden Schülerlösungen werden die Fehler deutlich:

a.	b.	c.
3689 | 8 08 | 411 09 2	493 | 21 083 | 23 20	362286 | 9 022 | 4251 48 16 7
Katerina (Kl. 10)		

Katerina wendete die Kurzform der Division an. Sie berechnete dabei 9-8=2 (a.), 9-2=8 (b.) und 48-45=1 (c.). Möglich ist auch im dritten Fall, dass sie 5*9=47 gerechnet hat und daher die Teildifferenz 1 entstand.

Fehler in den Subtraktionen ohne Zehnerübergang können durch Schwächen im Einspluseins entstehen und zwar dann, wenn die Grundaufgaben der Addition und Subtraktion nicht gefestigt und automatisiert wurden. Möglich ist auch, dass solche Fehler durch falsche Zählstrategien zustande gekommen sind.

4.2.3.2.12 Fehler beim Abziehen von der Null (Fehlermuster S_3)

Irritiert wurden manche Schüler beim Rechnen mit der Null und konkret beim Abziehen von der Null. Auch dieser Fehler ist lediglich einmal als systematischer Fehler aufgetreten und zwar wie folgt:

<table>
<tr><td>a.
810011 : 67 = 12221
-67
140
-134
0140
-134
0141
-134
071
-67
04</td><td>b.
851400 : 346 = 2399
-692
1594
-1038
05560
-3114
24540
-3104
1404</td></tr>
<tr><td colspan="2">Maria (Kl. 2)</td></tr>
</table>

In diesen Aufgaben stand Maria viermal vor derselben Aufgabe, in der eine 4 von einer 0 abgezogen werden sollte. Jedes Mal erhielt sie 4 als Ergebnis, was darauf hindeutet, dass die Schülerin falsche Rechenrichtung anwendete. An dieser Stelle erkannte die Schülerin nicht, dass ein Zehnerübergang notwendig war und löste das Problem durch Abziehen der kleineren von der größeren Zahl. An allen anderen Stellen erkannte sie jedoch, wo ein Zehnerübergang erforderlich war und berechnete die Teildifferenzen auch richtig. Also war in diesem Fall die falsche Rechenrichtung keine Strategie, um den Zehnerübergang zu vermeiden. Es lag wohl an der Besonderheit der Zahl Null, welche die Schülerin dazu verleitete, zu denken, dass man von der Null (für sie von „Nichts“) nicht abziehen kann, daher sich nichts verändern kann, also die Zahl erhalten bleibt. An einer zweiten Aufgabe bereitete ihr die Null weitere Probleme und zwar als sie (in der vierten Subtraktion der Aufgabe b.) eine Null von einer Vier abziehen sollte. In dieser Aufgabe dominierte die Null. Wahrscheinlich ging die Schülerin hier auch abziehend vor und rechnete 4-0=0. Möglich ist auch, dass hier die Rolle der Null beim Subtrahieren mit der Rolle der Null beim Multiplizieren verwechselt wurde.

4.2.3.2.13 Fehler in den Teilprodukten (Fehlermuster P_2)

Bei diesem Fehlermuster wurden die Behalteziffern bei der Berechnung der Teilprodukte nicht berücksichtigt. Dieser Fehler wurde hin und wieder registriert, als systematischer Fehler trat er einmal auf.

a.	b.	c.
2430 18 -26 28 083 -84 090	224 18 -26 26 064 -68 06	51152 24 -48 2636 131 -124 0075 -62 132 -124 008
Christos (Kl. 11)		

In all diesen Aufgaben wurden bei der Berechnung der Teilprodukte die Behalteziffern ausgelassen. Jedes Mal wurde auch die Quotientenziffer zu groß geschätzt. Diese Tatsache führt zu der Annahme, dass der Schüler bewusst die Behalteziffern ignorierte, um die bevor stehenden Subtraktionen durchführen zu können. Hätte er die Behalteziffern berücksichtigt, so würden die Teilprodukte deutlich größer als die Teildividenden ausfallen, was ihn in der Folge hindern würde, die Subtraktionen auszuführen. Er bemerkte dabei nicht, dass auch trotz dieses Auslassens die Teilprodukte in den zwei ersten Aufgaben größer als die Teildividenden und daher die Subtraktionen nicht lösbar waren. Der Schüler konnte wohl nicht unterscheiden, welche Subtraktionen lösbar sind und welche nicht. Er hatte auch vermutlich Schwierigkeiten beim Berechnen der Quotientenziffern, wusste nicht, wie man zu große Quotientenziffern verändern muss und versuchte deshalb die resultierenden Teilprodukte zu verändern.

In den vorherigen Seiten wurden die systematischen Fehler beschrieben und analysiert. Diese traten jedoch, wie in vielen Fällen aufgezeigt werden konnte, nicht separat, sondern in Verbindung mit weiteren Fehlermustern auf. Neben den systematischen Fehlern wurden in den Schülerlösungen Fehlerarten registriert, die zweimal vom selben Schüler gemacht wurden. Diese Fehlermuster konnten nicht als systematisch eingeordnet werden. Da jedoch ein weiteres Auftreten sie zu systematischen Fehlern einstufen würde, wäre es angebracht, die Aufmerksamkeit auch auf diese Fehlermuster zu richten, um sie rechtzeitig wahrzunehmen und die Vorgehensweise der Schüler zu modifizieren, bevor sich diese verfestigt. In der nachfolgenden Tabelle werden die Fehlerarten mit der Häufigkeit 2 aufgelistet. Man erkennt wieder an erster Stelle mit identischen Werten die Fehlermuster S_2 und 0_1, die auch zu den Hauptgruppen der systematischen Fehler gehörten. An dritter Stelle tritt das Fehlermuster P_1 auf, dass auch von den systematischen Fehlern (der mittleren Gruppe) bekannt ist. Daraus wird ersichtlich, dass ungefähr 12% der Schüler diese Fehlermuster systematisch anwendeten, während weitere 12% der Schülerschaft dieselben Fehler nur zweimal gemacht haben. Gefolgt werden diese Fehlermuster von Fehlern in den Teilprodukten und Fehlern mit der Null, und zwar in derselben Reihenfolge wie sie in den systematischen Fehlern auch registriert wurde: Q_4 (15), Q_3(14), 0_2(11) und Q_1(10). Hier war die Anzahl der Schüler, die diese Fehler zweimal gemacht haben größer als die der Schüler, die diese Fehler systematisch machten. Bis zu dieser Stelle sind bei diesen Fehlergruppen dieselben

Tendenzen wie bei den systematischen Fehlern zu beobachten. Dieselben Fehlermuster, die sich als systematische herausstellten, wurden von anderen Schülern zweimal begangen. Dadurch wird deutlich, dass diese Fehlermuster eine weitaus größere Streuung haben als bisher angenommen und dass sich die Lehrer unbedingt ihre Aufmerksamkeit auf sie richten und die Schwierigkeiten der Schüler bezogen auf die entsprechenden Teilschritte der schriftlichen Division in ihren Unterricht berücksichtigen sollten.

In diesem Kapitel wurden die systematischen Fehler dargestellt und beschrieben, die in dem Divisionstest aufgetreten sind. Gleichzeitig wurden auch Hypothesen für ihre Entstehung aufgestellt. Um den Bewahrungsgrad dieser Hypothesen zu überprüfen, wurden in der Folge qualitative Methoden in Form von klinischen Interviews eingesetzt. Zu welchen Erkenntnissen diese führten, soll auf den nächsten Seiten beschrieben werden.

	Fehlerarten mit Häufigkeit 2																					
Klassen	**S1**	**S2**	**H1**	**H3**	**H4**	**H5**	**V1**	**V2**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**O2**	**P5**	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**O1**	**O2**	**O3**
Klasse 1	2	2		1			1		2						1	1	2			1		
Klasse 2		5		1				1	1	1					2	1	1	2				
Klasse 3									1							1		1		4	2	
Klasse 4		1		2					1						1	1	1	1	1	2		
Klasse 5		2		1					2		1		1				1	1		2	1	2
Klasse 6			1						1		1	1					3			1	1	
Klasse 7		3							5				1		2					5	1	1
Klasse 8	1	4				2			1	1				1	2	1	2	5	1		2	
Klasse 9		1							2				1							1	2	1
Klasse 10		1			1				1								1			4	2	
Klasse 11		3							2			1			2	2		2		2		
Klasse 12	1	2					1		1								3	3	2	2		1
Summe	4	24	1	5	1	2	2	1	20	2	2	2	3	1	10	7	14	15	2	24	11	5

Tabelle 22: Übersicht über die Fehlermuster mit der Häufigkeit 2

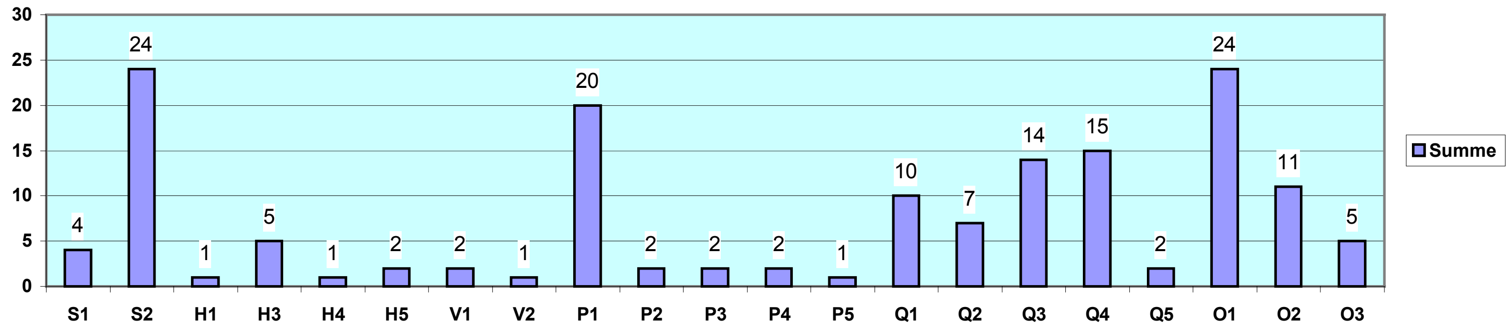


Abbildung 5: Übersicht über die Fehlermuster mit der Häufigkeit 2 im Säulendiagramm

4.3 Dritte Phase

4.3.1 Interviews

Durch den diagnostischen Test (vgl. Kapitel 4.2.2) ließen sich in den Schülerlösungen neben den fehlerfreien Lösungen auch zahlreiche Fehlermuster erkennen, die nach ihrer Häufigkeit in systematische und nicht systematische Fehler eingeteilt wurden. Die Auswertung der Tests erlaubte gleichzeitig Aussagen über die Verbreitung der verschiedenen Fehlerarten. Die systematischen Schülerfehler wurden beschrieben, gruppiert und interpretiert. In diesem Zusammenhang können zwar Hypothesen für das Entstehen der Fehler aufgestellt werden, doch ob diese Hypothesen tatsächlich mit den individuellen Lösungswegen der Schüler übereinstimmen, lässt sich mit dieser Untersuchungsmethode nicht nachweisen. Die Gedankengänge des einzelnen Schülers beim schriftlichen Dividieren, seine Schwierigkeiten und seine Auswege konnten mit dem diagnostischen Test nur hypothetisch rekonstruiert werden. Zur Überprüfung dieser Hypothesen, zur Ermittlung der Fehlerursachen und zur Rekonstruktion der Lösungswege der Schüler war es notwendig, ein weiteres Instrument in die Untersuchung einzubeziehen, um einen Zugang zur Perspektive und Gedankenwelt des Schülers zu eröffnen. Die Durchführung von qualitativen (klinischen) Interviews erweist sich dabei als unerlässliche Methode. Hier handelt es sich um halbstandarisierte explorative Einzelinterviews. Durch die Verbindung beider Untersuchungsmethoden (Test und Interviews) können die Fragestellungen vertieft erfasst und bearbeitet werden.

4.3.1.1 Auswahl der Interviewpartner

Die Schüler, die interviewt wurden, stammen aus der Schülerpopulation, die an der vorherigen Phase der Untersuchung, also an dem Test, teilgenommen hatte. Alle Schüler besuchten die 4. Klasse. Es wurden jedoch nicht alle 189 Schüler interviewt. Die Schüler waren sehr motiviert, an den Interviews teilzunehmen und zeigten Enttäuschung, als sie nicht alle ausgewählt wurden. Insgesamt wurden 46 Interviews durchgeführt. Ausgesucht wurden die Schüler nach dem Prinzip des *theoretical sampling.* Anders als in quantitativen Methoden ging es in den qualitativen Interviews nicht um die Häufigkeit bestimmter Handlungsmuster, sondern um die Bildung von Typisierungen oder Typologien (vgl. Lamnek, 1995, S. 92ff.). Durch den diagnostischen Test wurde eine Reihe von systematischen Fehlermustern festgestellt. In den Interviews sollten diese Fehlermuster tiefer untersucht und die Fehllösungen hinterfragt werden. Daher wurden von der Verfasserin für die Interviews solche Kinder ausgesucht, die die untersuchten Fehlermuster (systematische Fehler) begangen hatten.

4.3.1.2 Durchführung der Interviews

Die Interviews wurden von der Verfasserin im Anschluss an die Tests durchgeführt. Als geeigneter Ort erschien ein Raum in den Schulen der jeweils interviewten Schüler. Die schulische Umgebung sollte kompensierend wirken, da sie den Kindern vertraut und alltäglich war (vgl. Lamnek, 1995, S. 95). In jeder Schule wurde ein Raum zur Verfügung gestellt, wo die Interviews ungestört durchgeführt werden konnten.

Der zeitliche Abstand zwischen dem diagnostischen Test und den Interviews betrug zwei bis drei Tage. Die Interviews unterlagen keiner zeitlichen Begrenzung und dauerten je nach Fall zwischen 15 und 45 Minuten. Die Fähigkeiten und Defizite des jeweils interviewten Schülers bestimmten Dauer des Interviews und Anzahl der gestellten Aufgaben.

Durch die Interviews wollte die Verfasserin einen Einblick in die Denk- und Rechenwege der Schüler gewinnen. Die Hauptintention bestand darin, wie Valtin (1996, S. 173ff.) plädiert, „dem Kind in seinem Denken [zu] begegnen". Es ging nicht darum, durch geschicktes Fragen die Kinder zur richtigen Lösung zu führen, sondern mehr darüber zu erfahren, wie die Kinder zu einer Lösung gelangen. Daher waren richtige und falsche Antworten akzeptabel. Ausgehend von der Behauptung, dass Kinder anders rechnen als Erwachsene, anders rechnen als Erwachsene es vermuten, anders rechnen als andere Kinder und anders rechnen als eben noch bei „derselben" Aufgabe (Selter & Spiegel, 1997, S. 10ff.), sollten die Gedanken und Rechenwege der Schüler so weit wie möglich offengelegt werden. Wie schon bei der Fehleranalyse erwähnt wurde, haben auch fehlerhafte Antworten ihre logische Struktur, ihren rationalen Kern. Um diesen auf die Spur zu kommen, wurden die Kinder befragt.

Als besonders wichtig wurde während des Interviews eine vertrauensvolle Atmosphäre erachtet (Heinzel, 1997, S. 407). Die Tatsache, dass die Interviews von einer Person durchgeführt wurden, die den Kindern aus den vorherigen Phasen der Untersuchung bekannt war, verhalf zu einer lockeren Atmosphäre, die die Kooperation zwischen Interviewer und Interviewten positiv beeinflusste. Um den Schülern die Angst vor Leistungsbeurteilungen zu nehmen, wurde ihnen von vornherein erklärt, dass ihre Antworten nicht für ihre Benotung im Mathematikunterricht berücksichtigt werden würden. Die Verfasserin wollte von den Schülern erfahren, wie sie denken, während sie rechnen und wo ihre eventuellen Schwierigkeiten liegen. Sie trat nicht als Prüferin auf, sondern als „Verbündete", die auf die Hilfe der Kinder angewiesen war. Die Schüler sollten das Gefühl haben, sich frei äußern zu können, ohne dass sie danach mit negativen Konsequenzen rechnen müssten. Die Interviewsituation sollte somit tolerant und permissiv wirken (Lamnek, 1995, S. 96).

Die Aufgaben für die Interviews stammen aus den Aufgabengruppen des diagnostischen Tests. Die Anzahl der Aufgaben, die in den Interviews gestellt wurden, schwankte zwischen zwei und vier Aufgaben. Für jeden Schüler wurden bestimmte Divisionsaufgaben herausgesucht, die er noch einmal berechnen sollte. Dabei handelte es sich um Aufgaben, bei deren Lösung bestimmte Fehlermuster aufgetreten oder unklar in der Vorgehensweise waren. Außerdem wurde den Schülern auch eine Subtraktion mit Überschreitung des Zehners vorgegeben, um dabei ihre Strategien und mögliche Hemmungen herauszufinden. Im Unterschied zu den Tests handelte es sich hier nicht um ein stilles Rechnen. Statt dessen wurden die Schüler aufgefordert, laut zu rechnen und ihr Denken durch Sprechen zu begleiten. So entwickelte sich ein Gespräch zwischen der Verfasserin und den interviewten Kindern, das in einer kindgemäßen Sprache durchgeführt wurde. Die Verfasserin verhielt sich möglichst zurückhaltend. Sie nahm gezielte Eingriffe nur vor, wenn Interpretationen, Präzisierungen oder Anregungen gegeben werden sollten. Die Fragen der Verfasserin nahmen meist die zuvor gegebenen Schülerantworten auf und orientierten sich am Denken und Tun der Schüler. Schülern, die irgendwo „hängen" blieben, wurde nach einer längeren Denkpause mit situationsadäquaten Fragestellungen oder Impulsen weitergeholfen und bei denjenigen, die ihren Lösungsversuch auch dann nicht fortsetzen konnten, wurde die Aufgabenbearbeitung abgebrochen. Der Fortgang des Interviews wurde somit durch die Kinder bestimmt.

Die Interviews bzw. die Antworten der Schüler wurden mit einem Tonbandgerät aufgezeichnet. Dies widerspricht zwar der Alltagssituation der Schüler, war aber für die Datenerfassung und die weitere Datenauswertung unerlässlich.

> „Da in der empirischen Sozialforschung das Vorgehen um der Wissenschaftlichkeit willen systematisch und in irgendeiner Weise intersubjektiv prüfbar sein muss, ist Datenerhebung ohne -erfassung auch bei nicht-standardisierten Erhebungsverfahren nicht vorstellbar“ (Lamnek, 1995, S. 95).

Beim Anblick des Tonbandgerätes wurden die Kinder neugierig. Die Verfasserin erklärte ihnen, dass das Gerät ihr helfen würde, die einzelnen Schülerinterviews besser in Erinnerung zu behalten und nicht durcheinander zu bringen und dass die Aufnahme für die Kinder irrelevant sei. Sie bat die Kinder um ihr Einverständnis, das Interview per Tonbandgerät aufzuzeichnen, was von keinem der Schüler abgelehnt wurde. Sie schienen durch das Tonband eher unterhalten zu sein. Nach der Anlaufphase wurde diese Tatsache vergessen und das Gespräch nahm einen ganz normalen Verlauf. Zum Abschluss der Interviews kontrollierten manche Schüler, ob das Gerät noch lief, um die Aufnahme ihrer Interviews zu überprüfen.

Die meisten Schüler hatten keine Übung im „lauten Denken“ und im interpretativen Vorgehen, d. h. in der Verfolgung, Rekonstruktion und Verbalisierung ihrer Gedanken. Der Versuch, ihre Gedanken zu verbalisieren und zu rechtfertigen, bereitete vielen Schülern Schwierigkeiten. Entsprechend äußerten sie häufig, dass sie es gewohnt seien, alles „von innen zu machen“. Von den Kindern wurde zum Zeitpunkt der Interviews nicht nur gefordert, anspruchsvolle mathematische Aufgaben zu lösen, sondern sich auch dazu zu äußern (Selter & Spiegel, 1997, S. 102). Die Schwierigkeiten, die mit solchen Anforderungen verbunden sind, lassen sich auf drei Weisen erklären: die Fähigkeit der Introspektion über das eigene Denken ist in diesem Alter nicht ausreichend entwickelt, die Sprachgewandtheit für das Verbalisieren der eigenen Gedankengänge reicht nicht aus und manche Schüler können nicht gleichzeitig rechnen und sprechen (vgl. Lorenz & Radatz, 1993, S. 61). In manchen Fällen konnten diese Hindernisse mit passenden Fragestellungen der Verfasserin überwunden werden, manchmal blieb jedoch der Versuch, die Lösungsstrategien der Schüler offenzulegen, erfolglos.

Für die Auswertung wurden die Interviews transkribiert und das sprachliche Material inhaltsanalytisch interpretiert. Die Äußerungen der Kinder werden in der vorliegenden Arbeit im Original, mit allen grammatikalischen Auffälligkeiten (allerdings übersetzt aus dem Griechischen ins Deutsche) wiedergegeben. Zu den jeweiligen Interviews werden die entsprechenden Aufgabenlösungen präsentiert. Anschließend folgen die inhaltsanalytischen Kommentare. Es werden manchmal die ganzen Interviews und manchmal Ausschnitte aus diesen vorgelegt, je nachdem ob die gesamte Aufgabenbearbeitung oder bestimmte Passagen wichtig für die inhaltsanalytische Interpretation und die Fehleranalyse sind. Die Interviewerin (die Verfasserin) wird mit einem I abgekürzt, die interviewten Kinder werden mit ihren wirklichen Namen (Vornamen) präsentiert. Dadurch dass keine weiteren Angaben gemacht werden, bleiben die Schüler anonym.

4.3.2 Daten aus den Interviews

In den Interviews wurden die Schüler aufgefordert, bestimmte Divisionen zu berechnen. Dabei sollten sie „laut“ rechnen und ihre Vorgehensweise begründen. Laut zu rechnen bedeutete für die meisten Schüler ein (Teil)Ergebnis auszusprechen, ohne nähere Informationen über das Zustandekommen dieses Teilergebnisses zu liefern. Da jedoch an dieser Stelle die Denk- und Rechenstrategien der Schüler erkundet werden sollten, mussten auch die Denkstrukturen, die einem Rechenschritt vorhergehen, erkundet werden. Aus diesem Grunde stellte die Verfasserin den Schülern Fragen. Diese Fragen sollten die einzelnen verdeckten Gedankenstrukturen erkennbar und die damit zusammenhängenden bzw. die daraus resultierenden Lösungsschritte der Schüler verständlich machen. So wurden die Schüler z.B. befragt, weshalb sie eine bestimmte Quotientenziffer auswählen, wie sie die Teilprodukte berechnen, wie sie vorgehen, wenn sie subtrahieren, usw. Die Mehrzahl der Schüler konnte auf diese und ähnliche Fragen eine Antwort geben, die den verwendeten Rechenweg oder den Kerngedanken konkret beschrieb. Einige Schüler, die glücklicherweise eine Minderheit bildeten, schwiegen und konnten keine weiteren Informationen zu ihren Rechenergebnissen geben. Sie sagten, sie wüssten nicht, wie sie zu einem Ergebnis kämen. Die Antworten der meisten Kinder gaben jedoch Aufschluss über ihre Rechenstrategien und über die kritischen Punkte im Divisionsverfahren, die teilweise oder vollkommen missverstanden wurden und zu fehlerhaften Lösungen führten.

4.3.2.1 Fehler in den Subtraktionen (Fehlermuster S_1, S_2, S_3)

In den Interviews wurden die Schüler befragt, wie sie die Subtraktionen im Divisionsverfahren berechnen. Hier waren die Subtraktionen mit Überschreitung des Zehners von besonderem Interesse. Fehlermuster, die in Subtraktionen ohne Überschreitung aufgetreten sind (Zählfehler und Fehler in den Grundaufgaben), werden auch in diesem Abschnitt thematisiert. Bevor zu den verwendeten Strategien der Kinder übergegangen wird, werden einige theoretische Bemerkungen über das Subtraktionsverfahren vorangestellt.

Das Subtraktionsverfahren wird in Anlehnung an Gerster (1982a, S. 40) nach zwei Gesichtspunkten unterschieden:

1. nach der Art, wie die *Differenz* berechnet wird,

    a. durch Abziehen oder
    b. durch Ergänzen

2. nach der Art, wie der *Zehnerübergang* durchgeführt wird

    a. nach der Borgetechnik
    b. nach der Erweiterungstechnik
    c. nach der Auffülltechnik

Im griechischen Lehrbuch werden für die Berechnung der Differenz ausschließlich das *Abziehen* vorgestellt. Nur an einer Stelle wird das Ergänzen in der Subtraktion angesprochen. In der vierten Klasse werden Sachsituationen beschrieben, in denen die Subtraktion angewendet werden kann. Dies sind Situationen, in denen der Rest, die Differenz und schließlich die Ergänzung errechnet werden soll. Bei näherem Betrachten stellt man jedoch fest, dass es sich hierbei nicht um die ergänzende bzw. die additive Berechnung der Subtraktion handelt. Die Schüler lernen eine Ergänzungsaufgabe der Form 8 + x = 15 durch die Subtraktionsaufgabe 15 – 8 = x zu lösen. In diesem Zusammenhang wird die Subtraktion immer dann angewendet, wenn die Ergänzung einer Aufgabe gesucht wird und diese wird abziehend berechnet. Wenn man jedoch in der schriftlichen Subtraktion von Ergänzen spricht, dann ist damit das „Hinaufaddieren" von Subtrahenden zum Minuenden gemeint, es wird also additiv vorgegangen, ein Vorgang, der im griechischen Lehrbuch keine Erwähnung findet. Für die Berechnung des Zehnerübergangs werden im griechischen Lehrbuch die Borge- und die Erweiterungstechnik vorgestellt. Beide Verfahren werden genauso intensiv eingeübt und es bleibt den Schülern überlassen, nach welcher Methode sie den Zehnerübergang im Subtraktionsverfahren durchführen. Bemerkenswert ist, dass obwohl im Lehrbuch bei der schriftlichen Subtraktion nur das Abziehverfahren vorgestellt wird, die Schüler in den Interviews auch das Ergänzen anwendeten. Das Ergänzen fand sogar im Vergleich zum Abziehen größere Resonanz, da 22 Schüler ergänzend und nur 6 Schüler abziehend vorgingen. Bezüglich der Berechnung des Zehnerübergangs wurde von allen Schülern die Erweiterungstechnik angewendet. Die Rechenstrategien „Abziehen" oder „Ergänzen" reichen jedoch nicht aus, um den genauen Rechengang der Schüler zu beschreiben. Es muss näher erläutert werden, welche konkrete Schrittfolgen im einzelnen Verfahren (Abziehen oder Ergänzen) befolgt werden.

1. Das Abziehen wurde:
   i. in Einerschritten (4 Schüler) und
   ii. durch Zehnerbildung (2 Schüler) durchgeführt
2. Das Ergänzen wurde:
   i. in Einzelschritten (13 Schüler)
   ii. durch Zehnerbildung (3 Schüler) und
   iii. als Umkehrung der Addition berechnet (6 Schüler).

Neben den Schülern, die nach einer und derselben Methode das Subtraktionsverfahren durchführten, gab es auch Schüler, die mehrere der bereits erwähnten Strategien anwendeten:

- 1ii. + 2i. (1 Schüler)
- 1ii. + 2ii. (1 Schüler)
- 2i. + 2iii. (1 Schüler)
- 2ii + 2iii. (1 Schüler)

Zusätzlich gab es einige Schüler (5), die neue Strategien für sich erfunden hatten, die in einem gesonderten Kapitel (5.3.3.1) beschrieben werden und einige, die keine Angaben über die verwendeten Strategien geben konnten.

Zu den einzelnen Strategien wird im Folgenden Näheres beschrieben. Im ersten Fall (1i.) wird das **Abziehen** angewendet. Beginnend vom Minuenden wird in *Einzelschritten* rückwärts gezählt bis zum Erreichen des Subtrahenden. Die Finger leisten dabei die entsprechende Merkhilfe, wie z. B. bei Giorgos:

2042 -853 1199	**I**: Giorgo, könntest du jetzt bitte diese Subtraktion für mich ausrechnen? **Giorgos**: Ja, 12, ich ziehe 3 ab, 12, 11,10,9,…9. Die 1 werden wir auf die 5 tun. 14, 13,12,11,10,9. Die 1 tue ich auf die 8 (vergisst es jedoch in der Folge und rechnet mit 8 weiter). Von der 10 ziehe ich 8 ab, hm…10, 9,8,7,6,5,4,3,2,1, 1. **I**: Kannst du das noch mal wiederholen? **Giorgos**: (verwirrt) Drei? Oh, 8 plus 1 wird 9. (Fängt wieder an zu rechnen) 10, 9,8,7,6,5,4,3,2,1.

Das Abziehverfahren verwenden die Schüler auch in der zweiten Strategie (1ii.). Hier findet jedoch kein zählendes Rechnen statt, sondern die Schüler nutzen die *Zehnerbildung* aus. Sie beginnen ihre Berechnungen vom Minuenden. Durch Abziehen erreichen sie zuerst die 10 (zurück zum vollen Zehner) und in einem zweiten Schritt den Subtrahenden (Abziehen vom vollen Zehner). Marias Berechnung ist ein Beispiel für die Strategie „Zehnerbildung rückwärts“:

2430 18 -18 135 063 - 54 090 - 90 00	**Maria**: Zwei Ziffern hat der Divisor, zwei trennen wir auch links ab und sagen die 18 geht in die 24 einmal. 4 minus 8 geht nicht, 14 minus 8, hm…6. 1 der Übertrag, 1 plus 1, 2. 2 minus 2, 0. Wir holen auch die nächste Ziffer runter. Die 18 geht in die 63…(rechnet leise)… **I**: Was glaubst du denn? **Maria**: …(schweigt)…drei. **I**: Mal sehen… **Maria**: 3 mal die 8, 24. Wir schreiben die 4, 2 der Übertrag. 1 mal die 3, 3. 3 plus 2, 5. 13 minus 4, 9. 1 der Übertrag, 5 plus 1, 6. 6 minus 6, 0. **I**: Wie hast du die 13 minus 4 so schell gefunden? **Maria**: 13 minus 3, 10. 10 minus 1, 9. **I**: Ach, so! Bravo! **Maria**: Die 18 geht in die 90…(Pause)…5. Fünfmal die 8, 40, wir schreiben die 0, 4 der Übertrag. Einmal die 5, 5, plus 4, 90. 0 minus 0, 0. 9 minus 9, 0. **I**: Schön Maria, wir sind fertig.

Das Abziehen wird auch in der Sprechweise der Schüler deutlich. Ausdrücke wie „ich ziehe ab“, „3 von 6“ (im Sinne von ich ziehe 3 von 6 ab), oder „minus“ zeigen, dass man sich rückwärts bewegt bzw. abzieht. Genau gegensätzlich gehen die Schüler in den nächsten Fällen vor.

Im dritten Fall (2i.) berechnen die Schüler die Differenz **ergänzend**. Sie beginnen dabei vom Subtrahenden und in *Einerschritten* zählend erreichen sie den Minuenden. Viele von ihnen nehmen die Finger zu Hilfe, wie z. B. Vangelis im nachfolgenden Beispiel:

2052 - 173 3879	**I**: Ich werde dir eine Subtraktion geben, die du berechnen sollst und dann kannst du gehen. **Vangelis**: 3 von 2 kann ich nicht abziehen, also sagen wir von 12. 3…, 4,5,6,7,8,9,10,11,12…hm, 9. 1 der Übertrag plus 7, 8 kann ich von der 5 nicht abziehen, also sagen wir 15. 8…, 9,10,11,12,13,14,15 (guckt auf seine Finger)…7. 1 der Übertrag plus 1, 2 kann ich von 0 nicht abziehen, also sagen wir von 10. 10 nehme 2 heraus, 8, 1 der Übertrag plus drei, eh... (korrigiert) plus zwei, drei. (Hier beendet er seine Berechnung ohne zu merken, dass er im letzten Schritt addiert hat).

Die vierte Strategie (2ii.) umfasst wieder die *Zehnerbildung*. In diesem Fall beginnen die Schüler ihre Berechnungen vom Subtrahenden. Sie ergänzen in einem ersten Schritt den Subtrahenden bis zur 10 und in einem zweiten Schritt bis zum Minuenden. Die zwei Teilergebnisse werden in der Folge addiert und so wird die Differenz berechnet. Ein Beispiel für die Strategie „Zehnerbildung vorwärts" liefert die Berechnung von Giannis. Allerdings bestand der Klassenlehrer darauf, dass seine Schüler die Kurzform der schriftlichen Division verwenden, in der die Teilprodukte nicht notiert, sondern die Differenzen sofort im Kopf gerechnet werden:

13104 | 56 190 | 234 224 00	**Giannis**: Zwei Ziffern hat der Divisor, zwei trennen wir auch im Dividenden ab. Die 56 geht in die 13 nicht, wir nehmen noch eine (gemeint ist hier Ziffer), die 56 geht in die 13 (statt 131 zu sagen) so oft wie die 5 in die 13, zweimal. Zweimal die 6, 12 von 1 geht nicht, von 21…9. **I**: Wie hast du die 9 herausbekommen? Kannst du mir das erklären? **Giannis**: 12, wir tun 8 und es wird 20 und noch 1, 21. **I**: Schön, wie machen wir jetzt weiter? **Giannis**: Zweimal die 5, 10, von 13, 0. **I**: …hm… **Giannis**: Ach, nein, falsch. **I**: Was ist falsch? **Giannis**: Wir hatten 1 als Übertrag, mm…2 als Übertrag....

In der letzten Strategie (2iii.) *wandeln* die Schüler jede *Subtraktionsaufgabe* in einer *Additionsaufgabe um* und berechnen so die Differenz. So sagen sie z. B. 14 minus 6 ergibt 8, weil 8+6=14. Eigentlich handelt es sich hier um das Berechnen der Ergänzungsaufgabe 6+_=14. Dies soll durch das folgende Beispiel mit Kiki verdeutlicht werden:

224 : 18 = 12 -18 044 -36 08	**Kiki**: Die 18 geht in die 24 einmal, weil wenn wir 2 nehmen, dann kommt mehr raus. Einmal die 18 ist 18. 8 von 2 kann man nicht abziehen, deshalb wird es 12…4, 1, die wir genommen haben, plus 1, 2, von 2…0. **I**: Ja, wie hast du denn die 4 in der Subtraktion so schnell gefunden? **Kiki**: Wir addieren 8 plus 4 gleich 12. Wir holen die andere 4 runter und es wird 44. Die 18 geht in die 44 zweimal. 2 mal 8 ist 16, wir schreiben die 6 und behalten die 1, 1 mal 2 ist 2, plus 1, 3. 6 von 4 kann ich nicht abziehen, deshalb wird es 6 von 14. **I**: Und wie findest du das? **Kiki**: Ich addiere die 6 mit der 8 und es kommt 14 raus. 1, die wir genommen haben, von (sagt von, meint aber plus) 3, 4, von 4, 0.

Das Umwandeln einer Subtraktionsaufgabe in eine Additions- bzw. in eine Ergänzungsaufgabe lässt sich darauf zurückführen, dass im griechischen Lehrbuch ab der ersten Klasse nach der Behandlung der Addition sofort die Subtraktion als Umkehraufgabe thematisiert wird. In der 3. Klasse werden am Anfang des Schuljahres in einer Wiederholungsphase die Rechenstrategien für beide Rechenoperationen nicht nacheinander, sondern gleichzeitig behandelt. So wird z. B. in derselben Lehreinheit die Strategie „Zehnerbildung“ für die Addition und zugleich für die Subtraktion vorgestellt:

8+6=?	14-6=?
8+2=10	14-4=10
10+4=14	10-2=8

Durch die zeitlich nahe oder auch gleichzeitige Behandlung beider Rechenoperationen und die Gegenüberstellung der Aufgaben und deren Ergebnisse bleiben die Ergänzungen mancher Additionsaufgaben mit Zehnerübergang besser in der Erinnerung der Schüler verhaftet, viele von ihnen lernen diese auswendig und sind in der Lage diese automatisch abzurufen. Das beabsichtigen auch die Autoren der Bücher, indem sie in den entsprechenden Seiten der Lehrerbände von einem „mechanischen Erlernen der Addition und Subtraktion“ plädieren (vgl. „Meine Mathematik“ Lehrerband, 2. Klasse, S. 168). Das Einprägen der Zahlensätze verstärkt sich dadurch, dass diese Aufgaben in den Zwanzigerraum gehören, der in jeder Klasse immer wieder erneut aufgegriffen wird.

Darüber hinaus gab es Schüler, die mehrere Strategien in derselben oder in verschiedenen Aufgaben verwendeten. Die Entscheidung für die jeweils verwendete Strategie hing von den gegebenen Zahlen ab. Bei der Anwendung der bereits erwähnten Strategien sind Fehler besonders bei den Strategien (1i.) Abziehen in Einerschritten, (2i.) Ergänzen in Einzelschritten, (2ii.) Zehnerbildung vorwärts (2iii.) und Berechnung der Subtraktion als Umkehrung der Addition aufgetreten und zwar in den Fällen, in denen der Subtrahend weit entfernt vom Minuenden lag.

Falsche Zählstrategien

In den Fällen, in denen die Schüler das zählende Rechnen anwendeten, kamen sie zu Ergebnissen, die sich von den richtigen Ergebnissen um 1 unterschieden. Diese Ergebnisse lassen sich auf falsche Zählstrategien zurückführen. In manchen Fällen ergänzten sie vom Subtrahenden zum Minuenden und zählten die Anfangszahl mit, wie es im folgenden Beispiel in der Hunderterspalte deutlich wird:

$2_10_15\ _17$ $-\ _11\ _18\ 9$ $1\ 8\ 7\ 8$	**Apostolos**: 7…hm…9 von 7 kann nicht abgezogen werden. Wir borgen einen Einer und sagen 17, hm, nein, 9 von 17 ist…(rechnet mit den Fingern)…8. 1, die wir uns geborgt haben, plus 8, 9, von 5 kann nicht abgezogen werden, wir borgen einen Ze… einen Einer und sagen 15 von 18, …18 von 15…(kommt durch die notierte Übertragsziffer durcheinander und schweigt)… **I**: Was hast du gerade gesagt? **Apostolos**: Hm, ich meine 9. 9 von 15 ist…4. **I**: Kannst du das mal laut rechnen? **Apostolos**: 9,10,11,12,13,14,15…ach, das sind 7 (falsches Ergebnis). 1 von 0 geht nicht, ach nein, wir holen das noch (die Übertragsziffer)…und…2 von 0 kann man nicht abziehen, wir borgen einen Zehner und sagen 10 von 2,…9, nein 8, 1, die wir uns geborgt haben, die holen wir runter, 1 von 2, 1.

Die Schüler (4), die solche Zählfehler machten, wendeten diese falsche Zählstrategie nicht überall an. Es gab in derselben Subtraktionsaufgabe Differenzen, die sie auch richtig berechneten. Doch sie konnten sich nicht auf eine Zählstrategie einigen. Manchmal zählten sie die Anfangszahl mit oder zählten nur die dazwischen liegenden Zahlen, was sie jedes Mal zu falschen Ergebnissen führte. An dieser Stelle werden auch die Subtraktionsberechnungen von Vasiliki präsentiert, die beide falschen Zählstrategien anwendete:

$2430 \mid 18$ $-18 \quad 15\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}1$ 53 … -36 18 -18 0	(in der ersten Subtraktion) **Vasiliki**: 8 von 14 ist… 5. **I**: Wie rechnest du das? **Vasiliki**: 8 bis wir zur 14 ankommen… **I**: Ja, kannst du das laut sagen? **Vasiliki**: 8, 9,10,11,12, 13, 14, also sind das 5. 1 plus 1 ist 2, von 2, 0. (in der zweiten Subtraktion) **Vasiliki**: 6 von 3 kann man nicht abziehen, 6 von 13 ist 6,7,8,9,10,11,12,13, 8. 1 plus 3, 4, von 5, 1. …

Ähnliche Zählfehler machten auch Schüler, die das Abziehen in Einerschritten statt des Ergänzens anwendeten. Fehler beim Zählen führten auch in Subtraktionsaufgaben ohne Überschreitung d. h. im Zehnerraum zu falschen Ergebnissen. Diese Fehler zeigen, dass die Schüler Schwierigkeiten mit der Anfangs- und Endzahl bzw. mit den Eckzahlen beim Weiterzählen haben. „Ursachen solcher Schwierigkeiten liegen vielleicht in der Überbetonung des kardinalen Standpunktes bei der Einführung der Rechenoperationen (Zurückführen des Addierens auf Vereinigen von Mengen), was möglicherweise zu einer Vernachlässigung der Probleme beim ordinalen Zählen geführt hat.“ (Gerster, 1982a, S. 29) Um die Überbetonung eines Zahlaspektes - hier des Kardinalaspektes - zu vermeiden, sollte die Einführung und Behandlung der Subtraktion (und der Addition) aspektreich sein. Neben der Restmengenbildung sind das Zwanzigerfeld, welches den kardinalen Aspekt und die Zwanzigerreihe, welche den ordinalen Zahlaspekt betont, geeignete Materialien. Um den Maßzahlaspekt zu vermitteln, können Rechengeld und Steckwürfel eingesetzt werden.

Durch Operatoren (Pfeile, Tabellen, Zahlenstrahl) wird der dynamische Aspekt der Subtraktion (und der Addition) deutlich. Während das Kleine 1-1 in abwechslungsreichen Übungen (Berechnen von Analogieaufgaben, Nachbaraufgaben, Rückwärts- bzw. Weiterzählen in Schritten) geübt werden kann, sollte es auch in Beziehung zu dem Kleinen 1+1 in Form von Aufgabennetzen gesetzt werden, um die Beziehungen der zwei Rechenoperationen zu verdeutlichen (Padberg, 1996, S. 101ff.).

Fehler beim Übertrag

Weitere Schwierigkeiten bereiteten einigen Schülern die Übertragsziffern. In den meisten Fällen wurde der Zehnerübergang durch Erweiterung bewältigt, es wurde richtig zur erweiterten Zahl ergänzt, doch in der Folge d. h. in der nächsten Stellenwertspalte wurde die Übertragsziffer nicht mehr berücksichtigt. Das geschah in manchen Fällen durch Vergessen oder sogar in anderen Fällen durch bewusstes Ignorieren der Übertragsziffer, um die erhaltenen Ergebnisse den gegebenen Zahlen anzupassen bzw. anzugleichen.

<table>
<tr><td>2430 : 18 = $1\cancel{5}\cancel{4}36$
-18
063
90
72
-54
190</td><td>(in der zweiten Subtraktion)
Emilia: Die 4 ziehen wir von der 13 ab und es bleiben 9. 5 von 6 ist 1.
I: Könntest du mir bitte erklären, wie du die 9 gefunden hast?
Emilia: Von der 4 bis zur 13 sind 9.
I: Und dann?
Emilia: 5 von 6 ist 1. Ich hole auch die 0 runter…</td></tr>
<tr><td>2057
- 189
2868</td><td>**Gawrilos**: 9 von 17,…8. 1 der Übertrag, plus 8 ist 9, von 15…6. 1 der Übertrag, plus 1 ist 2, von 10, 8. Wir holen auch die 2 runter.</td></tr>
</table>

In den obigen Beispielen vergaßen die Schüler die Übertragsziffer. Im folgenden Beispiel handelt es sich jedoch nicht um ein Vergessen, sondern eher um ein Auslassen der Übertragsziffer, da ihre Berücksichtigung das Zustandekommen der Lösung (allerdings falschen) nicht gewährleisten würde:

<table>
<tr><td>224 : 18 = 26
- 26
064
- 68
06</td><td>(in der ersten Subtraktion)
Christos: Wir sagen die 6 von der 2 kann man nicht abziehen, wir setzen 12. 6 von 12, 6, 1 der Übertrag, nein…2 von 2 ist 0.
I: Was ist denn mit dem Übertrag, du hast gesagt…
Christos: Der Übertrag geht weg.…
(in der zweiten Subtraktion)
Christos: 8 von 14 ist…
I: Wo hast du denn die 10, hier steht 4, du sagst aber 14…
Christos: Die 14 wird aus der 4 und aus einem Übertrag gemacht…
I: Was wird dann aus dem Übertrag?
Christos: Ich weiß nicht…unsere Lehrerin sagt es so…
I: Gut…
Christos: 8 von 14 ist…(zählt mit den Fingern)…6. Hm…6 von 6 ist 0.</td></tr>
</table>

Ausgelöst werden die Probleme in diesem Beispiel durch die Wahl einer zu großen Quotientenziffer. Beim Berechnen der Teilprodukte merkt der Schüler, dass die entstehenden Zahlen zu groß sind. Um seine Berechnungen zu retten, lässt er die Überträge unberücksichtigt. Dieselbe Ausweichreaktion wendet er in den nachfolgenden Subtraktionen an. Er ist sich bewusst, dass er die Übertragsziffer aus der Einerspalte in der nächsten Stellenwertspalte addieren muss. Würde er dies aber tun, so würde ein zweistelliger Subtrahend entstehen, der an der Zehnerstelle eine größere Ziffer haben würde als der zweistellige Minuend, was die Subtraktion als nicht lösbar einstufen würde. Das erkennt der Schüler rechtzeitig und um seine Lösung noch (für sich selbst) akzeptabel zu machen, ignoriert er die Übertragsziffer und führt so die Subtraktion aus.

In diesen drei Fällen ist der Übertrag problematisch. Nachdem dieses Fehlermuster erkannt wird, ist es sinnvoll dies aus dem komplexen Zusammenhang der Division zu isolieren und außerhalb der Divisionsstaffel Subtraktionsaufgaben zu üben. Um dem Vergessen von Übertragsziffern vorzubeugen, empfiehlt es sich, auf den Zusammenhang des Sprechens und Schreibens zu achten und die „Übertrags-Eins" in dem Augenblick aufzuschreiben, wenn die Zehn oder die Zehnerzahl ausgesprochen wird. Dafür ist es zuvor hilfreich den Schülern beizubringen, den Summenstrich tiefer zu ziehen, so dass in jeder Spalte Platz für Übertragsziffern existiert. Zusätzlich ist darauf zu achten, die Übertragsziffer genau unter jeder Stellenwertspalte und nicht dazwischen zu schreiben (vgl. Gerster, 1982a, S. 36; 97), um weiteren Fehlern vorzubeugen.
Für Schüler, die die Übertragsziffer konsequent nicht berücksichtigen oder auslassen, sollte zu Beginn die Bedeutung des Übertrags deutlich gemacht werden. Auf der enaktiven Ebene lassen sich durch Materialeinsatz (mit Steckwürfeln oder Stäbchen) Subtraktionsaufgaben veranschaulichen und die Rolle des Übertrags erläutern. Je nachdem welche Technik (Erweiterungs- oder Borgetechnik) die Schüler anwenden, kann das Borgen durch Entbündeln oder das Erweitern durch gleichsinniges Verändern (Addieren derselben Zahl) demonstriert werden. Derselbe Vorgang kann auch an der Stellentafel geübt werden (ikonische Ebene). Nachdem die Schüler die Bedeutung des Übertrags auf der enaktiven oder ikonischen Ebene verstanden haben können sie den Übertrag in schriftlichen Subtraktionen trainieren. Diese Teilfertigkeit kann in einer Anfangsphase geübt werden, indem die Schüler auf einem Übungsblatt mit lauter Subtraktionsaufgaben nur die Übertragsziffern notieren, ohne die Aufgaben auszurechnen (ebd., S. 103). Dabei sind Aufgaben mit verschiedenen kritischen Merkmalen zu berücksichtigen, wie z. B. gleiche Ziffern übereinander, verschiedene Stellenzahl des Minuenden und Subtrahenden, Übertrag zur Null oder in eine leere Stelle, Null in der oberen oder unteren Zahl, die möglicherweise im Unterricht nicht ausdrücklich behandelt werden. Die Feststellung von Gerster (1989, S. 27), dass in Schulbüchern vorwiegend Standardaufgaben (gleichviele Stellen im Minuenden und Subtrahenden, keine Nullen, …) ausführlich dargestellt werden, gilt auch für die griechischen Lehrbücher. Die oben erwähnten kritischen Aufgabenmerkmale tauchen erst in Übungsaufgaben auf und müssen von den Schülern oft alleine bewältigt werden. So steigt die Wahrscheinlichkeit, dass fehlerhafte Strategien entwickelt werden, die durch vermehrtes Üben ohne regelmäßige Kontrolle mitgeübt werden (Gerster, 1982b, S. 163). Erst wenn die Schüler den Umgang mit den Übertragsziffern beherrschen, können sie mit dem Ausrechnen von Subtraktionsaufgaben fortfahren.

Subtraktion einer kleineren von einer größeren Zahl
Ein Fehlermuster, dem in den Divisionsstaffeln sehr oft begegnet wurde und das auch der Schüler im vorigen Beispiel zeigte, war die Subtraktion einer Zahl von einer darüberstehenden kleineren Zahl. Ähnlich gingen die Schüler in den zwei nachfolgenden Beispielen vor:

2430 | 18 *-162* | ~~9~~8 *62* *161*	**Barbara**: Die 18 geht in die 2 nicht, wir nehmen noch eine Ziffer und sagen, die 18 geht in die 24 so oft wie die 1 in die 24…9 mal. Wir schreiben die 9, 9 mal 8… **I**: Die 1 geht in die 24 9 mal hast du gesagt? Ich frage, um zu sehen, wie du denkst… **Barbara**: Das größte, das wir nehmen können… **I**: Aha… **Barbara**: 10 können wir nicht setzen also 9… **I**: Hm… **Barbara**: 8 mal 9, 72, wir schreiben die 2, 7 der Übertrag, 1 mal 9, 9, plus 7, 16. 2 von 4, 2, 6 von 12, 6, 1 von 1, 0. **I**: Willst du mir vielleicht sagen was du subtrahiert hast? **Barbara**: Die 162 von der 24… **I**: …
75665 | 37 -74 | 205 0166 -185 981	(in der zweiten Subtraktion) **Melina**: 5 von 6, 1. 8 von 16, 8. 1 der Übertrag, plus 1, 2, von 11…9.

Im ersten Beispiel führt die Schülerin die Subtraktion 24-162 aus. Nicht nur die Größe des Subtrahenden, sogar die ungleiche Stellenzahl der zwei Faktoren ist ein Anzeichen dafür, dass die Subtraktion nicht möglich ist. Dies bemerkt die Schülerin jedoch erst nach der Frage der Verfasserin.
Im zweiten Beispiel erweitert die Schülerin die Hunderterziffer des Minuenden, ohne die Erweiterungsziffer in der nächstgrößeren Stellenwertspalte (der Tausenderspalte) des Subtrahenden zu addieren. Dies ist auch nicht möglich, da es keine Tausenderstelle gibt. Diese Tatsache hält sie jedoch nicht davon ab, nur eine Zahl zu erweitern.

Berücksichtigt man auch die Lösung von Christos in der vorigen Fehlergruppe, dann kann man drei Ausweichreaktionen erkennen, die sich die Schüler ausdenken, um die Subtraktion einer größeren Zahl von einer kleineren zu ermöglichen:

1) Sie ignorieren die Überträge (Lösung von Christos)
2) Sie operieren falsch mit dem Übertrag (Lösung von Barbara)
3) Sie erweitern willkürlich nur den Minuenden (und zwar an seiner größten Stelle und so endet das Verfahren).

Aus solchen Fehlern zeigt sich besonders klar, dass die Schüler „rein ziffernweise rechnen, ohne die Zahlen als Ganzes zu erfassen.“ (Gerster, 1982b, S. 163f.) Auch dieses Fehlermuster muss isoliert behoben werden.

Sehr hilfreich wäre hierbei der Einsatz von Stellenwerttafeln. Darin können Zahlen eingetragen werden und anhand ihrer Stellenwerte verglichen werden. Dieselben Zahlen können in der Folge mit Rechengeld gelegt oder ikonisch (die Zehner durch Striche und die Einer durch Punkte) dargestellt werden und mit ihnen Subtraktionsaufgaben handelnd oder ikonisch durchgeführt werden. Das Nachspielen von Einkaufssituationen und das Rechnen mit Rechengeld kann den Kindern helfen, die Zahlen als Ganzes zu erfassen und den Umgang mit den Zahlen zu üben. Nach der enaktiven und ikonischen Ebene kann zur symbolischen Ebene übergeleitet werden. Auf einem Übungsblatt mit verschiedenen Subtraktionsaufgaben (lösbaren und nicht) werden die Schüler aufgefordert, die lösbaren Subtraktionen auszurechnen und die nicht lösbaren Aufgaben zu markieren und durch eine Ungleichung zu erklären, wieso es sich bei diesen um nicht lösbare Aufgaben handelt.

Um unlösbare Subtraktionen in den Divisionsstaffeln zu erkennen, sollten die Schüler angehalten werden, das Teilprodukt mit dem Teildividenden zu vergleichen und sich zu fragen, ob die Subtraktion überhaupt möglich ist. An dieser Stelle ist es sehr wichtig, dass die Schülern einsehen, dass das Teilprodukt (vorausgesetzt die Einmaleinssätze werden richtig angewandt) einen Hinweis darauf gibt, ob die richtige Quotientenziffer ausgewählt wurde.

Ähnlich wie das gerade erwähnte Fehlermuster ist das folgende: Hier operierten die Schüler in lösbaren Subtraktionen, da der Minuend in den entsprechenden Aufgaben größer als der Subtrahend war. Die Schüler berechneten spaltenweise die Differenzen der beiden Zahlen, ohne Rücksicht auf die Rechenrichtung, d. h. es wurde stets die kleinere von der größeren Ziffer abgezogen. Möglicherweise handelt es sich hier um eine Übergeneralisierung der Regel „man kann nur die kleinste von der größeren Zahl subtrahieren" und um das Zustandekommen dieser Vereinbarung lässt man die Rechenrichtung außer Betracht. Für andere Schüler ist dies eine Strategie um den Zehnerübergang zu vermeiden. An dieser Stelle ist es notwendig, die Schüler vor die Wahl zu stellen, ob sie ergänzen oder abziehen möchten und die entsprechende Rechenrichtung für jede Methode klarzustellen (beim Abziehen rechnet man von oben nach unten und beim Ergänzen von unten nach oben). In der Folge müssen die Techniken des Zehnerübergangs demonstriert werden, die auch auf der handelnden Ebene durch Entbündeln oder Hinzufügen veranschaulicht werden können.

Fehler in den Grundaufgaben
Bei der Berechnung der Differenz durch Umwandlung der Subtraktions- in eine Additionsaufgabe (2iii.) kamen die Schüler zu falschen Ergebnissen, indem sie sich die additiven Zahlensätze falsch eingeprägten. Da sie jedoch von der Richtigkeit der Ergänzungen überzeugt waren, führten sie keine Kontrolle durch und übernahmen die falschen Ergänzungszahlen für ihre Berechnungen in den Divisionen:

2430 | 18 -18 | $1\cancel{6}\cancel{5}\cancel{4}3\cancel{8}\cancel{7}\cancel{5}4$ 063 *108* *90* *72* -54 080 *144* *126* *108* *98* -72 08	(in der ersten Subtraktion) **Dimitris**: 8 von 14 ist 6, 1 plus 1, 2, von 2, 0. (in der zweiten Subtraktion) **Dimitris**: 13 von 4 (falsche Rechenrichtung) gleich…8 (falsches Ergebnis). 5 plus 1 ist 6, von 6, 0. (nach dem Beenden der Lösung) **I**: Ich wollte dich noch etwas Letztes fragen. In der ersten Subtraktion 8 von 14, wie rechnest du das? **Dimitris**: Ich addiere…8, wie viel noch zur 14? **I**: Und zählst du das mit den Fingern? **Dimitris**: Nein, ich weiß es sofort. Wenn ich es vergesse, zähl ich mit den Fingern, aber wenn ich mich erinnere und es weiß… **I**: Wenn du es weißt? **Dimitris**: Dann schreibe ich es… **I**: (lacht) Gut… und hier (in der zweiten Subtraktion) 4 von 13, wie hast du das gefunden? **Dimitris**: Das…also das, daran habe ich mich nicht erinnert, aber

	andere male wo ich mich erinnere, mache ich es sofort mit dem Kopf…

Das falsche Einprägen von Zahlensätzen kam jedoch in den Interviews nicht oft vor (2 Schüler). Das lag wohl daran, dass nicht viele Schüler diese Strategie anwendeten und wenn sie so vorgingen, dann waren sie sich bezüglich der Richtigkeit der entsprechenden Additionsaufgaben sicher. Fehler traten jedoch bei den Ergänzungen der einstelligen Zahlen zum Zehner und bei den Zerlegungen einstelliger Zahlen auf, was auf eine nicht automatisierte Kenntnis der Grundaufgaben des Zwanzigerraums deutet. Das falsche Einprägen von additiven Zahlensätzen, das seltene Anwenden dieser Rechenstrategie und die Fehler in den Subtraktionen ohne Überschreitung zeigen, dass die Grundaufgaben den Schülern nicht vertraut sind. Daher ist es notwendig das Kleine 1+1 mit entsprechenden Übungen zu üben und zu festigen.

Die Behandlung der Grundaufgaben sollte auf der handelnden Ebene beginnen. Dabei sollten die Schüler die Möglichkeit haben, die Aufgaben mit Material handelnd zu lösen und die entsprechenden Zahlensätze zu schreiben. Zunächst müssen alle Aufgaben im Zehnerraum (ohne Zehnerüberschreitung) sicher erworben werden, die Schüler sollten die Ergänzungen aller einstelliger Zahlen zum Zehner sowie alle Zerlegungsmöglichkeiten der einstelligen Zahlen fehlerfrei beherrschen. Durch Umkehrung der durchgeführten Handlungen kann die Beziehung zwischen Addition und Subtraktion aufgezeigt werden und hierbei können die ersten Bausteine für das Ergänzungsverfahren (für die Subtraktion) gelegt werden. Unter Nutzung der dekadischen Analogie kann der Zahlenraum erweitert und dieselben Aufgaben können im Zwanzigerraum erarbeitet werden. Gleichzeitig sollten die Rechengesetze auch handelnd bewusst gemacht werden, so dass die Schüler von den Rechenvorteilen profitieren. Nun können auch Aufgaben mit Zehnerüberschreitung bzw. -unterschreitung eingeführt werden. Den Kindern kann Material angeboten werden, mit dem sie die gestellten Aufgaben handelnd lösen können. Nach Beobachtung ihrer Strategien kann man sie durch Hinweise zu den verschiedenen Rechenstrategien hinführen. Sind alle Rechenstrategien vorgestellt, kann jeder Schüler für sich aussuchen, welche Rechenstrategie er anwendet. Zum Üben und Festigen der Grundaufgaben bieten sich verschiedene Aufgabentypen an: operative Aufgabenreihen, Nachbaraufgaben, Zerlegungsaufgaben, Tauschaufgaben, Umkehraufgaben, Ergänzungsaufgaben, usw. Das Beherrschen der Grundaufgaben ist im Hinblick auf weitere Themen und Anwendungen des Mathematikunterrichts in der Grundschule von immenser Bedeutung. Es:

- „ist eine notwendige Voraussetzung beim Durchführen schriftlicher Rechenverfahren zur Addition und Subtraktion, wie auch zur Multiplikation und Division;
- erleichtert das Lösen einfacher Sachaufgaben bzw. Rechengeschichten;
- erleichtert das Rechnen im größeren Zahlenraum.“ (Radatz & Schipper, 1983, S. 71)

Fehler mit der Null (Fehlermuster S_3)
Problematisch war für einige Schüler das Abziehen von der Null, wie es in den nächsten Beispielen zu sehen ist:

75665 | 37 016 | 20 0065	(beim Berechnen des ersten Teilproduktes) **Dimitris**: 2 mal 7 ist 14, von 15, 1. 2 mal 3, 6, plus 1, 7, von 7, 0. Wir holen auch die 6 runter. Die 7,…die 3…, ähm…die 37 geht in die 16 nicht, 0 (im Quotienten). 0 mal die 7, 0, von 6, 0. 0 mal die 3, 0, von 1, 0. Wir holen die 6 runter. Die 37 geht in die 6 nicht, wieder 0 (im Quotienten). Ich hole auch die 5 runter…
420 | 4 -4 | 100 02 -0 00 -0 0	**Augustis**: Die 4 geht in die 4 einmal. 1 mal 4, 4, von 4, 0. Ich hole die 2 runter. Die 4 geht in die 2 nicht, 0 im Quotienten. 0 mal 4, 0, von 2, 0. Ich hole auch die 0 runter, die 4 geht in die 0 nicht, 0 wieder (im Quotienten). 0 mal 4, 0, von 0, 0.

Diese Beispiele verdeutlichen die Schwierigkeiten der Schüler mit einer Null im Minuenden. An ihren Berechnungen zeigte sich die Dominanz der Null, d. h. wenn bei einer Differenz (im Minuend) die Null auftrat, diese für ausschlaggebend gehalten wurde. Sie dachten etwa: „Wenn man von 8 (Nüssen) 0 (Nüsse) wegnimmt, hat man 0 (Nüsse)", ohne dabei an die 8 (Nüsse) zu denken, die übrig bleiben. Möglich ist auch, dass die Schüler die Rolle der Null in der Subtraktion mit der Rolle der Null in der Multiplikation verwechseln, oder dass sie durch Perseveration 0 erhielten.

Die Sonderfälle der Subtraktion mit dem Auftreten von Nullen lassen sich durch Material besser veranschaulichen: Die Schüler werden aufgefordert, in eine Tüte 8 Bällchen hineinzulegen und daraus 0 Bälle herauszuholen. Sie werden gefragt, wie viele Bällchen sich in der Tüte befinden. Durch Herausholen und Zählen ermitteln sie das Ergebnis. Ähnlich können weitere Sonderfälle demonstriert werden:

$$\begin{array}{r} 0 \\ -8 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ -0 \\ \hline 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ -0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ -8 \\ \hline 0 \end{array}$$

Allgemeine Maßnahmen zur Fehlerbehebung in der schriftlichen Subtraktion
Auf den vorhergehenden Seiten wurde Stellung zu einzelnen Subtraktionsfehlern genommen und Vorschläge zur Fehlerbehebung oder Fehlervorbeugung im Unterricht entwickelt. Sinnvoll ist jedoch auch, dass die Schüler selbst in die Lage versetzt werden, die Richtigkeit des Ergebnisses abzuschätzen und zu kontrollieren. Hierzu sind Überschlagsrechnungen und Proberechnungen sehr hilfreich. Schon vor den Berechnungen kann sich der Schüler durch Überschlagsrechnungen eine Vorstellung von der Größenordnung der Zahlen verschaffen, mit denen er rechnet und der Zahlen, die er als Ergebnis erhalten wird. Auf diese Weise können grobe Subtraktionsfehler aufgedeckt und korrigiert werden. Mit einem konsequenten Abrunden bzw. durch Zudecken der Einer-, Zehner-, Hunderterspalte (je nach Subtraktionsaufgabe) und Ersetzen der verdeckten Stellen durch Nullen, ergeben sich Aufgaben, die durch Kopfrechnen lösbar sind, z. B.:

64	454	8	078	3100	00
- 4	321	- 4	002	- 9	64
	000		000		00

(aus Gerster, 1982a, S. 101)

Zwar bekommt man durch die Überschlagsrechnung nicht das genaue Ergebnis, aber eine Orientierungshilfe über die Größenordnung des Ergebnisses ist für alle Kinder und besonders für Schüler mit Lernschwächen sehr hilfreich. Durch die Proberechnung kann der Schüler schließlich überprüfen, ob das Ergebnis seiner Berechnungen korrekt ist. Im griechischen Lehrbuch (4. Klasse, Bd. 1, S. 79) werden bei der schriftlichen Subtraktion zwei Rechenkontrollen zur Probe vorgestellt:

(3) Kontrolle über die Addition: Die Summe aus Subtrahend und Differenz muss den Minuenden ergeben.
(4) Kontrolle über die Subtraktion: Die Differenz aus Minuend und der als Lösung gefundenen Differenz muss den Subtrahenden ergeben.

Beide Proben werden als separate Rechenoperationen berechnet, wobei die Faktoren noch einmal aufgeschrieben werden müssen. Ökonomischer ist jedoch die von Gerster (1982a, S. 97) vorgeschlagene Technik, da sie das nochmalige Aufschreiben der Zahlen erspart. Ausgegangen wird hierbei von der Kontrolle über die Addition:

a) Der Zielbetrag bzw. der Minuend wird mit Notizblatt oder mit dem Finger abgedeckt.
b) Die Differenz und der Subtrahend werden addiert. Das Ergebnis wird entweder auf das Notizblatt aufgeschrieben, oder im Kopf behalten.
c) Der Minuend wird aufgedeckt und mit dem erhaltenen Ergebnis verglichen.

4.3.2.2 Fehler beim Berechnen der Quotientenziffer

Viele Fehler traten bei der Auswahl der richtigen Quotientenziffer auf. Bei der Auswertung der Tests konnte nur festgestellt werden, ob die richtige Quotientenziffer ausgesucht worden war oder nicht. Rückschlüsse auf die Vorgehensweise der Schüler waren hier kaum möglich. Lediglich in manchen Arbeitsblättern waren Einmaleinsreihen notiert, die einige Rückschlüsse auf die Vorgehensweise des jeweiligen Schülers erlaubten. Wie die übrigen Schüler bei der Suche der Quotientenziffer vorgingen, konnte den Interviews entnommen werden. Generell wurden folgende Strategien befolgt:

1. Zufällige Wahl einer Ziffer und Berechnung des Teilproduktes (9 Schüler)
2. Vereinfachen der ursprünglichen Aufgabe durch Nichtberücksichtigen der Einerziffer der Faktoren und Rückgriff auf das Einmaleins (22 Schüler)
3. Ermittlung der Quotientenziffer durch fortgesetzte Additionen des Divisors (6 Schüler)

In den Aufgaben mit einstelligem Divisor griffen die meisten Schüler auf das kleine Einmaleins, um die Quotientenziffer aus den Einmaleinsreihen abzuleiten. In zwei Fällen wählten die Schüler die Quotientenziffern zufällig, ohne mit Kopfrechnen zu kontrollieren, ob die gewählte Ziffer angemessen war. Erst durch Aufschreiben der Ziffer und die Berechnung des Teilproduktes konnten sie die Angemessenheit der ausgewählten Ziffer beurteilen, was jedes Mal mehr Zeit in Anspruch nahm. Dies wird in den Berechnungen von Angeliki deutlich:

<table>
<tr>
<td>362286 | 9
45   5~~4~~02~~6~~54
-36
022
- 18
048
54
- 45
036
- 36
00</td>
<td>Angeliki: Eine Ziffer hat der Divisor, eine nehmen wir links am Dividenden, die 9 geht in die 3 nicht, die 9 in die 36…versuchen wir es doch zuerst mit der 5. Fünfmal die 9, 45, passt nicht, wir radieren es weg und nehmen 4. Viermal die 5 (korrigiert), äh, viermal die 9…32. Gut, es passt.
I: Kannst du mir auch sagen wie viel dreimal die 9 ist?
Angeliki: 27.
I: Und viermal die 9?
Angeliki: Hm…(schweigt).
I: Du weißt, dass 3 mal 9, 27 ist. Kannst du daraus die 4 mal 9 berechnen?
Angeliki: …
I: Du musst noch eine 9 dazunehmen. Dann hast du 4 mal die 9.
Angeliki:…(keine Reaktion)…</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">I: Rechne mal von der 27, 9 dazu…
Angeliki: (rechnet mit den Fingern)…36. Ich hole die nächste Ziffer runter. Die 9 geht in die 2 nicht, ich hole…nein, ich schreibe hier (im Quotienten) eine 0. Dann hole ich die 2 runter. Die 9 geht in die 22, hm…, dreimal die 9 ist 27, passt nicht, also zweimal. 2 mal die 9, 18, von 22…
I: Wie findest du das?
Angeliki: 8, 9,10,11,12,…4. 1 der Übertrag, 2 von 2 ist 0. Ich hole auch die 8 runter. Hm, die 9 in die 48…nehmen wir die 6 (schreibt 6 im Quotienten). 6 mal 9 ist 54, geht nicht (radiert). 5 mal 9, 45, von 48, hm, 5, 6,7,8,…3. 4 von 4, 0. Ich hole die 8, nein die 6 runter. Die 9 in die 36 geht…viermal. 4 mal 9 ist 36.</td>
</tr>
</table>

Die zufällige Wahl der Quotientenziffer wurde bei den Aufgaben mit zweistelligem Divisor von 8 Schülern vorgenommen. Dass beim zweistelligen Divisor das Schätzen der Quotientenziffer schwerer fällt als beim einstelligen Divisor, ist verständlich. Wenn man jedoch ohne jegliche Vorüberlegungen eine Ziffer aussucht und versucht, das Teilprodukt zu ermitteln, verliert man wertvolle Zeit und Energie. Die nachfolgenden Vergleiche zwischen Teilprodukt und Teildividenden kommen verspätet und die Angemessenheit der Quotientenziffer kann erst nachträglich festgestellt werden. So zieht sich das Lösungsverfahren unnötig in die Länge, wie man bei den Berechnungen von Emilia sehen kann:

2430 | 18 -18 | $1\cancel{5}\cancel{4}36$ 063 *90* *72* -54 190	(Beim Berechnen der zweiten Quotientenziffer) **Emilia**: Die 18 geht in die 63…5 mal? **I**: Woher weißt du das? **Emilia**: Wir werden probieren…5 mal die 8, 40, wir schreiben die 0, 4 der Übertrag. Einmal die 5 ist 5, plus 4, 9 (guckt die Verfasserin an, lächelt…). **I**: Was machen wir jetzt? **Emilia**: Wir nehmen 4 mal. Viermal die 8, 32, schreibe die 2, 3 der Übertrag, 1 mal die 4, 4, plus 3, 7. 2 von 3…(beginnt zu subtrahieren). **I**: Was machst du jetzt? **Emilia**: Ich subtrahiere…oh, geht gar nicht. Ich nehme die 3 (im Quotienten). 3 mal die 8, 24, wir schreiben die 4 und 2 der Übertrag, 1 mal die 3, 3, plus 2, 5. Die 4 ziehen wir von 13 ab und es bleiben…9. 5 von 6, 1 (vergisst den Übertrag). (in der Folge holt sie die Null herunter und dividiert mehrmals in derselben Spalte, so dass ein großer Quotient entsteht, was sie aber nicht bemerkt)

Angestrebtes Ziel jedes Lerners sollte es jedoch sein, das Lernen ökonomisch und einsichtig zu gestalten. Dies ist besonders für Schüler mit Lernschwierigkeiten sehr wichtig, da sie durch lang andauerndes Probieren noch unsicherer werden und schnell demotiviert sein können.

Bei den Aufgaben mit zweistelligem Divisor befolgten viele Schüler eine weitere Rechenstrategie, die im Lehrbuch „Meine Mathematik“ vorgestellt wird. Nach dieser Strategie werden die Einerziffer des zweistelligen Divisors und Teildividenden ausgelassen, so dass der Divisor (und auch der Teildividend) einstellig wird und die Quotientenziffer leichter berechnet werden kann. Dies soll die ursprüngliche Divisionsaufgabe vereinfachen. An dieser Stelle erscheint es hilfreich, das entsprechende Beispiel aus dem Lehrbuch zu präsentieren:

Dividend Divisor 78.900 | 12 -72 | 6575 Quotient 069 -60 090 -84 060 -60 00 Rest	„Zwei Ziffern hat der Divisor, zwei trennen wir links vom Dividenden ab und sagen: die **12** geht in die **78**, so oft wie die **1** in die **7**. Die **1** geht in die **7** **7** mal. Wir multiplizieren die **7** mit der **12** und finden **84**. Die **84** kann man aber nicht von der **78** abziehen. Also geht die **12** in die **78** nicht **7** mal, sondern **einmal weniger**, d. h. **6** mal. Wir multiplizieren die **6** mit der **12** und finden **72**, **72** von **78**…**6**. Wir holen auch die **9** runter und der Rest wird **69**. Die **12** geht in die **69** so oft wie die **1** in die **6**. Die **1** geht in die **6** **6** mal. Wir multiplizieren die **6** mit der **12** und finden **72**. Die **72** kann man von der **69** nicht abziehen. Also geht die **12** in die **69** nicht **6** mal, sondern einmal weniger, d. h. **5** mal. Wir multiplizieren die **12** mit der **5** und finden **60**, von **69**…**9**. Wir holen auch die 0 runter und der Rest wird **90**. Die 12 geht in die 90, so oft wie die 1 in die 9. Die 1 geht in die 9…, (und wir fahren fort).“ („Meine Mathematik“, 4. Klasse, Bd. 2, S. 33)

Diese Strategie wird in der Literatur als „Überschlagen mit Hilfe der führenden Ziffern“ beschrieben (Padberg, 1996, S. 244) und entspricht dem Weglassen der hinteren Stellen. Ihre Anwendung scheint auf den ersten Blick beim Rechnen mit großen Zahlen zu helfen, da jede Divisionsaufgabe mit zweistelligem Divisor und Dividenden in eine einfachere Aufgabe mit einstelligem Divisor und Dividenden umgewandelt wird. Diese Vereinfachung täuscht jedoch in manchen Fällen die Wahl der richtigen Quotientenziffer nur vor, wie das folgende Beispiel zeigt:

2430 | 18 -18 | 1~~6~~~~5~~~~4~~3~~8~~~~7~~~~5~~4 063 *108* *90* *72* -54 080 *144* *126* *108* *98* -72 08	(Beim Berechnen der zweiten Quotientenziffer) **Dimitris**: …Die 18 geht in die 63 so oft wie die 1 in die 6, 6 mal. 6 mal 8, 48. Wir schreiben die 8 und 4 der Übertrag. Einmal 6 ist 6, plus 4…10. Der Subtrahend ist zu groß (schreibt 5 im Quotienten). 5 mal 8, 40, 0 und 4 der Übertrag, 1 mal 5, 5, plus 4, 9 (90). Wieder groß. **I**: Was machen wir jetzt? **Dimitris**: Wir setzten eine kleinere Ziffer, die 4. 4 mal 8, 32, wir schreiben die 2, 3 der Übertrag, 1 mal 4, ist 4, plus 3, 7 (72). Wieder ist es größer. 3 mal. 3 mal 8, 24. Wir schreiben die 4, 2 der Übertrag. 1 mal 3 ist 3, plus 2, 5. 63 von …ähm, 13 von 4 (falsche Rechenrichtung) gleich…8 (falsches Ergebnis). **I**: 8? **Dimitris**: 5 plus 1, 6, von 6, 0. Ich hole die 0 runter. Die 18 geht in die 80 so oft wie die 1 in die 8. Die 1 geht in die 8 achtmal. Wir tun eine 8 hier (im Quotienten). 8 mal die 8 ist 64 (schreibt die 4), 6 der

Übertrag, 1 mal die 8, 8, plus 6, 14. Der Subtrahend ist größer als der Minuend, wir streichen es durch (die 8). Wir nehmen eine kleinere (schreibt die 7). 7 mal…8 mal die 7, 56, wir tun die 6 und behalten 5, 1 mal die 7, 7, plus 5, 12. Wieder ist der Subtrahend größer als der Minuend, wir streichen ihn durch (die 7) und nehmen eine kleinere Ziffer (schreibt nun 6). 6 mal die 8, 48, 4 der Übertrag, einmal die 6, 6, plus 4, 10.
I: Und nun?
Dimitris: Wir streichen sie (die 6) durch und nehmen die 5. 8 mal die 5, 40, 4 der Übertrag, einmal die 5, 5, plus 4, 9.
I: Kannst du bitte etwas lauter sprechen?…
Dimitris: Wieder ist es größer. Jetzt nehme ich die 4. 4 mal die 8, 32, 3 der Übertrag, 1 mal die 4, 4, plus 3, 7. 2 von 10, 8. 7 plus 1, 8, von 8, 0. Ich habe hundert…nein, 134 gefunden.

Die Nichtberücksichtigung der Einerziffer im Divisor führt in solchen Fällen zu einer ermüdenden, langwierigen und unökonomischen Suche der richtigen Quotientenziffer. Es sind nicht nur die aufeinander folgenden Proben, bis man ein nahes Teilprodukt erreicht hat. Hinzu kommt, dass um diese Proben durchzuführen, möglichst viele Einmaleinsergebnisse parat sein müssen. (Im vorigen Beispiel verfügte der Schüler über hervorragende Kenntnisse des Einmaleins. Dies war aber nicht die Regel für die übrige Schülerschaft. Die meisten Schüler hatten erhebliche Probleme in den Einmaleinsreihen, wie es im entsprechenden Fehlermuster beschrieben wird). Ist das nicht der Fall und der Schüler versucht diese zusätzlich abzuleiten, kostet das noch mehr Nebenrechnungen und Energie. Mit den vielen Multiplikationen steigt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Flüchtigkeitsfehlers, da der Schüler durch die vielen Berechnungen ermüdet wird. Ein solches Vorgehen nimmt zumindest die doppelte Zeit in Anspruch, die für das Lösen einer Divisionsaufgabe nötig ist. Es handelt sich in diesem Fall um eine ungünstige Vereinfachung, mit der die Schüler statt näher an das Ergebnis zu kommen, sich davon entfernen. Dem muss dringend vorgebeugt bzw. diese Strategie muss korrigiert werden, da viele Schüler so vorgehen. In den Interviews waren es 12 Schüler also etwa 1/4 der Stichprobe, die diese endlose Suche der richtigen Quotientenziffer vornahmen.
Die Strategie ist an sich nicht falsch. Im griechischen Lehrbuch wird sie an Aufgaben mit zweistelligem Divisor vorgestellt, in denen die Einerziffer des Divisors kleiner als 5 ist (vgl. Schülerbuch der 4. Klasse, Bd. 1, S. 128; Bd. 2, S. 33). Dies führt zu einer Verunsicherung der Schüler. Es ist ein großes Versäumnis, dass auf diesen Buchseiten nicht darauf aufmerksam gemacht wird, dass man diese Strategie nicht unabhängig von der Größe der Einerziffern des Divisors anwenden sollte. Diese Strategie ist nämlich nur dann vollständig und erfolgsversprechend, wenn sie in Verbindung mit dem Runden angewandt wird. Wird der Divisor 13 oder 24 jeweils auf eine 1 oder eine 2, also nur auf die Zehnerstelle reduziert, ist das völlig legitim, da es auch den Regeln des Rundens entspricht. Wird aber die 18 (wie im vorigen Beispiel) auf eine 1 reduziert, ist ein Misslingen vorprogrammiert, da die Einerstelle (8) größer als 5 ist und daher auf- und nicht abgerundet werden muss. Aus dem Abrunden ergeben sich zu hohe Quotientenziffern und folglich zu hohe Teilprodukte. Somit erweist sich diese Vereinfachung als eine Falle für die Schüler, die zu unzähligen Proben und Korrekturen führt. Es ist hier notwendig, gegenüber den Schülern zu betonen, weshalb sie die Einerziffer des Divisors unbedingt berücksichtigen müssen und diese nicht ohne Bedenken kürzen bzw. auslassen dürfen.

Die Anwendung derselben Strategie (Überschlagen mit Hilfe der führenden Ziffer), die im griechischen Lehrbuch vorgestellt wird, verleitete einige Schüler zu weiteren Irritationen. Einige Schüler wussten, dass sie durch eine Gegenüberstellung (z. B. die 12 geht in die 78 so oft wie die 1 in die 7…) die Ziffern des Quotienten berechnen konnten, kamen aber bei dieser Gegenüberstellung durcheinander, da sie den zweistelligen Dividenden beibehielten. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen:

2430 | 18
-162 | *98*
062
161

Barbara: Die 18 geht in die 2 nicht, wir nehmen noch eine Ziffer und sagen, die 18 geht in die 24 so oft wie die 1 in die 24…9 mal. Wir schreiben die 9, 9 mal 8…
I: Die 1 geht in die 24 9 mal hast du gesagt? Ich frage, um zu sehen, wie du denkst…
Barbara: Das größte, das wir nehmen können…
I: Aha…
Barbara: 10 können wir nicht setzen, also 9…
I: Hm…
Barbara: 8 mal 9, 72, wir schreiben die 2, 7 der Übertrag, 1 mal 9, 9, plus 7, 16. 2 von 4, 2, 6 von 12, 6, 1 von 1, 0.
I: Willst du mir vielleicht sagen, was du subtrahiert hast?
Barbara: Die 162 von der 24…
I: …
Barbara:…es geht nicht…ich nehme die 8 (im Quotienten). 8 mal 8, 81…1 mal 8, 8 plus 8…16 (schweigt)…
I: Was ist?
Barbara: Es passt nicht…
I: Wie hast du denn angefangen?
Barbara: Ich habe gesagt, die 18 geht in die 24 so wie die 1 in die 24, aber es ist groß…
I: Willst du vielleicht kurz nachdenken?
Barbara: … ich bin durcheinander.
I: Das macht nichts.

In diesem Beispiel kann sich die Schülerin nur teilweise an die vorgestellte Strategie im Buch erinnern und wendet diese bruchstückhaft und folglich falsch an. Statt beide Faktoren (Teildividend und Divisor) zu kürzen, kürzt sie nur den Divisor auf dieselbe unglückliche Art, wie sie im vorigen Abschnitt beschrieben wurde. Daher ergibt sich zum gekürzten Divisor (1) ein zu großer Teildividend (24), man würde eine zweistellige Zahl im Quotienten setzen müssen, um ein angemessenes Teilprodukt zu bekommen, was natürlich nicht legitim wäre. Mit der größten Ziffer (der 9), die man im Quotienten setzen kann, bekommt die Schülerin ein dreistelliges Teilprodukt. Beim näheren Hinschauen bemerkt sie, dass die bevorstehende Subtraktion nicht möglich ist. Auch bei einem zweiten Versuch scheitert sie, da durch zusätzliche Einmaleinsfehler (8*8=81) ein falsches und wieder zu großes Teilprodukt entsteht.

Diese Fehler zeigen, dass die Schüler diese Überschlagstechnik nicht richtig beherrschen. Die Entscheidung, wie viele Ziffern in welchen Faktoren beim Überschlagen ausgelassen werden können, fällt ihnen schwer oder führt sie zu Fehllösungen. Weiterhin wird hier deutlich, dass die Schüler wenig Erfahrung mit dem Runden der Zahlen haben bzw. dass ihnen das Runden nicht notwendig erscheint.

Außer dem Vereinfachen der ursprünglichen Aufgabe gab es auch Schüler, die die Quotientenziffern additiv berechneten. Durch fortgesetzte Additionen des Divisors versuchten sie an die richtige Quotientenziffer zu gelangen, wie Michalis im folgenden Beispiel:

```
75665 | 37
-74   | 2045
 0166 |
 -148 |
  0185|
  -185|
   000|
```

Michalis: Zwei Ziffern hat der Divisor, zwei trennen wir links vom Dividenden, die 37 geht in die 75…(denkt)…wir probieren die 2.
I: Ja, wie bist du aber auf die 2 gekommen?
Michalis: Weil 30, wie soll ich das sagen…30 plus 30 macht 60…so…
I: Schön erklärst du das, ich verstehe.
Michalis: 2 mal 7, 14, wir schreiben die 4 und 1 der Übertrag. 2 mal 3, 6, plus 1, 7. 4 von 5, 1. 7 von 7, 0. Wir holen auch die 6 runter. Die 37 geht in die 16 nicht, 0 im Quotienten. Wir holen die 6 runter. Die 37 in die 166…
I: Wie willst du das jetzt leichter herauskriegen?
Michalis: Ich werde sagen…30 plus 30 gleich 60, plus 30, 90, also haben wir auch weitere Zahlen…wenn wir noch 30 dazuaddieren, …120…4 mal?
I: Ich weiß nicht, probier es aus.
Michalis: Also, 4 mal 7, 28, 8, 2 der Übertrag, 3 mal 4, 12, plus 2, 14. Okay. 8 von 16…8, hm, 1, die wir uns geborgen haben plus 4, 5, von 6, 1. 1 von 1, 0.
I: Kannst du mir sagen wie du die 8 von der 16 subtrahiert hast?
Michalis: Weil 8 + 8 gleich 16 ist. Wenn wir die 8 abziehen…
I: Gut, ich verstehe.
Michalis: Wie holen auch die 5 runter. Die 37 in die 185…4, nein, 5 mal.
I: Wieso?
Michalis: Weil…die…in die 166 ging es 4 mal, hier kann es auch 5 mal gehen…
I: Aha!
Michalis: 5 mal 7, 35, 5, 3 der Übertrag, 3 mal 5, 15, plus 3, 18. 5 von 5, 0, 8 von 8, 0, 1 von 1, 0, okay.

Die Schüler, die die Quotientenziffer wie Michalis additiv berechneten, berücksichtigten im weiteren Verlauf der Aufgabenlösung die bereits berechneten Teilprodukte (und die dazugehörenden Quotientenziffer) und versuchten durch Abschätzen neue Quotientenziffern zu ermitteln. Nicht alle Schüler, die diese Strategie benutzten, führten die Additionen des Divisors mündlich durch. Die meisten mussten diese schriftlich berechnen und erst dann übertrugen sie das Ergebnis in die Divisionsstaffel. Diese Strategie eignet sich für Divisionsaufgaben, in denen der Divisor zweistellig oder größer ist. Werden aber mehr als drei oder vier Additionen mündlich durchgeführt, besteht die Gefahr, dass der Schüler sich verrechnet und nicht mehr weiß, wie oft er den Divisor addiert hat und daher eine falsche Quotientenziffer notiert. Das schriftliche Addieren nimmt zusätzlich viel Zeit in Anspruch und auch in den fortgesetzten Additionen können Fehler auftreten, die in die Division übertragen werden.

Bezugnehmend auf die Strategien, die die Schüler zum Berechnen der Quotientenziffer und der dazugehörigen Teilprodukte anwendeten, lässt sich Folgendes feststellen:

- Die zufällige Wahl einer Quotientenziffer deutet darauf hin, dass die Schüler keine Überschlagstechnik anwenden und sehr wahrscheinlich auch keine kennen. Sie sind dadurch ihrem Glück oder dem Zufall überlassen. Im besten Fall liegen sie mit ihrem Raten richtig und haben die richtige Ziffer ausgesucht. In den meisten Fällen wurde jedoch die Quotientenziffer zu klein oder zu groß geschätzt, was neue Schwierigkeiten auslöste. Die Schüler scheinen nicht zu wissen oder realisiert zu haben, dass gerade das Überschlagen dazu dienen soll, blindes Rechnen zu vermeiden, Rechnen ökonomisch zu gestalten und die Quotientenziffer so nah wie möglich zu berechnen.

- Die Schüler, die nach den führenden Ziffern überschlugen, führten in ihren Lösungen (abgesehen von 2 Schülern in der gesamten Stichprobe) kein Runden durch, was zur Folge hatte, dass die Quotientenziffer fast immer zu hoch geschätzt wurde und dadurch unzählige Proben erfolgten, bis die Schüler zur richtigen Quotientenziffer gelangten. Diese Überschlagstechnik bereitete den Schülern zusätzlich Schwierigkeiten, weil sie beliebige (und nicht nur die letzten) Ziffern ausließen, und daraus falsche Überschlagsrechnungen und in Anlehnung daran falsche Quotientenziffern resultierten.

- Das Berechnen der Quotientenziffer durch fortgesetzte Additionen des Divisors wurde von wenigen Schülern vorgenommen, da es viele Nebenrechnungen voraussetzt und deshalb sehr zeitaufwändig ist.

Hieraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

Den Schülern muss verdeutlicht werden, dass der Überschlagsrechnung bei der schriftlichen Division, insbesondere bei der Division durch zwei- oder mehrstellige Divisoren, eine zentrale Rolle zukommt. Die Teilquotienten können durch Probieren (jedoch kein blindes Probieren) überschlagsmäßig bestimmt werden. Das erspart Zeit und Energie und führt zu einem ökonomischen, zielgerichteten und selbstbewussten Rechnen. Demonstriert werden kann dies an einer Aufgabe, die auf zwei Arten gelöst wird: zunächst werden die Quotientenziffern zufällig ausgesucht und in der Folge werden diese überschlagsmäßig bestimmt. Aus dem Vergleich der entstehenden Lösungen, können die Schüler ihre Schlüsse über die Notwendigkeit des Überschlagens ziehen.
Da im griechischen Lehrbuch das Überschlagen nach den führenden Ziffern vorgestellt wird, ist es sinnvoll, diese Strategie mit den Schülern zu üben. Notwendige Voraussetzung ist, dass dabei das Runden angewendet wird und insbesondere das Runden des Divisors bevor die hinteren Ziffern ausgelassen werden. In einer ersten Phase müssen also die Regeln des Rundens eingeführt werden und damit das Runden von Zahlen in entsprechenden Aufgabenserien geübt werden. Erst dann kann das Runden des Divisors auch in verschiedenen Divisionsaufgaben trainiert und praktiziert werden. Die Notwendigkeit des Rundens des Divisors beim Überschlagen nach den führenden Ziffern kann wiederum an einer Aufgabe demonstriert werden, die auf zwei Arten gelöst wird: nach der genannten Überschlagstechnik ohne dabei das Runden anzuwenden und in einer zweiten Variation nach derselben Überschlagstechnik kombiniert mit dem Runden.

Die Berechnung der Quotientenziffern ist ein schwieriges Vorgehen im Divisionsverfahren. Die vorher genannte Überschlagstechnik bereitete vielen Schülern Schwierigkeiten. Sie waren jedoch gezwungen diese anzuwenden, da sie die einzige ist, die im griechischen Lehrbuch vorgestellt wird. Ratsam wäre es hier den Schülern weitere Überschlagstechniken zu präsentieren und sie entscheiden zu lassen, welche Technik ihnen am leichtesten fällt. Dazu stehen weitere Überschlagstechniken zur Verfügung (Gerster, 1982, zitiert nach Padberg, 1996, S. 244):

1. „Überschlagen durch Runden des Divisors und gleichsinniges Runden des Dividenden auf ein Vielfaches des Divisors.

2. Überschlagen durch Runden des Divisors und Feststellen, wie oft der geänderte Divisor in den (unveränderten) Dividenden passt.
3. Überschlag durch konsequentes Aufrunden des Divisors und Nachsehen, wie oft der gerundete Divisor in den (unveränderten) Dividenden passt.
4. Überschlagstechnik ohne einheitliches Regelsystem.“

Zu beachten ist stets, dass die Schüler schrittweise an die Überschlagstechnik herangeführt werden. So sind „…zunächst Aufgaben mit reinen Zehnerzahlen als Divisor dann mit zehnernahen Divisoren auszuwählen, bevor man zu den Aufgaben mit zehnerfernen Divisoren übergeht, wo aufgrund der kräftigen Auf- bzw. Abrundungen beim Überschlag im ersten Anlauf gehäuft zunächst fehlerhafte Ergebnisse anfallen.“ (ebd., S. 245)

4.3.2.2.1 Setzen einer kleineren Ziffer im Quotienten (*Fehlermuster Q_3*)

In einigen Fällen wählten die Schüler eine zu kleine Quotientenziffer aus, wie in den nachfolgenden Beispielen zu sehen ist:

<table>
<tr>
<td>362286 | 9
-27 | 310~~0~~205
09
-9
022~~8~~
-18
046
-45
01</td>
<td>Apostolos: die 9 geht in die 3 nicht, wir nehmen noch eine Ziffer, die 9 geht in die 36…5 mal. Fünfmal die 9 ist 45, 6 mal die 9 ist…54, und jetzt, was machen wir jetzt?
I: Du hast gesagt, 9 mal 5, 45 und 6 mal die 9, 54…welche Zahl hast du hier?
Apostolos: 36.
I: Was musst du jetzt machen?
Apostolos: Hm…3 mal.
I: Wie viel macht das?
Apostolos: 3 mal 9, 27…
I: Mal sehen…
Apostolos: Wir schreiben die 27 und ziehen die 36 ab. 6, ziehen 7 ab, 1 (falsche Rechenrichtung).
I: Wie hast du das gemacht?</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Apostolos: 6 (korrigiert), wir ziehen die 7 ab, geht nicht, wir geben hier (zur 6) eins und es wird 16.
I: Ja…
Apostolos: Die 7 geht in die 16 (benutzt die Sprechweise der Division in der Subtraktion)…9. Wir geben auch hier eins (zur 2), 3 von 3, 0.
I: Und was hast du jetzt?
Apostolos: Die 9 geht in die 9 einmal.
I: Wie viel hast du übrig?
Apostolos: 9.
I: Und wie groß ist dein Divisor?
Apostolos: Auch 9.
I: Was heißt das?
Apostolos: Dass wir noch eine Ziffer herunterholen müssen…nein, dass wir erst die 9 noch mal nehmen und dann…
I: Aha, mach so wie du es kennst…
Apostolos: Einmal 9 ist 9. 9 von 9, 0. Wir holen die 2 runter (zeigt die zweite 2).
I: Welche Zahl holst du jetzt?
Apostolos: Diese (zeigt die zweite 2)…ah, nein, die (korrigiert und zeigt die erste 2). Die 9 geht in die 2 nicht, wir holen die nächste 2 runter. Nein,…wir setzen hier (im Quotienten) eine Null…die 9 geht in die 22 nicht, noch eine Null (im Quotienten), wir holen auch die andere Ziffer runter…die 228 in die 9…
I: Das hast du alles so schnell gemacht, kannst du mir auch diese Sachen erklären?
Apostolos: Also hier ging die 9 nicht in die 2, dann holte ich noch eine runter, und dann noch…ach ja, 2 mal.
I: Was meinst du?
Apostolos: Hier (zeigt die 22) passt die 9…2 mal 9 ist 18, von 2 kann ich 8 nicht abziehen, 12, ziehe 8 ab…3…4, wir geben auch hier (zur 1) eins, 1 plus 1, 2, von 2, 0. Die 9 geht in die 4 nicht, 0 im Quotienten. Wir holen auch die andere Ziffer, die 6, und sagen die 9 in die 46…4…5 mal. 5 mal 9, 45, von 46, 1.</td>
</tr>
</table>

Wie viele Kinder hat auch Apostolos in der ersten Teildivision die Quotientenziffer zu klein geschätzt. Er probiert zunächst sehr große Ziffern aus (9*5, 9*6) und als er feststellt, dass diese ungeeignet sind, wählt er eine kleine Ziffer aus (9*3), um das Problem zu lösen. Dabei vergisst er das Produkt 9*4, das seinem Suchen ein Ende setzen würde. Dieses Vorgehen kann zwei Ursachen haben: a) er ignoriert das Ergebnis dieser Einmaleinsaufgabe und ist auch nicht in der Lage, es aus den Nachbaraufgaben abzuleiten, oder b) sein Ziel ist, ein Multiplikationsergebnis zu erhalten, das kleiner als 36 ist. Da die zwei ersten Produkte größere Zahlen als 36 liefern, werden sie direkt ausgeschlossen. Die Probe mit der Ziffer 3 ergibt die Zahl 27, die natürlich kleiner als 36 ist. Somit hat sich das Problem für den Schüler erledigt und eine weitere Suche ist für ihn überflüssig. Dass es eine weitere Zahl gibt, die ein Teilprodukt ergibt, das dem Teildividenden entspricht, bleibt somit unbeachtet. Die Wahl einer kleinen Quotientenziffer hat zur Folge, dass die nachfolgende Teildifferenz so groß wie der Divisor ist. Der Schüler bemerkt jedoch seinen Fehler nicht, stattdessen schreibt er eine 1 als zusätzliche Ziffer im Quotienten und dividiert noch einmal in derselben Stellenwertspalte. Auch die eindeutigen Hinweise der Verfasserin über die Größe des Restes und des Divisors bleiben unbeachtet. Sein Vorgehen scheint für ihn fehlerfrei zu sein. Irritiert wird er im weiteren Verlauf durch zwei gleiche Ziffern im Dividenden (zwei 2) und zusätzlich dividiert er die Teildifferenz („die 9 geht in die 4 nicht, 0 im Quotienten"), bevor er die nächste Ziffer herunterholt. Dasselbe Fehlermuster liegt auch in den Berechnungen von Melina und Lefteris vor:

13104 | 56 -112 | 23~~4~~31 0190 -168 0224 *330* *230* -168 056 -56 00	(in der dritten Teildivision) **Melina**: …Wir holen die 4 runter. Die 56 geht in die 224… **I**: Wie findest du das heraus? **Melina**: Wie die 5 in die 22… **I**: Und wie viel ist das? **Melina**: 4 mal. 6 mal die 4…30, wir schreiben die 0 und 3 der Übertrag, 4 mal die 5, 30, plus 3, 33. **I**: Kannst du bitte noch mal die Multiplikation machen? **Melina**: 4 mal die 6…30, wir schreiben die 0, 3 der Übertrag, 5 mal die 4, 20, plus 3, 23.…(sieht, dass die Subtraktion nicht möglich ist), 3 mal. 3 mal die 6, hm, 12…nein, 18, (guckt die Verfasserin fragend an)… **I**: Ja… **Melina**:…wir schreiben die 8, 1 der Übertrag, 3 mal 5 ist 15, plus 1 ist 16. 8 von 4, geht nicht, 8 von 14,… 6, wir schreiben die 6, 1 der Übertrag, plus 6, 7, von 2 geht nicht, 7 von 12, …hm,…5. **I**: Hm… **Melina**: 1 der Übertrag, plus 1, 2, von 2, 0. **I**: Was machen wir jetzt? **Melina**: Die 56 geht in die 56 einmal. Einmal 56 ist 56. Wir ziehen es hier ab.…fertig.

In diesem Fall wählt die Schülerin die richtige Quotientenziffer aus, kommt aber durch Einmaleinsfehler der Nähe (6*4=30) und durch Perseveration (4*5=30) zum falschen Teilprodukt (230), das größer als der Teildividend (224) ist. Daher ist sie gezwungen, die Quotientenziffer um eins zu verkleinern. Die Tatsache, dass die entstandene Teildifferenz so groß wie der Divisor ist, veranlasst sie, noch einmal in derselben Stellenwertspalte zu dividieren. Diese Lösung zeigt, dass das mehrmalige Dividieren in derselben Stellenwertspalte auch durch vorausgehende Einmaleinsfehler ausgelöst werden kann.

Eine andere Variante desselben Fehlermusters liefert die Lösung von Lefteris:

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>75665</td><td>37</td></tr>
<tr><td>-74</td><td>233$\cancel{423}$</td></tr>
<tr><td>0166</td><td></td></tr>
<tr><td>-111</td><td></td></tr>
<tr><td>0555</td><td></td></tr>
<tr><td>*111*</td><td></td></tr>
<tr><td>*74*</td><td></td></tr>
<tr><td>-111</td><td></td></tr>
<tr><td>444</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>
(in der zweiten Teildivision)
Lefteris: Ich hole die 6 (die erste 6) runter. Die 16 geht in die 37…(falsche Rechenrichtung)…hm…geht nicht?
I: Was meinst du ?
Lefteris: …
I: Wie hast du das denn am Anfang gemacht?
Lefteris: Die 37 in die 75…
I: Und hier…?
Lefteris: die 7 in die 16…
I: Die 7?
Lefteris: die 37…
I: Ja?
Lefteris: in die 6…
I: Welche 6 meinst du?
Lefteris: äh, nein, in die 16…geht nicht…ich hole noch die andere 6 runter…die 37 in die 166…
I: Wie findest du das?
Lefteris: Hm…(rechnet leise)
I: Mit welcher Zahl probierst du `s jetzt aus?
Lefteris: Mit der 3. 3 mal 7, 21, 3 mal 3 ist 9, plus 2…11. 1 von 6, 5, 1 von 6, 5, 1 von 1, 0. Ich hole auch die 5 runter…
I: Und was sagst du jetzt?
Lefteris: Die 37 in die 555…geht…3 (schreibt im Quotienten eine 3).
I: Kannst du mir vielleicht sagen, wie du dir diese 3 ausgedacht hast?
Lefteris: Ich hab ´s nur so genommen.
I: Durch Zufall?
Lefteris: Ja (rechnet leise und schreibt 111)…es ist klein…ich nehme die 4.…aber es wird nicht rauskommen…(entscheidet sich für eine 2 im Quotienten)…2 mal 7, 14, 1 der Übertrag, 2 mal 3 ist 6, plus 1, 7. …auch nicht…
I: Was willst du jetzt machen?
Lefteris: Doch die 3…(berechnet wieder 111) und jetzt die Subtraktion…4, 4, 4.
I: Und nun?
Lefteris: Fertig.
</td>
</tr>
</table>

Dieser Schüler lässt die zweite Teildivision aus, da er keine Null im Quotienten setzt. In der dritten Teildivision schätzt er die Quotientenziffer zu klein, da er die Quotientenziffer ohne Vorüberlegungen zufällig aussucht. Dass die resultierende Teildifferenz größer als der Divisor ist, wird gar nicht berücksichtigt. Für diesen Schüler zählt nur, dass er in dieser bestimmten Stellenwertspalte gerechnet hat, ohne das Ergebnis dieser Berechnung in Betracht zu ziehen. Daher besteht für ihn auch nicht die Notwendigkeit, noch einmal in derselben Stellenwertspalte zu dividieren, um die Teildifferenz (55) zu verkleinern, wie die meisten Schüler handeln würden. Automatisch holt er eine neue Ziffer herunter und ist bereit, auch in der nächsten Stellenwertspalte zu arbeiten. Auf diese Weise ergibt sich der nächste zu große Teildividend (555). Erneut nimmt er dieselbe Quotientenziffer, ohne zu berücksichtigen, dass der neue Teildividend weitaus größer als dieser in der vorherigen Teildivision (166) ist und er dementsprechend seine Quotientenziffer erhöhen müsste. Das kleine Teilprodukt (111) bewegt ihn, die nächst größte Ziffer (4) zu wählen, doch dieser Gedanke wird schnell aufgegeben und eine noch kleinere Ziffer wird ausgesucht (2), die die erwünschte Lösung auch nicht herbeiführt. So besteht der Schüler auf der anfangs ausgewählten Quotientenziffer (3) und beendet das Verfahren. Auch die Größe des Restes scheint für ihn unwichtig zu sein. Die Hauptintention bestand darin, alle Ziffern des Dividenden herunterzuholen und mit ihnen zu arbeiten. Sobald das geschehen ist, ist die Division für ihn gelöst.

In den vorhergehenden Lösungen haben die Schüler eine Quotientenziffer zu klein geschätzt. Dies hatte zur Folge, dass die entstandene Teildifferenz genauso groß wie oder auch größer als der Divisor war. Die Schüler, die das bemerkten, dividierten noch einmal in derselben Stellenwertspalte und glaubten auf diesem Wege das Problem lösen zu können. Andere Schüler bemerkten das nicht oder maßen dem keine Bedeutung zu. Für sie war die Größe der Teildifferenz irrelevant. Sie fuhren mit dem Verfahren fort, holten neue Ziffern herunter und beendeten die Aufgabenbearbeitung, nachdem sie alle Ziffern des Dividenden heruntergeholt hatten. Auch die Größe des Restes spielte für sie keine bedeutende Rolle.

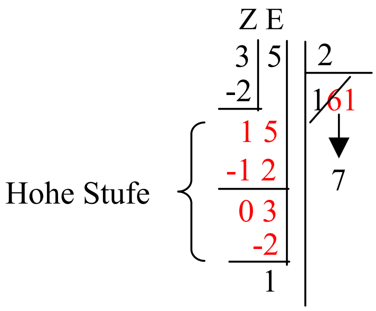
Diese Fehler zeigen, dass die Schüler keinen Vergleich zwischen Teildifferenz und Divisor durchführen, um die Angemessenheit der entsprechenden Quotientenziffer zu kontrollieren. Sie wissen auch nicht, was es heißt, wenn die Teildifferenz dem Divisor entspricht, oder größer als der Divisor ist. Diese Tatsachen können sie nicht in Beziehung zu der geschätzten Quotientenziffer setzen. Sicher ist, dass sie auch die Verfahrensregeln nicht beherrschen, wie man in solchen Fällen vorgehen muss, bzw. in welche Richtung man die Quotientenziffer verändern muss. Auch die Einsicht in das Divisionsschema ist nicht vorhanden, da sie sonst an der Staffelform erkennen würden, dass sie in derselben Stellenwertspalte mehrmals dividiert haben.

Zunächst ist es notwendig, das Fehlermuster an einer überschaubaren Aufgabe bewusst zu machen. So kann z. B. die Aufgabe 35: 2 als Muster dienen, um dieses Fehlermuster zu verdeutlichen. Es wird zunächst die Quotientenziffer zu klein geschätzt und danach die Aufgabe richtig gelöst. Die Schüler sollen ihre Vermutungen über die Richtigkeit der Lösungen ausdrücken.

$$
\begin{array}{r|l}
35 & 2 \\ \cline{2-2}
-2 & 161 \\ \cline{1-1}
15 & \\
-12 & \\ \cline{1-1}
03 & \\
-2 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
35 & 2 \\ \cline{2-2}
-2 & 17 \\ \cline{1-1}
15 & \\
-14 & \\ \cline{1-1}
01 &
\end{array}
$$

In einer nächsten Phase werden 35 Bonbons an 2 Kinder verteilt (diese Aufgabe kann auch mit Rechengeld veranschaulicht werden) und das Ergebnis des Verteilens mit den Ergebnissen der zwei Aufgaben verglichen. Anhand der enaktiven Verteilung kann man den Schülern die Bedeutung des großen Restes darstellen. Sind nach dem Verteilen noch mehr als 2 Bonbons übrig, ist das Verteilen nicht abgeschlossen, weil jedes der Kinder noch weitere Bonbons bekommen kann. So kann man den Schülern helfen zu verstehen, wieso der Rest kleiner als der Divisor sein muss.

Um das „verbotene“ mehrmalige Dividieren in derselben Stellenwertspalte zu demonstrieren, werden über dem Dividenden die Stellenwerte notiert und senkrechte Striche in die Divisionsstaffel gezogen. Eventuelle „hohe Stufen“ in diesem Schema sind ein Anzeichen dafür, dass man die Quotientenziffer zu klein geschätzt hat und deshalb immer noch in derselben Stellenwertspalte verbleibt, was falsch ist.



An diesem Beispiel lässt sich erkennen, dass in der Einerspalte zweimal dividiert wurde, was den Schüler dazu bringen soll, die Quotientenziffer zu erhöhen. Um solchen Fehlermuster vorzubeugen ist es ratsam die Schüler anzuhalten, die Staffelform der jeweiligen Aufgabe auf „hohe Stufen“ zu überprüfen.

Das mehrmalige Dividieren war jedoch nicht bei jeder Lösung anzutreffen, in der die Quotientenziffer zu klein geschätzt wurde. Es gab Schüler wie Lefteris, die trotz großer Teildifferenz einfach die nächste Ziffer des Dividenden herunterholten, um in der nächsten Stellenwertspalte zu dividieren. In ihren Lösungen konnte man daher anhand der Staffelform keine Fehler erkennen. Deshalb empfiehlt es sich die Schüler anzuregen, nach jeder Teildivision zu überprüfen, ob die Teildifferenz kleiner als der Divisor ist. Ist das der Fall, kann man eine neue Ziffer in der nächsten Spalte herunterholen und die nächste Teildivision berechnen. Ist das nicht der Fall, muss man die Quotientenziffer der vorhergehenden Teildivision erhöhen.

Um die Wahl einer zu kleinen Quotientenziffer zu vermeiden, können die Schüler auch aufgefordert werden die entsprechenden Einmaleinsreihen (oder bestimmte Einmaleinssätze) aufzusagen und erst dann anzuhalten, wenn sie ein Einmaleinsergebnis erhalten haben, das größer als der entsprechende Teildividend ist. Das signalisiert ihnen, dass sie die davor genannte Ziffer wählen müssen, um die Subtraktion des Teilproduktes vom Teildividenden zu ermöglichen.

4.3.2.2.2 Setzen einer größeren Ziffer im Quotienten (*Fehlermuster* Q_2)

Bei diesen Fällen wurde genau das gegensätzliche Fehlermuster beobachtet, das heißt die Schüler schätzten die Quotientenziffer zu groß. Wie sie dabei vorgingen, soll in der Folge erläutert werden. Begonnen wird mit den Lösungen von Christos:

75665 | 37 -74 | 252 0166 *165* -185 0815 -74 841	**Christos**: Die 37 geht in die 75 so oft wie die 3 in die 7, d. h. 2 mal. 2 mal 7, 14, wir schreiben die 4 und 1 der Übertrag, 2 mal 3, 6, plus 1, 7. (Er subtrahiert). Wir holen die 6 runter und sagen die 37 geht in die 16 nicht, wir holen auch die andere 6 runter…die 37 geht in die 166…so oft wie die 3 in die 16…(schweigt) **I**: Wie oft geht die 3 in die 16? **Christos**: Fünfmal. 5 mal die 3, 15, wir schreiben die 5 und 1 der Übertrag, 5 mal die 7… 36, wir schreiben die 6 und 1 der Übertrag, 3 mal die 5, 15, plus 1, 16. **I**: Du musst dich nicht so beeilen, wir haben Zeit…könntest du noch mal erklären, wie du die 165 berechnet hast? **Christos**: 5 von…nein, 5 mal 7, 36…35, wir schreiben die 5 und 1 der Übertrag… **I**: Hm… **Christos**: Oh, 3 der Übertrag, 3 mal 5 ist 15, plus 3, 18. **I**: Und nun? **Christos**: Jetzt die Subtraktion… **I**: Welche? **Christos**: Diese… **I**: Kannst du die Zahlen laut lesen? **Christos**: 166 minus 185. Also…5 von 6…1. 8 von 16…8, 1 von 1, 0. Wir holen auch die 5 runter und sagen die 37 geht in die 815 so oft wie die 3 in die 8…zweimal. 2 mal die 7, 14, wir schreiben die 4, 1 der Übertrag, 2 mal 3, 6, plus 1, 7. 4 von 5, 1. 7 von 11…hm…4, wir schreiben die 4 und holen auch das (die 8) runter.… **I**: Und jetzt? **Christos**: Jetzt sind wir fertig.

Auch hier fehlt in der zweiten Teildivision die entsprechende Null im Quotienten. In der dritten Teildivision wird die Quotientenziffer zu groß geschätzt. Das entsprechende Teilprodukt fällt jedoch durch Fehler in der Mutliplikation zur Berechnung des Teilproduktes (165) zu klein aus. Diese Fehler beim Berechnen des Teilproduktes sind Flüchtigkeitsfehler, da der Schüler beim zweiten Versuch das richtige Teilprodukt notiert. Dabei bemerkt er jedoch nicht, dass das entstandene Teilprodukt größer als der Teildividend ist und dass die bevorstehende Subtraktion „nicht geht". Er führt diese aus, indem er nach der Erweiterung in der Zehnerspalte den Übertrag nicht mehr berücksichtigt. Die Teildifferenz ist an dieser Stelle größer als der Divisor, doch es findet kein Vergleich statt, der dies bestätigen würde. Stattdessen wird die nächste Ziffer des Dividenden heruntergeholt und es wird weiter in der nächsten Spalte dividiert. Die falsche Anwendung der Überschlagstechnik nach den führenden Ziffern verursacht hier neue Fehler, da im Divisor die letzte, im Teildividenden dagegen die zwei letzten Ziffern ausgelassen werden. Dadurch wird die nächste Quotientenziffer zu klein geschätzt, was zu einem verhältnismäßig großen Rest führt. Dies erregt beim Schüler allerdings keine Bedenken. Da er keine andere Ziffer vom Dividenden herunterholen kann, beendet er an dieser Stelle das Verfahren.

In der Folge wird der Lösungsversuch von Spiros präsentiert, da er eine weitere mögliche Folge darstellt, wenn eine Quotientenziffer zu groß geschätzt wird.

```
 75665 | 37
-74    |-------
 016   | 2419999
-148
 068
 -37
  316
 -333
 1083
 -333
  750
 -333
  417
 -333
```

Spiros: Die 37 geht in die 75 so oft wie die 3 in die 7, 2 mal. Zweimal 7, 14, (schreibt) 4 und 1 (der Übertrag). 2 mal 3, 6, plus 1, 7. 75 minus 74, 1. Wir holen die andere Ziffer (die 6) runter und sagen die 37 geht in die 16…4 mal.
I : Wieso ?
Spiros: Weil wenn ich sage, 5 mal die 7…kommt mehr raus. 4 mal 7, 28, (schreibt) 8 und 2 der Übertrag, 3 mal 4, 12, plus 2, 14. 6 minus 8 geht nicht, wir borgen einen Zehner und sagen 8 von 16, 8. Einen Einer (meint Zehner), den wir uns geliehen haben, den addieren wir zu 4 und es wird 5. 5 von 1 geht nicht, wir borgen einen Zehner und sagen 5 von 11, 6. Eins, das wir uns geliehen haben, minus 1, 0.
I: Was hast du im letzten Schritt mit deinem Übertrag gemacht?
Spiros: Hier gibt es keine Ziffer mehr (zeigt die 0), um abzuziehen, deshalb ziehen wir es hier ab.
I: Hm…
Spiros: Wir holen jetzt…nein, die 37 geht in die 68 so oft wie die 3 in die 6, 2 mal. 2 mal 7 ist 14…(denkt nach)…geht nicht, 1 mal. 1 mal 7, 7, einmal die 3, 3. 37 von 68…(subtrahiert)…31. Wir holen die nächste Ziffer runter und sagen die 37 geht in die 316 so oft wie die 3 in die 31.…9 mal. 7 mal 9 ist 63, 3 und 6 der Übertrag, 3 mal 9…27, plus 6…33. 3 von 6 ist 3, 3 von 1 geht nicht, wir borgen einen Zehner und sagen 3 von 11…
I: Wie findest du das?
Spiros: 8.
I: Wie hast du die 8 gefunden?
Spiros: Ich habe von der 3 bis zur 11 gezählt. 1 Zehner, den wir uns geliehen haben, plus 3, 4, von 3, geht nicht, von 13, 3 (vergisst dabei den Übertrag) von 13…10.
I: Hm…
Spiros: Die 37 geht in die 1083 sooft wie die 3 in die 108, geht 9 mal. 7 mal 9 ist 63, 3 und 6 der Übertrag, 3 mal 9 ist 27, plus 3 ist 33…(guckt auf das Blatt und schweigt)…
I: Bist du jetzt irgendwo hängen geblieben?
Spiros: …ich sage 3 mal 27, plus 6…33…
I: Hm…
Spiros: 3 von 3, 0 und 3 von 8, 5. 3 von 0 geht nicht, wir borgen einen Zehner und sagen die 3 in die (Sprechfehler statt von) 10…7 mal. Eins, die wir uns geliehen haben, von 1, 0. Die 37 geht in die 75 so oft wie die 3 in die 75…9 mal. 7 mal 9, 63, 3, plus 6 der Übertrag, 3 mal 9 ist 27 plus 6…32, 33. 3 von 0 geht nicht , wir borgen einen Zehner und sagen 3 von 10, 7, 1, die wir uns geliehen haben, plus 3, 4, von 5, 1. 3 von 7, 4. Die 37 geht in die 417 so oft wie die 3 in die 41…9 mal. 7 mal 9, 63, 3, plus 6 der Übertrag, 3 mal 9 ist 27 plus 6…33…(guckt wieder auf die Lösung)…
I: Was meinst du?

Spiros:…ich weiß nicht, ich hab´ zu viele 9…(zeigt den Quotienten)
I: Ja, das stimmt. Was willst du jetzt machen?
Spiros: …
I: Willst du was verändern?
Spiros: (Zuckt mit den Achseln)…
I: Gut.

Dieser Schüler befolgt konsequent das Überschlagen nach den führenden Ziffern, kommt aber in der zweiten Teildivision durcheinander. Er merkt nicht, dass diese Division (16:37) „nicht geht“, da der Teildividend kleiner als der Divisor ist. Wie auch in dem entsprechenden Abschnitt deutlich wird, haben die Schüler Schwierigkeiten beim Bestimmen der Ziffern, die sie für das Überschlagen auslassen dürfen. So kommt es zu Fehlern wie in diesem Fall, in dem der Schüler die 37 auf eine 3 kürzt und die 16 unverändert lässt. Durch dieses falsche Überschlagen schätzt er die Quotientenziffer zu groß und kommt zu einem zu großen Teilprodukt (148). Das bleibt unbemerkt und er führt in der Folge eine Subtraktion durch, in der er eine große von einer kleineren Zahl abzieht, was im Raum der natürlichen Zahlen nicht möglich ist (dabei operiert er falsch mit dem Übertrag). Als er feststellt, dass der Divisor noch in die Teildifferenz passt, sieht er sich gezwungen, noch einmal in derselben Stellenwertspalte zu dividieren. Nach diesem Schritt kann er die nächste Ziffer herunterholen und in der nächsten Spalte dividieren. Auch hier (in der Hunderterspalte) zieht er wieder die große von der kleinen Zahl ab und erhält durch Subtraktionsfehler (Vergessen des Übertrags und einseitige Erweiterung) einen vierstelligen Teildividend (1083), der durch den zweistelligen Divisor dividiert werden muss. Auch diese Tatsache gibt ihm keine Anhaltspunkte, um sein Vorgehen zu überdenken. Da ihm keine größere Ziffer zur Verfügung steht, dividiert er mehrmals mit der 9 in derselben Stellenwertspalte. Nach dem Setzen von vier 9en im Quotienten ergibt sich ein Quotient, der größer als der Dividend ist. An dieser Stelle fängt der Schüler an zu zweifeln und versucht herauszufinden, wo er einen Fehler begangen hat. Das gelingt ihm aber nicht, denn es ist sehr schwer den Überblick zu behalten. Er ist sich sicher, dass das Verfahren nicht stimmt und gibt die Berechnungen auf.

An diesen Beispielen wird deutlich, dass das Schätzen zu großer Quotientenziffern weitere Fehlermuster auslöst. Mit den entstehenden großen Teilprodukten führen die Schüler Subtraktionen durch, die nicht lösbar sind, da eine große von einer kleineren Zahl subtrahiert wird. Die Schüler ignorieren die Überträge oder operieren falsch mit ihnen und wenden die Erweiterungstechnik falsch an. Die vorausgehenden Subtraktionsfehler ergeben falsche und zu große Teildifferenzen, welche die Schüler oft veranlassen, noch einmal in derselben Stellenwertspalte zu dividieren. Ist dies nicht möglich, holen die Schüler die nächste Ziffer vom Dividenden herunter und dividieren in der nächsten Spalte mit einem erneut zu hohen Teildividenden. Unberücksichtigt bleiben dabei die Größe der jeweiligen Teildifferenz und des Restes. Ausschlaggebend für das Beenden des Verfahrens ist dagegen das Herunterholen aller Ziffern des Dividenden.

Wird dieses Fehlermuster erkannt, ist es sinnvoll zunächst die Schwächen in der schriftlichen Subtraktion getrennt zu behandeln. Dabei sollte der Umgang mit den Überträgen, die Erweiterungstechnik und die lösbaren bzw. unlösbaren Aufgaben den Schwerpunkt bilden. Vorschläge zur Behebung dieser Fehlermuster in der Subtraktion werden im entsprechenden Abschnitt (4.3.2.1) gemacht. An dieser Stelle kann den Schülern geraten werden, bevor sie in der Divisionsstaffel subtrahieren stets sicherzustellen, dass die bevorstehende Subtraktion lösbar ist. Wenn ja, können sie mit der Subtraktion fortfahren. Ist das nicht der Fall, müssen sie die Quotientenziffer verringern.

Als nächstes müssen die Missverständnisse in der Überschlagstechnik (nach den führenden Ziffern) ausgeräumt werden, so dass die Schüler verstehen, wie viele Ziffern sie auslassen dürfen. Ihnen sollten auch weitere Überschlagstechniken vorgestellt werden, aus denen sie die für sie verständlichste wählen können.

In den Fällen, in denen mehrmals in derselben Stellenwertspalte dividiert wurde, können die Schüler ihre Staffelform nach zu „hohen Stufen" überprüfen und die vorangehende Teildivision (mit der entsprechenden Quotientenziffer) bezüglich ihrer Richtigkeit kontrollieren. Dabei sollten sie im Hinterkopf behalten, dass man nur einmal in jeder Spalte dividieren darf. Daher sollten sie die erste Teildivision (falls es mehrere gibt) in der entsprechenden Stellenwertspalte besonders genau kontrollieren.

Findet kein mehrmaliges Dividieren in derselben Stellenwertspalte statt, holen die Schüler die nächste Ziffer des Dividenden herunter und dividieren in der nächsten Spalte mit einem zu großen Teildividenden. Um dem vorzubeugen, sollten die Schüler angehalten werden, nach jeder Subtraktion die Teildifferenz mit dem Divisor zu vergleichen. Ist die Teildifferenz größer als der Divisor, deutet dies auf Subtraktionsfehler oder falsche Quotientenziffern in der vorhergehenden Teildivision hin.

Schließlich muss auch hier (wie im vorigen Fehlermuster) die Bedeutung eines großen Restes enaktiv demonstriert werden, so dass die Schüler verstehen, dass sie in solchen Fällen das Verfahren nicht abschließen können.

Allgemeine Maßnahmen zur Fehlervorbeugung im Bereich „zu große bzw. zu kleine Quotientenziffer"

Wie ausgeführt ist das Bestimmen der Quotientenziffer für die Schüler sehr schwierig und auch sehr ausschlaggebend. Wird die Quotientenziffer zu klein oder zu groß geschätzt, werden weitere Fehlermuster ausgelöst, die die Schüler nicht erkennen und sie zu falschen Ergebnissen führen. Unter den Vorschlägen, die zur Behebung jedes Fehlermusters vorgetragen wurden, werden hier zwei hervorgehoben, die dazu dienen, den Schülern eine zu kleine sowie eine zu große Quotientenziffer zu signalisieren:

- Die Überprüfung der Divisionsstaffel nach „zu hohen Stufen" und
- Der Vergleich zwischen Teildifferenz und Divisor.

Diese Vorkehrungen sind während der Aufgabenbearbeitung zu berücksichtigen. Bevor die Schüler jedoch mit der Rechnung beginnen, können sie eine Vorstellung der Größenordnung des Quotienten gewinnen, wenn sie die *Anzahl der Stellen des Quotienten* vornherein bestimmen. Das kann anhand der Stellentafel geschehen (Picker, zitiert nach Padberg, 1996, S. 243), z. B.:

T	H	Z	E		
3	7	3	6	: 8 =	$\boxed{}$

3 T : 8 ≈ 0 T
37 H : 8 ≈ 4 H

Der Quotient beginnt also mit der H-Stelle.
Er hat also 3 Stellen.

Gleichzeitig ist auch ein *Überschlag der vollständigen Aufgabe* möglich (ebd.), so dass man sich schon vorher nicht nur über die Stellenanzahl des Quotienten ein Bild macht, sondern auch über die ungefähre zahlenmäßige Größe dessen.

Im Lehrerband des griechischen Lehrbuches „Meine Mathematik“ (4. Klasse, S. 169ff.) wird ebenfalls eine Überschlagstechnik der vollständigen Aufgabe vorgestellt, die auf den Vielfachen des Divisors beruht und daher auch als „Methode der Vielfachen“ bezeichnet wird. Dabei wird fortschreitend der Divisor mit 1, 10, 100, 1000 usw. multipliziert und das Ergebnis des Produktes mit dem Dividenden verglichen und so die ungefähre Größe des Quotienten ermittelt, z. B.

bei der Aufgabe 75 : 9 =	1*9=9	9 < 75 < 90
	10*9=90	

Da 9 < 75 < 90 wird der Schluss gezogen, dass der Quotient eine einstellige Zahl sein wird und zwischen 1-9 liegen wird. Für größere Zahlen wird der Divisor fortschreitend mit 10, 20, 30, usw. multipliziert, wie im nächsten Beispiel, bei der Aufgabe 465 : 9 =

10*9=90	
20*9=180	
30*9=270	450 < 465 < 540
40*9=360	
50*9=450	
60*9=540	

Aus der obigen Ungleichheit wird geschlussfolgert, dass der Divisor eine Zahl zwischen 50 und 60 sein wird. Für das Üben dieser Überschlagstechnik stehen jedoch keine Aufgaben im Schulbuch zur Verfügung und es ist wohl dem Klassenlehrer überlassen, ob er dies im Unterricht thematisieren wird oder nicht. Außerdem ist diese Überschlagstechnik durch die fortgesetzten Multiplikationen sehr zeitaufwändig und deshalb ungeeignet. Es ist anzunehmen, dass die Schüler sich nicht bei jeder Aufgabe (besonders in größeren Zahlenräumen wie z. B. bei der Aufgabe 75665:37) entscheiden werden können, ob sie mit 1, 10, 100, …oder mit 10, 20, 30, usw. multiplizieren sollen und deshalb durcheinander kommen. Viel ökonomischer und verständlicher ist die Berechnung der Stellenzahl des Quotienten und das Überschlagen der vollständigen Aufgabe nach den Rundungsregeln (siehe oben).

Empfehlenswert ist des Weiteren wegen der hohen Komplexität der schriftlichen Division die Durchführung einer *Proberechnung* nach den Berechnungen. Diese kann ein Vergleich zwischen des Ergebnisses mit dem Überschlag sein, oder die Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor (wobei ein eventueller Rest noch hinzuaddiert werden muss) (Padberg, 1996, S. 245).

4.3.2.3 Fehler beim Einmaleins

75665	37
-74	20~~5~~441
0166	
175	
-148	
0185	
-148	
037	
-37	
00	

Leonidas: Die 37 geht in die 75 so oft wie die 3 in die 7, äh…2 mal. 2 mal die 7, 14, 1 der Übertrag, 2 mal die 3, 6, plus 1, 7. 4 von 5, 1, 7 von 7, 0. Wir holen die nächste Ziffer runter. Die 37 geht in die 16 nicht, 0 im Rest (sagt Rest, meint aber Quotienten). Wir holen auch die andere Ziffer runter, die 37 geht in die 166 so oft wie die 3 in die 16…hm…6…5 mal?
I: Wieso?
Leonidas: Weil 5 plus 3 ist 16…
I: 5 plus 3?
Leonidas: 5 mal 3…
I: Wie viel macht das?
Leonidas: 16…oder 15? Fünfmal die 7…35, wir schreiben die 5, 3 der Übertrag, 3 mal 5, 15, plus 3, 17.
I: Kannst du die Addition laut rechnen?
Leonidas: 15, 16,17,18. Ach so, 18. Geht nicht. 4 mal (streicht die 5 im Quotienten durch und schreibt eine 4). 4 mal 7, 28, wir schreiben die 8, 2 der Übertrag, 3 mal 4, 12 plus 2, 14. 8 von 6 geht nicht, 8 von 16… hm…
I: Wie findest du das?
Leonidas: 8, 9,10,11,12,13,14,15,16, 8. 1 der Übertrag, plus 4, 5, von 6, 1. 1 von 1, 0. Wir holen die andere Ziffer (5) runter. Die 37 geht in die 185 so oft wie die 3 in die 18. 5 oder 6 mal.
I: Wieso?
Leonidas: Weil 6 mal 3…
I: Weißt du vielleicht wie viel 5 mal 3 ist?
Leonidas: 25?…ich probier mal mit der 4 (schreibt 4 im Quotienten). 4 mal 7, 28, wir schreiben die 8, 2 der Übertrag, 4 mal die 3…13…
I: Hm…2 mal 4 ist…
Leonidas: 8…
I: Und noch mal die 4?
Leonidas: 13…(bewegt seine Finger)…12. 12 plus 2 ist 15…
I: Wie rechest du das?
Leonidas: Ich sage 12, 13,14, ach, 14. Die 8 kann ich von 5 nicht abziehen, von 15,…7, 1, die wir uns geborgen haben, plus 4, 5, von 8, 3.
I: Wie viel Rest hast du?
Leonidas: 37. Es passt noch einmal (schreibt noch eine 1 im Quotienten). Einmal 7 ist 7, einmal 3 ist 3, 0, 0.

Wie auch im Abschnitt über die Berechnung der Quotientenziffer ersichtlich wird, wussten die Schüler, dass sie die Quotientenziffer durch Rückgriff auf die Einmaleinsreihen ableiten konnten, doch es stellte sich heraus, dass die Einmaleinssätze für mehr als die Hälfte der Schüler nur unvollständig präsent und fehlerbehaftet waren, wie im vorangehenden Beispiel bei Leonidas.

Bei den Fehlern in den Einmaleinsaufgaben handelte es sich um:

- Fehler der Nähe (8 Schüler), wie z. B. 6*4=30, 4*7=32, 4*8=24, 3*7=14, 4*9=45, 4*9=32
- Perseverationsfehler, d. h. dominierende Ziffern bzw. Zahlen wirken nach (2 Schüler), wie z. B. 4*7=27, 4*3=13
- Abweichen von den richtigen Ergebnissen um 1 (3 Schüler), wie z. B. 3*9=28, 5*3=16, 5*7=36
- Verwechselung von Multiplikation mit Additionsergebnissen (5 Schüler), z. B. 4*4=8, 3*2=5, 2*1=3
- Falsche Zuordnung von Einmaleinsprodukten und Einmaleinsergebnissen (4 Schüler), z. B. 2*7=18, 4*8=56, 4*5=24, 6*9=35, 4*4=24.

Diese Einmaleinsfehler führten zu verschiedenen Fehlermustern im Test:

a) Richtige Quotientenziffer, aber dazugehöriges Teilprodukt falsch (*Fehlermuster* P_1)
b) Falsche Quotientenziffer, aber dazugehöriges Teilprodukt richtig (*Fehlermuster* Q_1)
c) Falsche Quotientenziffer und falsches Teilprodukt (*Fehlermuster* Q_4)

Außer den fehlerhaften Einmaleinskenntnissen beherrschten viele Schüler nur sporadische Einmaleinssätze, meist die ersten der jeweiligen Reihen (5 Schüler), oder ihre Einmaleinsreihen waren lückenhaft (18 Schüler). Bemerkenswert war jedoch, dass die Schüler nicht in der Lage waren, diese Lücken zu überwinden. Sie konnten nicht von einem ihnen bekannten Einmaleinssatz zu den Nachbaraufgaben übergehen. Wussten sie z. B., dass 3*4 gleich zwölf ist, konnten sie die Aufgabe 4*4 nicht berechnen. So blieben sie jedes Mal hängen und konnten mit der Einmaleinsreihe nicht fortfahren. Manche von ihnen versuchten durch Raten und Erinnern das entsprechende Ergebnis zu ermitteln, jedoch ohne Erfolg. Nur nach dem Hinweis der Verfasserin, noch mal denselben Faktor zu addieren, konnten sie dieses Hindernis überwinden. Dies soll mit einem weiteren Beispiel demonstriert werden:

<table>
<tr>
<td>

$$\begin{array}{l|l} 362286 & 9 \\ \cline{2-2} \underline{-36} & \cancel{6}\cancel{5}4\cancel{3}27 \\ 0022 & \\ \underline{-18} & \\ 148 & \end{array}$$

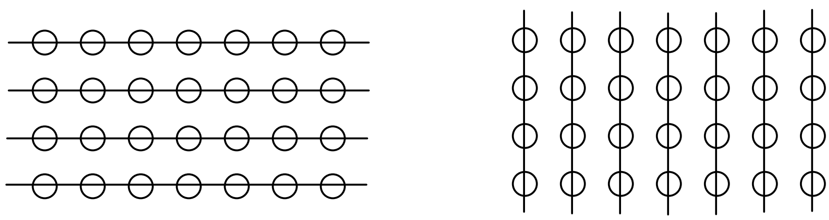
</td>
<td>
Areti: Eine Ziffer hat der Divisor, eins trennen wir links vom Dividenden und sagen die 9 geht in die 3 nicht, weil die 9 größer als die 3 ist. Wir trennen noch eine Ziffer (im Dividenden) und sagen die 9 geht in die 36…ich werde es erst mal mit der 6 versuchen. Ich multipliziere die 6 mit der 9 und das schreib ich hier (zeigt die richtige Stelle). 6 mal 9 …
I: Wieviel ist 5 mal die 9?
Areti: 45.
I: Und 6 mal die 9?
Areti: 35?
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
I: Du hast gesagt, wenn du 5 mal die 9 nimmst, hast du 45. Wenn du sie noch einmal nimmst wirst du weniger haben oder mehr?
Areti: Mehr?
I: Und wie findest du das?
Areti: …(schweigt)…
I: 5 mal die 9 und dann noch einmal die 9…
Areti: …(guckt auf ihre Finger)…54?
I: Ja!
Areti: Wir schreiben die 54 ganz und subtrahieren, aber es geht nicht, weil 54 größer als 36 ist.
</td>
</tr>
</table>

I: Was machst du jetzt?
Areti: Wir setzen ein kleinere Zahl, die 5. Fünfmal die 9, 45, wir schreiben sie ganz, aber auch diese Subtraktion geht nicht…Wir setzen eine andere Ziffer…
I: Welche?
Areti: Die 4. 4 mal die 9…
I: Wieviel ist 3 mal die 9?
Areti: 27.
I: Und 4 mal die 9?
Areti:…
I: 3 mal die 9 und noch einmal die 9…
Areti: 26?
I: Wieviel sagtest du ist 3 mal 9?
Areti: 27.
I: Und noch 9 dazu?
Areti: …36. Die schreiben wir. Die 36 geht in die 36. Wir holen noch eine Ziffer runter und sagen die 2 geht in die 9 (Sprechfehler, falsche Rechenrichtung) nicht, wir holen die 2 runter, die 9 geht in die 22…Wir probieren mit der 3. 3 mal 9, 27, geht nicht, weil 27 größer ist. Wir nehmen die 2. 2 mal 9, 18, das geht weil 22 größer ist. 8 von 12 ist…12, 11,10,9,8. Dann subtrahieren wir die 1 von der 2 und das macht 1 (dabei vergisst sie den Übertrag).
I: Hier stand doch 2, wo hast du die 12 her?
Areti: Wir borgen uns einen Zehner.
I: Wovon?
Areti: Es ist so…(holt auch die 8 runter).
I: Hm…welchen Rest hast du?
Areti: 148. Wir probieren mit der 7. 7 mal 9 ist…(an dieser Stelle kann sie nicht mehr fortfahren und die Lösung wird hier unterbrochen).

Wie Areti waren die meisten Schüler, die Schwierigkeiten beim Einmaleins hatten, nicht in der Lage, aus bekannten Rechensätzen Nachbaraufgaben abzuleiten. Diese Tatsache zeigt die Schwierigkeiten der Schüler, die Beziehung zwischen Addition und Multiplikation einzusehen und die Multiplikation als fortgesetzte Addition zu begreifen. Die Hilflosigkeit der Schüler an dieser Stelle lässt sich mit der Erarbeitung des Einmaleins im griechischen Lehrbuch erklären. Die Einmaleinsreihen werden darin der Reihe nach und ohne Bezug zueinander behandelt. So bleibt der Zusammenhang nicht nur zwischen den einzelnen Reihen (5er und 10er Reihe, 2er, 4er und 8er Reihe und schließlich 3er, 6er und 9er Reihe), sondern auch zwischen den einzelnen Aufgaben einer Einmaleinsreihe verborgen. Die Schüler sind gezwungen, die unverbunden nebeneinanderstehenden Einmaleinsreihen blind auswendig zu lernen, was sehr mühsam, zeitaufwändig und für viele uninteressant ist. Letzten Endes erweist sich diese Methode langfristig für die Mehrheit der Kinder als uneffektiv. Dass manche Einmaleinsergebnisse falsch in der Erinnerung behalten oder ganz vergessen werden können, ist nicht verwunderlich. Dass den Schülern nicht die Möglichkeit gegeben wird, die innere Systematik und den Zusammenhang der Einmaleinsreihen zu erkennen und selbst zu entdecken, ist ein großer Verlust nicht nur für die Schüler, sondern auch für ihre Lehrer. Eine große Hilfe hierzu bietet die Behandlung der Einmaleinsaufgaben nach den folgenden globalen Abfolgen 10, 5; 2, 4, 8; 3, 6, 9; 7 oder 2, 4; 10, 5; 8; 3, 6, 9; 7, um den Zusammenhang zwischen den einzelnen Reihen zu verdeutlichen. Bezogen auf jede einzelne Einmaleinreihe, wäre es ausreichend, wenn die Schüler bestimmte Multiplikationsgleichungen beherrschen würden und zwar das 1-fache, 2-fache, 5-fache und 10-fache der betreffenden Zahl, die sogenannten „Kernaufgaben“. Unter Rückgriff auf einige

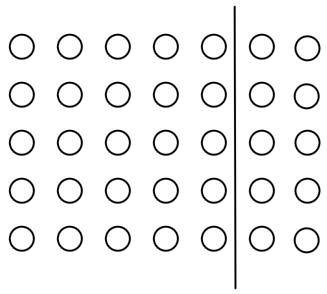
Hilfsvorstellungen lassen sich die übrigen Gleichungen einer Einmaleinsreihe aus diesen Multiplikationsgleichungen erarbeiten. Dies geschieht durch Nutzung des Verdoppelns und durch implizite Anwendung des Distributivgesetzes für die Addition bzw. Subtraktion (vgl. Radatz & Schipper, 1983, S. 83ff; Padberg, 1996, S. 122ff.). Auf diesem Wege kann man von einem oder mehreren Stützpunkten sämtliche Aufgaben einer Einmaleinsreihe lösen. Es handelt sich demnach um ein ökonomisches Erlernen und um ein flexibles Erarbeiten der Einmaleinskenntnisse, da man eine gegebene Aufgabe über verschiedene Lösungswege lösen kann (Padberg, ebd., S. 127). Das Wichtigste ist jedoch, dass die Schüler die Chance bekommen - von ihren vorhandenen Kenntnissen als Stützpunkten ausgehend – vergessene Einmaleinsergebnisse jederzeit selbst nachzurechnen und somit neue Kenntnisse zu gewinnen. Nur so können sie den operativen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Einmaleinsreihen und -aufgaben erkennen, was zu einem selbstständigen Arbeiten und einem besseren Selbstvertrauen verhilft.

Die Darstellung von Malaufgaben als Punktmuster oder an Plättchenmengen ist sehr geeignet, um die Rechengesetzte einzuführen. „Durch Zusammenfassen der Punkte in Zeilen bzw. in Spalten ergibt sich das *Kommutativgesetz*: Tauschaufgaben sind ergebnisgleich.“ (Wittmann & Müller, 1995b, S. 21)
Beispiel:

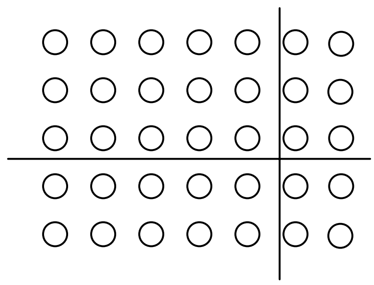


4*7 = 7*4

„Durch eine oder zwei Geraden lässt sich ein Punktmuster oder eine Plättchenmenge dem *Distributivgesetz* entsprechend in zwei oder vier Felder zerlegen.“ (ebd.)
Beispiel:



5 * 7 = 5 * 5 + 5 * 2



5 * 7 = 3 * 5 + 3 * 2 + 2 * 5 + 2 * 2

Von diesen beiden Rechengesetzten gewinnt besonders das Kommutativgesetz an Bedeutung, da sich durch seine Anwendung die Einmaleinsaufgaben genau auf die Hälfte reduzieren. Das ist besonders für Kinder mit schwachem Durchhaltevermögen sehr ermutigend. Gleichzeitig ist die Darstellung von Malaufgaben an Plättchenmengen oder als Punktmuster optimal, um den Zusammenhang von Addition und Multiplikation zu veranschaulichen. So können die Schüler einsehen, wie aus einem Einmaleinssatz (durch Addition bzw. Subtraktion derselben Zahl) die Nachbaraufgaben berechnet werden können. Zum Üben des Einmaleins bieten sich interessante Übungsformate wie z. B. Rechendreiecke, Maltabellen, Zahlenhäuser, usw. Durch das Kennenlernen dieser Methode wären die Schüler nicht so hilflos wie in den Interviews, wenn ihre Gedächtnisleistungen ihre Grenzen erreichen.

4.3.2.4 Fehler beim Ausrechnen der Teilprodukte

Im vorhergehenden Abschnitt wurde ersichtlich, dass Einmaleinsfehler zu falschen Teilprodukten führen können. Dies ist jedoch nicht die alleinige Ursache für das Entstehen falscher Teilprodukte. In den Interviews wurde ein weiterer Faktor erkannt, der ähnliche Auswirkungen hatte. Dies soll im folgenden Beispiel verdeutlicht werden:

<table>
<tr>
<td>75665 | 37
-74 | 2650
0166
222
-165
0015</td>
<td>(beim Berechnen des ersten Teilproduktes)
Emilia: 2 mal 7, 14, wir schreiben die 4, 1 der Übertrag, 2 mal 3, 6, plus 1, 7, nein, 8. (Guckt auf die Zahl und wundert sich, dann wiederholt sie die Multiplikation und findet das richtige Ergebnis). 4 von 5, 1, 7 von 7, 0. Die 37 geht nicht in die 16, wir holen auch die andere Ziffer, die 37 geht in die 166…
I: Wie findest du das heraus?
Emilia: 6 mal?
I: Du darfst ausprobieren, wenn du möchtest…
Emilia: 6 mal 7, 42, wir schreiben die 2 und 1 der Übertrag, ach, nein 4 der Übertrag, 3 mal 6, vier…und…zwanzig,…18, plus 4, 22. Wir subtrahieren jetzt, oh, geht nicht. Setzen wir 5 mal?
I: Mach so, wie du meinst…
Emilia: 5 mal 7, 35, wir schreiben die 5, 3 der Übertrag, 3 mal 5, 15, plus 1, 16. 5 von 6, 1, 6 von 6, 0, 1 von 1, 0. Ich hole auch die 5… die 37 in die 15… geht nicht, schreibe hier (im Quotienten) eine Null.</td>
</tr>
</table>

Diese Schülerin hat Schwierigkeiten mit den Behalteziffern bei der Berechnung der Teilprodukte. Sie kann sich schwer an die kurz davor ausgesprochene Behalteziffer erinnern und neigt dazu, immer eine 1 als Behalteziffer zu addieren. Im zweiten Teilprodukt spricht sie sogar die richtige Ziffer aus (3), rechnet jedoch mit einer 1 weiter (15 plus 1, 16). Sobald in den Rechnungen Behalteziffern auftauchen, kommt es bei ihr zu Fehlern. Wahrscheinlich sind es Konzentrationsschwächen oder ein schwaches Kurzzeitgedächtnis, die solchen Fehlern zugrunde liegen. Zusätzlich setzt sie auch keine Null im Quotienten, wenn sie feststellt, dass der neue Teildividend kleiner als der Divisor ist. Sie fährt wie die meisten Schüler fort, indem sie erneut eine Ziffer vom Dividenden herunterholt.

Falsche Teilprodukte können jedoch auch aus dem bewussten Ignorieren der Behalteziffern entstehen, wie im nächsten Beispiel deutlich wird:

<table>
<tr>
<td>224 | 18
- 26 | 26
064
- 68
06</td>
<td>Christos: Also wie oft geht die 18 in die 22…2 mal. 2 mal 8, 16, einmal 2 ist 2.
I: Du hast gesagt, 2 mal 8, 16, wo ist denn die 10 geblieben?
Christos: Welche 10?
I: 2 mal 8, 16, hier hast du 6 geschrieben…
Christos: … wir werden nicht… wir schreiben die 1 nicht…
I: Was wird denn aus dieser 1?
Christos: Hm…die 1… geht weg, geht weg.
I: Sie geht weg?</td>
</tr>
</table>

	Christos: Ja. **I**: Wo geht sie denn hin? **Christos**: Weiß ich doch nicht… **I**: Und weiter? **Christos**: Wir sagen die 6 von der 2 kann man nicht abziehen, wir setzen 12. 6 von 12, 6, 1 der Übertrag, nein,…2 von 2 ist 0. **I**: Was ist denn mit dem Übertrag, du hast gesagt… **Christos**: Der Übertrag geht weg.… **I**: Und wie sagst du 12? Hier steht 2… **Christos**: Unsere Lehrerin sagt es so … ich weiß nicht… **I**: Ja? Gut. Wie geht es weiter? **Christos**: Wir holen auch die 4 runter und sagen die 18 geht in die 64 … 6 mal. **I**: Wie findest du das heraus? **Christos**: Ich sage, wie die 1 in die 6. 6 mal 8, 48, wir schreiben die 8, 4 der Übertrag, der Übertrag geht weg, 1 mal 6, 6. 8 von 14 ist…8 von 14 ist…(zählt mit den Fingern)…6. Hm…6 von 6 ist 0. **I**: Bist du fertig? **Christos**: Ja.

Nach Auffassung dieses Schülers ist es ihm überlassen, mit den Behalteziffern so zu operieren, wie er möchte. Er ignoriert sie konsequent beim Ausrechen der Teilprodukte, die aus der Multiplikation in der Einerspalte entstehen. Dies macht er jedoch nicht, weil er eine Regel missverstanden hat, sondern um seinen Rechnungen Gültigkeit zu verleihen. Würde er nämlich die Behalteziffern addieren, ergäbe sich eine große Ziffer in der Zehnerstelle des Teilproduktes, die seinen Vermutungen nach die bevorstehende Subtraktion nicht ermöglichen würde. Dabei bemerkt er jedoch nicht, dass auch diese Ausweichreaktion ihn nicht helfen kann, da er die Quotientenziffer zu groß geschätzt hat und dadurch schon die Größenordnung (zwischen Minuend und Subtrahend) in der Einerspalte nicht stimmt. Charakteristisch für diesen Schüler ist, dass er dieselbe Ausweichreaktion (Ignorieren der Behalteziffern) auch in der Subtraktion anwendet (hier ignoriert er den Übertrag). Bei einer nachfolgenden Aufgabe, die der Schüler im Interview bearbeitet hat, wurde deutlich, dass er wusste, wie man die Teilprodukte regelrecht berechnen muss. In dieser Aufgabe wählte er die richtige Quotientenziffer aus und rechnete die Behalteziffern stets mit. Seine Schwierigkeiten liegen beim Schätzen der Quotientenziffern. Er scheint nicht zu wissen, dass große Teilergebnisse ein Anzeichen dafür sind, dass die Quotientenziffern falsch geschätzt wurden. Statt die Quotientenziffern zu verändern, versucht er die resultierenden Ergebnisse der Multiplikation und Subtraktion zu verändern, um seine Berechnungen akzeptabel zu machen.

Bei Schülern, die beim Ausrechnen der Teilprodukte durch die Behalteziffern durcheinanderkommen oder diese vergessen, ist es notwendig, dass die Multiplikation mit einstelligem Multiplikator getrennt geübt wird. Dabei sollten die Schüler in einer ersten Phase die Behalteziffern auf ihrem Arbeitsblatt notieren und sie sofort nach der Addition wegradieren. Nach und nach sollten sie versuchen, die Behalteziffern mit den Fingern der linken Hand zu „behalten" (vgl. Gerster, 1982a, S. 142f.). Die Vorteile dieser Technik sind darin zu sehen, dass man nichts aufschreibt, (dadurch mögliche weitere Fehler vermeidet, wie z. B. das Addieren falscher Behalteziffern wegen nicht rechtzeitigen Durchstreichens) dadurch Zeit gewinnt und ein sauberes und übersichtliches Rechenblatt behält (ebd.).

Um dem Auslassen bzw. Ignorieren der Behalteziffern (beim Ausrechnen der Teilprodukte) entgegenzuwirken, muss man den Schülern die Folgen dieser Handlung an einer überschaubaren Aufgabe demonstrieren. Wird eine Multiplikationsaufgabe mit Rechengeld veranschaulicht, können die Schüler beobachten, wie sich die Ergebnisse derselben Aufgabe verändern, wenn man die Behalteziffern berücksichtigt bzw. nicht berücksichtigt. So kann man eine kleine Rechengeschichte bearbeiten, wie z. B.: „Nikos bekommt jeden Schultag 185 Drachmen von seinem Vater. Wieviel bekommt er insgesamt in 5 Tagen?“ Das Multiplizieren ohne Berücksichtigung der Behalteziffern ergibt zunächst das Ergebnis 505, nach Berücksichtigung der Behalteziffern steigt es auf 925 (fast das doppelte). Durch das Legen der Aufgabe mit Rechengeld können sich die Schüler von der Richtigkeit der Ergebnisse überzeugen. Hier zeigt sich auch, dass sich das Ergebnis durch das Auslassen der Behalteziffern stark verringert. Dieselbe Multiplikationsaufgabe kann auch in einer Stellenwerttabelle berechnet werden, wobei die Behalteziffern sehr deutlich zu sehen sind:

H	Z	E		E
1	8	5	*	5
5	**4**0	**2**5		
9	2	5		

Zusätzlich kann man die Aufgabe in ihren Stellenwerten analysieren und berechnen, was auch gleichzeitig dem halbschriftlichem Rechnen entspricht:

185 * 5 =

100 * 5 = 500
80 * 5 = 400
5 * 5 = 25

100 * 5 = 925

Nachdem die Rolle der Behalteziffern thematisiert ist, sollten die Schüler Multiplikationsaufgaben bearbeiten, die das richtige Ausrechnen der Produkte trainieren. Zur Vorbereitung der Division können in einer weiteren Phase Aufgabenblätter mit Divisionsstaffeln vorgelegt werden, in denen die Teilprodukte fehlen. Dabei werden die Schüler aufgefordert, die fehlenden Teilprodukte zu berechnen und die Richtigkeit der Teilprodukte durch die bereits eingetragenen Differenzen (die sie noch einmal nachrechnen müssen) zu kontrollieren, wie z. B.

```
 493 | 21          85937 | 24          84799 | 14
-    | 23         -      | 3580       -      | 6057
 073 |             139   |             0079  |
-    |            -      |            -      |
  10 |             0193  |              099  |
                  -      |            -      |
                    0017 |               01  |
```

Abschließend sollte betont werden, dass der Sicherung des Einmaleins eine bedeutende Rolle zukommt, da „jede Maßnahme zur Sicherung des Einmaleins (...) natürlich zur Verminderung der Anzahl von Behaltefehlern (beiträgt) (Gerster, 1982a, S. 141).

4.3.2.5 Fehler beim Bestimmen des Teildividenden

In den Interviews stellte sich heraus, dass es einigen Schülern schwer fiel, den Teildividenden zu bestimmen. In der ersten Teildivision hatten sie keine Schwierigkeiten, da sie die Stellenanzahl des Divisors als Anhaltspunkt hatten (z. B. Zwei Ziffern hat der Divisor, zwei teile ich links vom Dividenden und sage…). Problematisch wurde es ab der zweiten Teildivision. Dies soll das nächste Beispiel verdeutlichen:

<table>
<tr>
<td>$\begin{array}{r|l} 832 & 4 \\ \cline{2-2} 032 & 200 \end{array}$</td>
<td>**Augustis**: Eine Ziffer hat der Dividend, eine teilen wir vom Dividenden ab, die 4 geht in die 8 zweimal. 2 mal 4, 8, 8 von 8, 0. Die 4 geht nicht in die 3…
I: Was machen wir nun?
Augustis: Wir machen…
I: …
Augustis: Wir sagen die 3 in die 13?
I: Woher nimmst du die 10?
Augustis: …
I: Mit welcher Zahl willst du jetzt arbeiten?
Augustis: Mit der 3.
I: Weißt du, was die 3 ist? Sind das Einer?
Augustis: Das sind Zehner.
I: Kannst du drei 10-Drachmenmünzen an 4 Kinder verteilen?
Augustis: Nein.
I: Was kannst du machen?
Augustis: Null (schreibt eine Null im Quotienten).
I: Wir holen auch die 2 runter. Die 4 geht nicht in die 2, also wieder 0 hier (im Quotienten).</td>
</tr>
</table>

Divisionen, in denen der Teildividend kleiner als der Divisor ist, sind für viele Schüler nicht lösbar und verwirren sie oft. Irritiert aus dem Verfahren der Subtraktion will dieser Schüler den Teildividenden (3) um einen Zehner erweitern („wir sagen die 3 in die 13“), so dass die Teildivision möglich ist. Durch Bezugnahme auf die Stellenwerte merkt der Schüler, dass diese Division „nicht geht“ und setzt eine Null im Quotienten. In der Folge holt er die nächste Ziffer herunter und erfasst sie getrennt als den neuen Teildividenden. Dabei berücksichtigt er nicht, dass in derselben Reihe bereits eine Ziffer (3) steht. Wahrscheinlich lässt er diese Ziffer aus, weil er mit ihr schon in der vorherigen Teildivision gearbeitet und auch die entsprechende Ziffer im Quotienten gesetzt hat. Daher sieht er nur die Notwendigkeit, mit der weiteren Ziffer zu arbeiten.

Dieses Fehlermuster trat in den Interviews nicht oft auf. Es erklärt jedoch die unverständliche Null im Quotienten trotz der Tatsache, dass der neue Teildividend größer als der Divisor ist. Nachdem der Schüler seine Rechnung beendet hat, bekam er von der Verfasserin Rechengeld, um diese Aufgabe enaktiv zu lösen und zu veranschaulichen und zugleich sein Ergebnis zu überprüfen.
Dem Schüler wurden acht 100er-Münzen, eine 20er-Münze, eine 10er-Münze und zwei 1er-Münzen gegeben. Daraufhin wurde er aufgefordert, diesen Betrag an vier imaginäre Schüler zu verteilen.

I: (Gibt das Geld). Kannst du das bitte mal zählen? Wieviel ist das insgesamt?
Augustis: 832.
I: So, wie kannst du dieses Geld jetzt gerecht an vier Kinder verteilen?
Augustis: (Legt erst eine und anschließend eine zweite 100er-Münze an vier Stellen, an denen er sich die einzelnen Schüler vorstellt).
I: Wieviel hat jeder bekommen?
Augustis: 200.
I: Wieviel hast du noch zu geben?
Augustis: 32.
I: Kannst du sie so verteilen?
Augustis: Nein.
I: Was musst du machen?
Augustis: Division.
I: Und wie machst du das?
Augustis: Jeweils 16?
I: Wieso 16?
Augustis: Weil 16 plus 16 ist 32.
I: Ja , aber wie viele Kinder hast du?
Augustis: 4…
I: Wie kannst du die 32 an 4 Kinder verteilen?
Augustis: Jeweils 6?
I: Kannst du mir das erklären?
Augustis: 4 mal 6, 24.
I: Du hast hier 24?
Augustis: Nein, 32. Ich gebe ihnen jeweils 5, 5 mal 4, 30…
I:…
Augustis: Nein, das macht 20…
I: Willst du vielleicht wechseln, dass du statt einen 20er zwei 10er bekommst?
Augustis: Ja. (Er bekommt zwei 10er-Münzen und gibt die 20er-Münze ab. Er verteilt an drei Schüler eine 10er-Münze und der vierte Schüler bekommt zwei 1er-Münzen).
I: Wieviel hat jetzt jeder?
Augustis: 10, 10, 10 und 2.
I: Ist das gerecht?
Augustis: …(Schüttelt den Kopf)…Es geht nicht.

Dieser Schüler ist bestimmt nicht der einzige, der Schwierigkeiten beim Legen einer Aufgabe mit Rechengeld hat. Er kommt nicht von alleine auf den Gedanken, das Geld zu wechseln, um die Verteilung zu ermöglichen. Er hat offensichtlich zu wenig Erfahrung im Umgang mit Geld und sieht die einzelnen Werte (10er-, 1er-Münzen) als unabhängig voneinander. Er versteht nicht, dass die größeren Klassen die kleineren beinhalten und dass er drei Zehner an 4 Kinder verteilen kann, indem er die Zehner in Einer verwandelt. Die Einsicht in das Stellenwertsystem ist hier nicht vorhanden. Sehr hilfreich wäre es hier, Beträge in ihren Stellenwerten zu analysieren und sie in allen möglichen Kombinationen mit Rechengeld zu legen. Zusätzlich können auch Aufgaben durchgeführt werden, in denen die einzelnen Stellenwerte erläutert werden und in Beziehung zueinander gebracht werden, Zahlen in Stellenwerttabellen eingetragen werden, wie z. B.:

a. 725 = 7H 2Z 5E
7H 25E
72Z 5E
725E

b. 70 Zehner = _______ Einer, 30 Zehner = _______ Hunderter,

c.

643	6H 4Z 3E	6 * 100 + 4 * 10 + 3 * 1
783		
890		
1002		

Bei all diesen Aufgaben ist es notwendig, dass die Schüler die Gelegenheit erhalten, die Beträge mit Rechengeld zu legen oder die Zahlen zeichnerisch darzustellen, um einen Einblick in die Größenordung der Stellenwerte zu bekommen. Nachdem die Stellenwerte geübt wurden, können die Schülern leichter verstehen, weshalb sie bei den Teildivisionen die Zahlen, die in einer Reihe stehen, als ganze Zahlen erfassen müssen. Man kann nicht 3 Zehner an 4 Kinder verteilen; dies ist erst möglich, wenn man die 3 Zehner in 30 Einer verwandelt.

4.3.2.6 Fehler mit der Null

Die Null war, wie erwartet, ein zusätzlicher Schwierigkeitsfaktor in der schriftlichen Division. Im Test wurden folgende systematische Fehler mit der Null festgestellt:

- Fehlen einer Zwischennull im Quotienten: der Teildividend ist kleiner als der Divisor, die nächste Ziffer des Dividenden wird heruntergeholt ohne das Notieren einer Null im Quotienten (*Fehlermuster* 0_1).
- Fehlen einer Endnull im Quotienten: Die letzte Ziffer des Dividenden ist eine Null. Diese wird heruntergeholt und weiterhin ignoriert. Auch hier wird keine Null im Quotienten notiert (*Fehlermuster* 0_3).
- Mehrere Nullen im Quotienten: Die Teildifferenz oder der Rest wird dividiert und daher erscheinen mehrere Nullen im Quotienten (*Fehlermuster* 0_2).

Fehlen einer Zwischennull im Quotienten
Dieselben Fehlermuster traten auch in den Interviews auf. Die nächsten Beispiele belegen das Fehlen einer Zwischennull im Quotienten:

362286 | 9 -36 | 4254 022 -18 048 -45 36 -36 00	(in der zweiten Teildivision) **Evangelia**: … Wir holen auch die 2 runter. Die 9 in die 2…geht nicht. Die 9 in die 22 (holt die nächste Ziffer herunter)…geht zweimal. 2 mal die 9, 18, von 22…4. Wir holen auch die 8 runter und sagen die 9 geht in die 48 fünfmal. 5 mal 9, 45, von 48, 3. Wir holen auch die 6 runter. Die 9 geht in die 36 viermal. 4 mal 9 ist 36, von 36, 0. **I**: Schön, ich wollte dich noch etwas fragen. Hier hattest du Rest 0, du holtest die 2 herunter und es ging nicht, was muss man dann machen? **Evangelia**: Wir müssen auch ein anderes, auch das andere herunterholen… **I**: Aha!
75665 | 37 -74 | 252 0166 -185 0815 -74 841	(in der zweiten Teildivision) **Christos**: …Wir holen die 6 runter und sagen die 37 geht in die 16 nicht, wir holen auch die andere 6 runter…die 37 geht in die 166…so oft wie die 3 in die 16…

In der ersten Aufgabe wird in der Tausenderspalte eine Ziffer heruntergeholt und diese Ziffer bildet auch den neuen Teildividenden (2), da die Teildivision in der vorhergehenden Spalte aufgeht. Dieser Teildividend ist kleiner als der Divisor und kann nach Meinung der Schülerin nicht dividiert werden („die 9 in die 2 …geht nicht“). Da es „nicht geht“, wird auch nichts weiter in die Staffel notiert, Evangelia sieht keinen Grund noch länger in dieser Spalte zu verbleiben. Sie holt also die nächste Ziffer des Dividenden herunter, wodurch ein größerer Teildividend (22) gebildet wird, der das Fortfahren der Division ermöglicht. Ähnlich geht auch Christos vor. Aus der ersten Teildivision ergibt sich eine kleine Teildifferenz. Mit dem Herunterholen der nächsten Ziffer entsteht der neue Teildividend (16), der immer noch kleiner als der Divisor (37) ist. Auch diese Teildivision „geht nicht“ und daher holt Christos noch eine Ziffer herunter, um an einen Teildividenden zu gelangen, der dividiert werden kann. Hier zeigt sich das gefährliche Motto deutlich: „Ich hole solange Ziffern herunter, bis es wieder geht“ (vgl. Gerster, 1989, S. 28). Beide merken jedoch nicht, dass in ihren Aufgaben eine Teildivision fehlt.

Fehlen einer Endnull im Quotienten
Außer den Zwischennullen fehlten in manchen Schülerlösungen auch Endnullen im Quotienten, wie das folgende Beispiele zeigt:

<table>
<tr>
<td>8600 : 4
-8   215
06
-4
20
-20
000</td>
<td>(in der dritten Teildivision)
Apostolos: Ich hole auch die andere Ziffer runter und sage die 4 in die 20 geht…
I: Was machst du, um das zu finden?
Apostolos: Multiplikation…(schreibt 20*4, kommt durcheinander und schweigt)…
I: Wie hast du ´s denn hier (bei der 8) gemacht?
Apostolos: Ich habe gesagt 1 mal die 4 ist 4, 2 mal die 4 ist 8, so…
I: Also was sagst du hier?
Apostolos: 1 mal 4, 4, 2 mal 4, 8, 3 mal 4, 12, …
I : Und dann ?
Apostolos: 4 mal 4 ist 24…
I: …
Apostolos: …oder…(schweigt)
I: Wieviel hast du gesagt ist 3 mal 4?
Apostolos: 12.
I: Und 4 mal 4, wie kannst du das finden?
Apostolos: …
I: Du musst noch mal 4 nehmen…
Apostolos:…16. 5 mal die 4 ist 20. Also 5 mal die 4, 20. 0 von 0, 0, 2 von 2, 0. Wir holen auch die andere Ziffer runter und sagen, die 0 in die 4, nein, geht die 4 in die 0? Geht nicht.
I: Und was heißt das? Kann man noch weiterrechnen?
Apostolos:…Nein!</td>
</tr>
</table>

Außer dass Apostolos beim Berechnen der zweiten Quotientenziffer durcheinander kommt (und dafür den Divisor mit dem Teildividenden multipliziert) und unsicher im Einmaleins ist, hat er auch Schwierigkeiten mit der Null. Im letzten Divisionsschritt holt er konsequent die letzte Ziffer des Dividenden, in diesem Fall die Null, herunter und sieht somit sein Verfahren als abgeschlossen. Wie viele Schüler hat auch er wahrscheinlich die Null mit „Nichts“ assoziiert. Mit Selbstverständlichkeit stellt er die rhetorische Frage „Geht die 4 in die 0? Geht nicht.“ Er denkt wohl: Da ich mit der Null nicht operieren - dividieren kann, brauche ich auch nichts im Quotienten zu schreiben. So legitimiert er seine Entscheidung. Dass er dadurch in der Einerspalte nicht dividiert hat und demzufolge in seiner Lösung eine Teildivision und in dem Quotienten eine Endnull fehlen, bleiben unbemerkt.

Mehrere Nullen im Quotienten
Im Gegensatz zu den vorhergehenden Fehlern steht das nachfolgende Fehlermuster. Hier werden zu viele Nullen oder falsche Nullen notiert.

<table>
<tr>
<td>13104 : 56 = 203~~5~~4
-112
0190
-168
0224
280
-224
00</td>
<td>Aris: Die 56 in die 13, nein, zwei Ziffern hat der Divisor, zwei teil’ ich vom Dividenden und sage die 56 geht in die 13 nicht, die 56 in die 131…
I: Wie findest du das?
Aris: Ich sage mal…2 mal…
I: Wie hast du die 2 gefunden?
Aris: Ich habe es nur so gesagt, ich probier mal…2 mal 6, 12, schreibe die 2, 1 der Übertrag, 2 mal 5, 10, plus 1, 11 (guckt sich das Teilprodukt an, ist sich bezüglich der Quotientenziffer nicht sicher).
I: Jetzt?
Aris:11, wir ziehen 2 ab, 9, 1 plus 1, 2. 3, ziehe 2 ab, 1, 1 von 1, 0. Wir holen auch die andere Ziffer runter. Die 19 geht in die 56 nicht, wir setzen eine Null im Quotienten. Wir setzen die Null und sagen die 56 geht in die 190…3 mal. 3 mal 6, 18, wir schreiben die 8, 1 der Übertrag, 3 mal 5, 15, plus 1, 16. 10, wir ziehen 8 ab, 2, 6 plus 1, 7. 9, wir ziehen 7 ab, 2. Wir setzen hier eine 0. Wir holen auch die andere Ziffer, die 4 runter und sagen die 56 geht in die 224 fünfmal. 5 mal 6…
I: Wieso 5?
Aris: Nur zur Probe, durch Zufall…5 mal 6…30 (ruft es laut), wir schreiben 0, 3 der Übertrag, 5 mal 5, 25, plus 3, 28 (bekommt 280). Hm…groß. Wir setzen die 4. 6 mal 4, 6 mal 4,…
I: 4 mal 6?
Aris: 4 mal 6, 24, wir schreiben die 4, 2 der Übertrag, 4 mal 5, 20 plus wie viel hatte ich noch? 20 plus 2, 22 (schreibt die Nullen der Subtraktion aus).
I: Ich wollte dich noch was fragen und dann sie wir fertig…Wann setzten wir eine Null hier, im Quotienten?
Aris: Wenn wir hier eine Null haben (zeigt den Dividenden) und das herunterholen…dann.
I: Muss diese Null am Ende oder auch in der Mitte der Zahl (Dividenden) stehen?
Aris: Auch in der Mitte.
I: Okay.</td>
</tr>
</table>

In diesem Beispiel führt Aris die erste Teildivision aus, erhält 19 als Teildifferenz und fährt fort, indem er die nächste Ziffer (0) herunterholt. Er arbeitet jedoch nicht sofort mit dem neuen Teildividenden. Folgt man seinen Kommentaren, sieht es so aus, als würde er wieder zum vorigen Teilschritt zurückkehren, die Teildifferenz dividieren und so eine Null im Quotienten setzen. In den nachfolgenden Teilschritten wird aber die Teildifferenz nicht mehr dividiert. Um zu erfahren, was er denkt und wie er vorgeht, stellte ihm die Verfasserin eine Frage bezogen auf die Null. Er interpretierte die Null im Quotienten durch die Aussage: „Wenn eine Null vom Dividenden heruntergeholt wird, wird eine Null im Quotienten gesetzt“. Es ist die Zahl Null, die den Schüler irritiert. In der nächsten Teildivision holt er nach der Subtraktion die nächste Ziffer des Dividenden herunter. Er erfasst dieses

Mal die heruntergeholte Ziffer mit der berechneten Teildifferenz richtig als ganze Zahl, die den neuen Teildividenden bildet. Dies gelingt ihm jedoch nicht in der vorhergehenden Teildivision mit der Null. Wahrscheinlich wurde im Unterricht die Endnull im Dividenden thematisiert (und wie man vorgeht, wenn die vorhergehende Teildivision aufgeht). Dies hat der Schüler missverstanden, es auf jede Null des Dividenden übertragen und wendet es seither falsch an.
Eine weitere Variation des Fehlermusters „Mehrere Nullen im Quotienten" liefern nachfolgende Berechnungen:

493 | 21 -42 | 230 073 -63 10	**Pelagia**: Zwei Ziffern hat der Divisor, zwei teilen wir links vom Dividenden und sagen die 21 geht in die 49 so oft wie die 2 in die 4 geht. Die 2 geht in die 4 zweimal. 1 mal 2, 2, 2 mal 2, 4. 2 von 9, hm…7. 4 von 4, 0. Die 21 geht nicht in die 7, wir holen auch die nächste Ziffer herunter. Die 21 geht in die 73 so oft wie die 2 in die 7, die 2 geht in die 7 dreimal. 1 mal 3, 3, 2 mal 3, 6. 3 von 3, 0, 6 von 7, 1. Die 21 geht in die 10 nicht , 0 im Quotienten. **I**: Bist du fertig? **Pelagia**: Ja.

Diese Aufgabe ist richtig bis auf den letzten Schritt. In der zweiten Teildivision erhält die Schülerin eine 10 als Rest. Statt an dieser Stelle aufzuhören, dividiert sie zusätzlich den Rest und setzt dadurch eine Null im Quotienten, ohne zu merken, dass sie in dieser Stellenwertspalte bereits dividiert hat. Viele Schüler werden in der schriftlichen Division durch das Verbleiben von Rest in der letzten Teildivision verunsichert. Sie denken, dass noch ein Rechenschritt fehlt. Ihnen wäre es angenehmer, wenn die Division aufginge. Ist das nicht der Fall, ziehen sie es vor, den Rest „vorsichtshalber" zu dividieren und können dann mit „erleichtertem Gewissen" das Verfahren abschließen.

In den zwei letzten Beispielen haben die Schüler zunächst die Teildifferenz und dann den Rest dividiert, so dass jedes Mal zusätzliche Nullen im Quotienten notiert wurden. Es gab jedoch auch Schüler, die beide Fehlermuster kombiniert machten, wie Ioanna:

8600 | 4 -8 | 201050 06 -4 20 -20 00	**Ioanna**: Die 4 in die 8 ist 2. 2 mal 4, 8 und wir subtrahieren es von der 8, 0. Die 4 geht nicht in die 0, wir schreiben hier (im Quotienten) eine Null und holen die 6 runter. Die 4 geht in die 6 einmal. 1 mal 4, 4, 4 von 6, 2. Die 4 geht in die 2 nicht wir schreiben 0 (im Quotienten). Wir holen auch die 0 runter. Die 4 geht in die 20 fünfmal. 4 mal 5, 20, minus 20, 0. Die 4 geht in die 0 nicht, wir schreiben…0, hm…ich habe einen Fehler gemacht… **I**: Wo? **Ioanna**: Es ist sehr viel rausgekommen… **I**: Eine zu große Zahl? **Ioanna**: Ja. **I**: Willst du etwas korrigieren? **Ioanna**: …ich weiß nicht, nein, ich lasse es so.

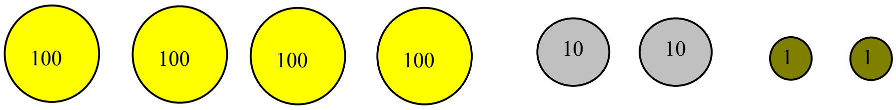
Diese Schülerin dividiert konsequent in jeder Stellenwertspalte mit dem richtigen Ergebnis, doch sie dividiert auch zusätzlich das Ergebnis jeder Subtraktion. D. h. sie dividiert alle Teildifferenzen und auch den endgültigen Rest. Dies hat zur Folge, dass ein Quotient entsteht, der um zwei Stellen sogar größer als der Dividend ist. Dass diese Größenordnung nicht stimmen kann, bemerkt sie selbst auch. Sie ist sich sicher, dass sie einen Fehler gemacht hat, beschließt jedoch die Lösung so stehen zu lassen, da sie wahrscheinlich die Ursache dieser Kuriosität nicht begreifen kann.

Aus den oben vorgestellten Beispielen geht hervor, dass die Schüler oft zusätzliche oder zu wenige Nullen im Quotienten notieren. Fehlende Nullen entstehen zunächst, wenn der Teildividend kleiner als der Divisor ist und der Schüler in diesen Fällen eine weitere Ziffer vom Dividenden herunterholt, ohne die entsprechende Null im Quotienten zu notieren. Des Weiteren fehlt eine Null im Quotienten, wenn der Schüler die Endnull des Dividenden herunterholt, diese jedoch nicht dividiert und dadurch keine Null im Quotienten setzt. In beiden Fällen fehlt eine Teildivision in der Divisionsstaffel und die dazugehörige Quotientenziffer. Zusätzliche Nullen im Quotienten ergeben sich aus dem Dividieren der Teildifferenz, des Restes oder auch aus dem Herunterholen einer Null und dem automatischem Übertragen der Null im Quotienten. Durch diese Fehlermuster erhält das Ergebnis der schriftlichen Division eine falsche Größenordnung. Die Tatsache, dass die Schüler dies nicht bemerken, zeigt, dass sie keine Vorstellungen von der Größenordnung des Quotienten haben, dass sie das Rechnen mit der Null irritiert und dass sie die stellenwertbelegende Rolle der Null nicht kennen bzw. nicht beachten.

Zunächst ist es notwendig, dass die Schüler die falsche Größenordnung der Quotientenziffern, die durch Fehler mit der Null entstehen, begreifen. Diese Fehlermuster können an einer überschaubaren Aufgabe bewusst gemacht werden. Durch das Rechnen einer Divisionsaufgabe und das Legen derselben Aufgabe mit Rechengeld können bei den Schülern kognitive Konflikte erzeugt werden, die sie anregen sollen, ihre Rechenschritte zu überdenken und nach möglichen Versäumnissen zu suchen. Dieser Versuch wurde auch von der Verfasserin während der Interviews vorgenommen. Schülern, die bereits im Test fehlerhaft mit der Null umgingen, wurde im Interview eine Divisionsaufgabe gegeben, die von ihrer Größenordnung her überschaubar war. Nach dem Ausrechen der Aufgabe wurden die Schüler aufgefordert, die Aufgabe mit Rechengeld zu legen und die Ergebnisse beider Aufgabe zu vergleichen. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen:

422 | 4 -4 | 1050 022 -20 02	Pelagia wurde zunächst die Aufgabe 422:4 gegeben, die sie berechnen sollte. Dabei ging sie wie folgt vor: **Pelagia**: Eine Ziffer hat der Divisor, eine teile ich links vom Dividenden und sage die 4 geht in die 4 einmal. 1 mal 4, 4, von 4, 0. Die 4 geht nicht in die 0, wir holen auch die andere Ziffer runter. Die 4 in die 2,… geht nicht, wir ho…, hm, 0 im Quotienten. Wir holen auch die andere Ziffer runter. Die 4 geht in die 22, …fünfmal. 4 mal 5, 20. 0 von 2, 2. 2 von 2, 0. Die 4 geht nicht in die 2, 0 (im Quotienten).

Nun bekommt Pelagia vier 100er-Münzen, zwei 10er-Münzen und zwei 1er-Münzen.



I: Nun, wieviel habe ich dir gegeben?
Pelagia: 422.
I: Gut. Kannst du das an 4 Kinder verteilen?
Pelagia: Ja. Einen Hunderter hier…(legt an vier Stellen jeweils eine 100er-Münze).
I: Wieviel hast du noch?
Pelagia: Noch 40.
I: …
Pelagia: Ach, nein,… 22.
I: Ja.
Pelagia:…
I: Die müssen wir jetzt auch verteilen.
Pelagia: (gibt jeweils eine 10er-Münze an zwei imaginären Schülern).
I: Ist das gerecht?
Pelagia: Nein.
I: …
Pelagia: Jeder 20?
I: Wir haben aber insgesamt 22 und möchten sie an 4 Kinder verteilen!
Pelagia: Hm…(schweigt)…
I: Was würdest du tun, wenn du 20 hättest?
Pelagia: Ich würde die in 5 teilen.
I: Schön. Jetzt hast du 22…
Pelagia: …
I: Wenn ich dir den Zehner in zwei Fünfer wechsle…hilft dir das weiter?
Pelagia: Ja. (Gibt die zwei 5er-Münzen einem Kind).
I: Stimmt das jetzt?
Pelagia: …Ich brauch noch zwei Fünfer.
I: Okay (auch die zweite 10er-Münze wird gegen zwei 5er-Münzen gewechselt).
Pelagia: (Gibt die zwei 5er-Münzen einem anderen Schüler, so dass zwei Schüler jeweils 10 Drachmen haben).
I: Hast du das so gerecht verteilt?
Pelagia: …nein, …(gibt jedem eine 5er-Münze).
I: Wieviel hat jetzt jeder?
Pelagia: 105.
I: Und wie viel hast du übrig?
Pelagia: 2.
I: Kannst du sie auch verteilen?
Pelagia: Ja.
I: Wie?
Pelagia: …Nein.
I: Wieviel hattest du am Anfang?
Pelagia: 422.
I: Und wie viel hat jeder bekommen?
Pelagia: 105.
An dieser Stelle wird noch einmal die von ihr errechnete Division hervorgeholt.
I: Vorhin hast du diese Aufgabe berechnet und das gefunden. Ist diese Rechnung richtig?
Pelagia: Nein.

I: Wieso?
Pelagia: …(schweigt)…
I: Welches von beiden ist das richtige?
Pelagia: Das (zeigt auf das Rechengeld).
I: Bist du sicher?
Pelagia: …

Pelagia konnte zwar die Aufgabe (trotz Fehler mit der Null) schriftlich durchführen, hatte aber Schwierigkeiten beim Handlungsvollzug mit konkretem Material, hier mit Rechengeld. Ihr fällt es schwer, einen Betrag zu verteilen, der sich nicht direkt aus einer Einmaleinsaufgabe ableiten lässt. Sie kommt von alleine nicht auf den Gedanken, das Geld zu wechseln, um es verteilen zu können. Das zeigt, dass sie nicht die Gelegenheit hatte, das Legen von Beträgen in verschiedenen Kombinationen oft zu üben, um einzusehen, dass derselbe Betrag unterschiedlich ausgezahlt oder gelegt werden kann. Die nötigen Handlungen (Zerlegungen und Wechseln von Rechengeld), die Einsicht in die mathematische Struktur des Problems ermöglichen würden, wurden nicht ausreichend trainiert und daher nicht verinnerlicht. Infolgedessen bleibt der Vorstellungsraum der Schülerin sehr beschränkt, sie kann sich die nötigen weiteren Umwandlungen nicht vorstellen und bleibt an dem Geld fixiert, das ihr zu Beginn gegeben wurde. Nur mit den Hinweisen der Verfasserin gelangt sie zur Lösung. Aus dem Legen der Aufgabe wurde jedoch das erreicht, was die Verfasserin beabsichtigte, nämlich das Bewusstmachen, dass das Ergebnis der schriftlichen Division falsch ist. Zwar konnte die Schülerin ihren Fehler nicht lokalisieren, sie war jedoch vom richtigen Ergebnis überzeugt.

Nachdem die Schüler ihre Fehler nachvollzogen haben, können weitere Hilfen angeboten werden, um dem Auftreten von Fehlern vorzubeugen. Es ist sehr wichtig, dass *Sprechweisen* wie „die 7 geht nicht in die 3“ vermieden werden. Diese Ausdrücke verleiten dazu, die Teildivision als nicht durchführbar einzustufen und ohne jegliche Reaktion fortzufahren. Man sollte daher den Schülern vermitteln, die Sprechweise „die 7 geht in die 3 nullmal“ anzuwenden. Hierdurch wird die Wahrscheinlichkeit gesteigert, dass im Quotienten die entsprechende Null notiert wird und so verringert sich die Gefahr, dass Ziffern des Quotienten falsche Stellenwerte annehmen (vgl. Gerster, 1989, S. 29).

Sehr hilfreich ist *das Bestimmen der Stellenzahl des Quotienten,* was an anderer Stelle bereits erwähnt wurde (siehe S. 200). Vor dem Ausrechnen der Aufgabe kann der Schüler Gewissheit über die Größenordnung des Quotienten erlangen. Dadurch wird nicht nur Fehlern mit der Null, sondern auch anderen Fehlern (mehrmaliges Dividieren in derselben Stellenwertspalte, dadurch mehrere Ziffern im Quotienten) vorgebeugt. Beim ersten Schritt bestimmt man den Teildividenden, jede weitere Ziffer des Dividenden liefert eine weitere Ziffer im Quotienten. Wenn man zusätzlich auch die erste Quotientenziffer bestimmt, erhält man zugleich eine Überschlagstechnik für die Divisionsaufgabe (Gerster, 1982a, S. 195):

$\underline{86}54 : 36 = \_\ \_\ \_$, also ≈ 200

$\underline{18}0900 : 36 = \_\ \_\ \_\ \_$, also ≈ 5000

Die Berechnung der Anzahl des Quotienten und der ersten Ziffer des Ergebnisses kann in dieser Form auch getrennt in einzelnen Aufgaben geübt werden.

Die Tatsache, dass viele Schüler das Rechnen mit der Null ignorieren, hängt mit den falschen Vorstellungen zusammen, die sie von dieser Zahl haben. „Führt man die Null als Kardinalzahl der leeren Menge ein, gerät sie in gefährliche Nähe zum schwer vorstellbaren Nichts“ (Gerster, 1989, S. 29). Da das Operieren (Addieren bzw. Subtrahieren) mit der Null wie ein „Nichtstun“ aussieht, führt es zu der falschen Vorstellung, dass es auch keine Lösung haben kann oder dass sich die Null beim Rechnen stets neutral verhalte (4+0=4, 4*0=4, usw.). Deshalb sollte man die Null als eine Zahl einführen, mit der man rechnen kann und die als Rechenergebnis auftreten kann und durch operativen Aufgabenreihen das Rechnen mit der Null stützen:

5 – 0 =	6 + 2 =	0 + 1 =	0 * 5 =
5 – 1 =	5 + 3 =	0 + 2 =	0 * 4 =
5 – 2 =	4 + 3 =	0 + 3 =	0 * 3 =
5 – 3 =	3 + 3 =	0 + 4 =	0 * 2 =
5 – 4 =	2 + 3 =	0 + 5 =	0 * 1 =
5 – 5 =	1 + 3 =		0 * 0 =
	0 + 3 =		

Zusätzliche oder fehlende Nullen im Quotienten können vermieden werden, wenn die Schüler ein sicheres Stellenwertverständnis entwickeln. Dazu wäre es ratsam, die Divisionsstaffel in eine *Stellenwerttafel zu übertragen und ausführlich zu schreiben*, d. h. auch die Teilprodukte mit der Null sollten notiert werden.

ZT	T	H	Z	E				T	H	Z	E
2	5	5	4	9	:	17	=	1	5	0	2
1	7										
0	8	5									
	8	5									
	0	0	4								
		0	0								
		0	4	9							
			3	4							
			1	5							

Hier ist ersichtlich, dass für jede Staffel eine Quotientenziffer steht, was auch mit Pfeilen verdeutlicht werden kann. Die Kurzform der Division sollte nie zu früh eingeführt werden, erst dann, wenn die Anzahl der Quotientenziffern durch die oben skizzierte Methode gesichert ist. Durch diese Darstellung kann leichter Einsicht in die stellenwertbelegende Rolle der Null gewonnen werden.

4.3.2.7 Fehler im Verfahren der Division

Bereits bei der Durchführung des diagnostischen Tests wurden Schüler beobachtet, die mit den gestellten Divisionsaufgaben wenig anfangen konnten. Manche von ihnen gaben die Testblätter ab, ohne (außer ihrem Namen) etwas darauf zu schreiben, andere schafften den ersten oder auch den zweiten Teilschritt und wussten dann nicht weiter. Diese Testblätter ließen nur das Nichtbeherrschen des Divisionskalküls feststellen, was sich für einige Schüler während der Interviewphase bestätigte. Die beobachteten Fehlermuster im Verfahren der Division lassen sich in folgende Kategorien einteilen:

- Beherrschen des ersten bis zweiten Teilschrittes der Division (*Fehlermuster* V_2)
- Beherrschen des Verfahrens mit einstelligem Divisor und Übertragung des Lösungsverfahrens auf Aufgaben mit zweistelligem Divisor (*Fehlermuster* V_1)
- Unkenntnis des Verfahrens der schriftlichen Division (*Fehlermuster* V_2)

Zunächst wird Marias Berechnung präsentiert, als Beispiel für das Beherrschen lediglich des ersten Teilschrittes der Division.

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>8600
-8
0600
+4</td><td>4
2</td></tr>
</table>
</td>
<td>
Maria: Die 4 geht in die 8 zweimal.
I: Mmh…
Maria: Hm, 2 mal die 4, 8. 8, ziehe ab 8, 0.
I: Schön. Jetzt?
Maria:…
I: Jetzt bist du mit der 8 fertig…(keine Reaktion von der Schülerin)…was nimmst du jetzt?
Maria: Jetzt hole ich die 6 runter…
I: Gut!
Maria: (holt alle übrigen Ziffern des Dividenden runter)
I: Alle?
Maria: Ja.
I: Und was sagen wir nun?
Maria:…wir sagen die…müssen wir jetzt die 4 addieren?
I: Wir wollten aber dividieren…
Maria: Wir dividieren…mit der 4?
I: Wie machst du das?
Maria: Wie schreiben die 4 hier (unter der 6).
I: Kannst du mir das erklären?
Maria: …oder soll ich sie da (im Quotienten) schreiben?
I: Mach es so wie du meinst…
Maria: (schreibt ein Pluszeichen) werden wir addieren? (zieht den Strich unter der 4)…wir fragen ob die 2, …nein, ob die 8 in die 6 passt…ich bin durcheinander…
</td>
</tr>
</table>

An dieser Stelle wurde die Aufgabenbearbeitung unterbrochen. Maria gehörte zu den Schülern, die nach dem ersten Teilschritt mit der Division nicht fortfahren konnten. Auf die Schwierigkeit des schriftlichen Dividierens wurde schon unter 4.2.1 eingegangen. Es handelt sich um eine Rechenoperation, die verschiedene Teilfertigkeiten und Rechenschritte voraussetzt. Diese Schülerin hat sich den ersten Teilschritt eingeprägt, den sie wahrscheinlich im Unterricht sehr oft mitverfolgt hat. Ihre mathematischen Kenntnisse reichten jedoch in der Folge nicht aus, um auch die nachfolgenden Schritte erfolgreich bzw. überhaupt durchführen zu können. Ihr ist bewusst, dass sie weitere Ziffern herunterholen muss, um mit ihnen zu arbeiten und dass weitere Rechenverfahren involviert sind. Welche Rechenverfahren es sind und wo die jeweiligen Zahlen notiert werden müssen, ist ihr unbekannt. So bleibt der weitere Vorgang für sie ein Rätsel, den sie durch Raten zu lösen versucht.

Es gab aber auch Schüler, die in den Divisionsaufgaben mit zweistelligem Divisor die eine Ziffer des Dividenden ignorierten und genauso vorgingen, wie es in der schriftlichen Division mit einstelligem Divisor üblich ist. Dies war der Fall in Charas Rechnungen:

<table>
<tr>
<td>$\begin{array}{r|l} 191 & 44 \\ \underline{-16} & \overline{40} \\ 031 & \end{array}$</td>
<td>Chara: Zwei Ziffern hat der Divisor, zwei teilen wir vom Dividenden und sagen die 44 geht in die 19 nicht. Wir nehmen auch die nächste Ziffer und sagen die 44 geht in die 191 so oft wie die 4 in die 19…3 mal 4 ist 12, 4 mal 4 ist 16…hm…viermal. 4 mal 4 ist 16, von 19…2,…hm…3.
Wir holen auch die andere Ziffer runter (hier nimmt sie die 1 ein zweites Mal) und sagen die 44 geht in die 31 so oft wie die 4 in die 3…ach, es geht nicht (guckt die Verfasserin fragend an)…
I: Ich weiß nicht, was meinst du denn?
Chara: Es geht nicht, 0 im Quotienten.
I: Kannst du mir sagen wie du die 16 gefunden hast?
Chara: 4 mal 4, hier…
I: Hier steht aber … eine 4 ? Welche Zahl ist das?
Chara: 44, aber wir nehmen nur die (die erste 4)…
I: Wieso?
Chara:…Damit wir das rechnen…</td>
</tr>
</table>

Chara hat im Interview vor dieser Aufgabe eine Divisionsaufgabe mit einstelligem Divisor bearbeitet. Das Verfahren beherrschte sie, Schwierigkeiten hatte sie beim Einmaleins und außerdem setzte sie keine 0 im Quotienten, als der Teildividend kleiner als der Divisor war, sondern holte sofort die nächste Ziffer herunter. In dieser Aufgabe wird auch das Überschlagen nach den führenden Ziffern durchgeführt und in der Folge wird die ausgelassene Einerziffer nicht mehr für das Lösungsverfahren berücksichtigt. Für die Berechung der Teilprodukte wird nur die Zehnerstelle in Betracht gezogen und das Verfahren wird so ausgeführt, als hätte man einen einstelligen Divisor. Ähnliche Lösungen waren besonders in den Tests zu sehen. In den Interviews waren es nur zwei Schüler, die so vorgegangen sind. Hier wurde entweder die Überschlagstechnik missverstanden, demzufolge der zweistellige Divisor willkürlich auf einen einstelligen gekürzt und so für die weitere Aufgabenbearbeitung beibehalten (wie im vorigen Beispiel), oder die Schüler wussten nicht, wie sie mit einem zweistelligen Divisor arbeiten sollen und suchten sich nur eine Ziffer des Divisors aus. Mal war dies die erste, mal die letzte Ziffer.

Den Schülern, die die Überschlagstechnik missverstanden haben, muss verdeutlicht werden, dass das Überschlagen einzig die Funktion hat, ihnen zu helfen, die geeignete Quotientenziffer zu finden und sie vor langem Suchen zu bewahren. Den Divisor muss man aber für die Lösung der Aufgabe als ganze Zahl erfassen und mit allen seinen Ziffern arbeiten. Dazu können Divisionssituationen (Aufteilen oder Verteilen) in der Klasse konkret (mit Rechengeld oder Gegenständen) veranschaulicht werden. Auf diese Weise können die

Schüler den Unterschied zwischen dem Verteilen eines Betrags an 2 Schüler und anschließend dem Verteilen desselben Betrags an 23 Schüler an den Ergebnissen erkennen.

Schüler, die Schwierigkeiten im Verfahren mit einem zweistelligem Divisor haben, sollte man darauf hinweisen, dass dabei die gleiche Schrittfolge durchlaufen wird, wie beim Verfahren mit einstelligem Divisor: „Bestimmen des (Teil)-Dividenden – überschlagsmäßiges Dividieren – Multiplizieren – Subtrahieren“ (Lorenz, 1983, S. 49). Es wäre sinnvoll, das Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator getrennt zu üben, um den Schülern das Multiplizieren im Divisionskalkül (Quotientenziffer * Divisor) einsichtiger zu machen.

Darüber hinaus gab es einige Schüler, die fast keine Divisionskenntnisse besaßen. Einen extremen Fall liefert das nächste Beispiel mit Theofania:

$\begin{array}{r} 2.310 \\ \underline{-9} \end{array}$	**I**: Schreibst du bitte 2310 durch 9? **Theofania**: (schreibt 2310 minus 9 und das nicht stellengerecht untereinander). **I**: Wie heißt denn dieses Zeichen? **Theofania**: Wir werden sie wegnehmen…

I: Ja, wie heißt diese Operation?
Theofania: Hm…Subtraktion…Subtraktion?…hm, nein, Addition hei…Subtraktion…
I: Mmh…Ich meinte aber „durch“. Weißt du, wie man dieses „durch“ schreibt?
Theofania: …(schweigt)…
I: Ist es vielleicht so (zeichnet einen senkrechten Strich nebenan)?…
Theofania: Ja.
I: Kannst du weitermachen?
Theofania: Also, wir machen so einen Strich und …(schweigt wieder)…
I: Ich zeig dir das…(schreibt die Division auf)…Kannst du mir sagen, was wir jetzt sagen müssen?
Theofania: 9 mal die 2 macht…(schweigt)…
I: Hast du ´s ein bisschen vergessen?
Theofania: Bisschen, ja.
I: Wenn ich dir etwas helfe und sage, du musst erst sehen, ob die 9 in die 2 passt …?
Theofania: Ja,…(scheint nachzudenken)…nein…
I: Sag mir, was du denkst, vielleicht ist es richtig…
Theofania: 3 mal…nein, wir nehmen erst die 3, dann die 9 und zuletzt die 2.
I: Gut, mach es.
Theofania: 9 mal die 3…
I: Weißt du wie viel 2 mal die 9 ist?
Theofania:…
I: 1 mal die 9?…
Theofania: 9.
I: Und wie finde ich jetzt 2 mal die 9?
Theofania:…

Bei dieser Schülerin ist offensichtlich, dass sie nicht nur das Symbol der Division nicht kennt, sondern auch nicht weiß, worum es in der Division geht. Bei ihr und auch bei den anderen drei Schülern, die außer dem ersten Teilschritt der Division nicht mehr weiter wussten, konnten die Hinweise der Verfasserin nicht als Hilfeleistungen angenommen werden. Die Antworten dieser Schüler zeigen, dass es sich nicht nur um eine Wissenslücke handelt, sondern dass sich ihre Schwächen auf Rechenoperationen beziehen, die im Unterricht vor der Division behandelt wurden und die nun für die Durchführung der Division vorausgesetzt werden. Ihre Einmaleinskenntnisse reichten bis maximal zu den drei ersten Einmaleinssätzen einiger Reihen. Weitere Einmaleinsergebnisse konnten sie nicht ableiten. Auch die anderen Operationen waren problematisch. Für Additionen und Subtraktionen im Zehnerraum brauchten sie sehr lange und rechneten immer mit den Fingern. Es ist anzunehmen, dass die Schüler, lange bevor ihre Lehrer in der Klasse die Division vorstellten, den Anschluss an die Rechenoperationen und an die Arithmetik verloren hatten. Sie gehören zu den Kindern, deren eigenes Lerntempo nicht erlaubte, bei dem Unterricht mitzuhalten. So wurden fundamentale Kenntnisse, auf denen die weiteren mathematischen Einheiten basieren, nicht rechtzeitig erworben. Die entstandenen Lücken haben sich mit der Einführung von neuen Inhalten vergrößert und führten zu massiven Lernschwierigkeiten und zum Verlust des Anschlusses an die Klassengemeinschaft.

Jeder einzelne Schüler, der Schwierigkeiten mit dem Verfahren der Division hatte, bildete einen Sonderfall für sich. Die jeweiligen Schwächen wurden an unterschiedlichen Stellen lokalisiert. Das, was die Schüler jedoch gemeinsam hatten, waren die spärlichen und bruchstückhaften Divisionskenntnisse. Sie konnten diese nicht zu einem Ganzen zusammensetzen, so dass Konfusion herrschte. Sie waren völlig orientierungslos und wussten nicht, mit welchen Ziffern sie arbeiten sollten, was sie dabei aussprechen sollten, wo sie was aufschreiben sollten. Durch Raten versuchten sie die weiteren Schritte herauszufinden, was ihnen nicht gelang. Bei keiner ihrer Antworten waren sie sich sicher. Sie antworteten fragend und waren bereit, jederzeit das Gesagte zurücknehmen und andere Vorschläge zu übernehmen.

In solchen Fällen muss der Wissensstand der Schüler ermittelt werden, um die Kinder dort abzuholen, wo sie bereits stehen. Dabei wäre es ratsam, die Vorkenntnisse der Schüler bezogen auf das Zahlenverständnis und die einzelnen Rechenoperationen zu eruieren. Nicht die Defizite, sondern der Förderbedarf der Schüler muss zielgerichtet festgestellt und entsprechende Maßnahmen geplant werden. Die Kinder sollten lernen, sich selbst kritisch und sachlich einzuschätzen, indem sie ihre Stärken und Schwächen erkennen (vgl. Lockstaedt-Schäffler, 1993, S. 29). Von ihren Stärken ausgehend (bzw. von ihrem Wissen) muss ihnen geholfen werden, ihre Schwächen (bzw. ihre Lücken) zu kompensieren. Auf diese Weise können sie Verantwortung für ihr Lernen übernehmen und zu einem selbstständigen Arbeiten angeleitet werden. Sie müssen Gelegenheit erhalten, das, was ihnen fehlt, einzuüben. Diese Kinder können sich nicht selbst helfen, da sie nicht wissen, wie sie es tun sollten. Sie haben dringend Hilfe nötig, die nur der Klassenlehrer oder der Förderlehrer anbieten kann. Das zeigte sich auch in den Interviews. Obwohl sie sich ihrer Lücken und Schwächen bewusst waren, wollten sie in den Interviews etwas sagen, sie wollten nicht den Eindruck geben, dass sie nichts zu äußern haben. Allein die Tatsache, dass sie nicht aufgaben und auch keine abwehrende Haltung gegenüber Mathematik nahmen, zeigt ihr Interesse. In der nächsten Phase der Untersuchung sollen im Rahmen eines Förderunterrichts Verfahren erprobt werden, die betreffenden Schüler an das Niveau des Klassenunterrichts heranzuführen.

4.3.2.8 Neue Strategien der Schüler

Die Auswertung der Interviews ergab einige neue Befunde. Hier ist insbesondere die Anwendung von Strategien hervorzuheben, die weder im Schulbuch enthalten sind, noch im Unterricht thematisiert wurden. Die Schüler, die diese neue Techniken benutzten, stammen aus verschiedenen Schulen und wurden von unterschiedlichen Lehrern unterrichtet. Auf die Frage der Interviewerin, wie sie auf diese Gedanken kamen, antworteten die Schüler mit Stolz, dass sie sich das selber ausgedacht hätten. Sie entsprangen also ihrer „mathematischen Intuition und Kreativität“ und sind eigene Erfindungen. Diese Entdeckungen entstanden, als die Schüler versuchten, den unterrichteten Stoff ihrem mathematischen Verständnis anzupassen. Hierzu durchsuchten sie ihre vorhandenen Kenntnisse, organisierten sie um und verknüpften sie logisch, um daraus selbstständig Wissen zu erschließen.

Abschnitte aus den Interviews, in denen diese neuen Strategien zu erkennen sind, werden in diesem Teil der Arbeit vorgestellt. Neben den Namen jeden Schülers wird die Anzahl der Fehler (F) und die Anzahl der ungelösten Aufgaben (Un) in seinem Test angegeben. Nicht der ganze Dialog und die ganze Division werden wiedergegeben, sondern nur die Ausschnitte, in denen die innovativen Gedanken des Schülers zu betrachten sind. In den 46 Interviews, die durchgeführt wurden, kann man sechs Situationen unterscheiden, in denen neue Strategien benutzt werden. In fünf Fällen handelt es sich um die Rechenoperation der Subtraktion und im sechsten Fall um die Berechnung der Quotientenziffer. Für ausländische Leser mögen diese Strategien nichts Neues oder Unbekanntes beinhalten, für die griechischen Verhältnisse stellen sie jedoch eine Innovation dar, da sie an keiner Stelle des Lehrbuches vorgestellt werden.

4.3.2.8.1 Erster Fall

Michalis (F=1, Un=0)

2430 | 18 -18 | 1~~54~~3~~6~~5 63 *90* *72* -54 090 *108* -90 00	(in der ersten Subtraktion) **I**: Die Subtraktion 8 von 14, wie hast du sie gemacht? **Michalis**: Ich habe gedacht 8 plus 5 macht 13, also ist 8 plus 6, 14, d. h. eins mehr. Wenn wir die 8 von der 14 abziehen, bleibt uns die 6. **I**: Wieso beginnst du mit 8 plus 5? **Michalis**: Ich weiß nicht... Ich weiß halt in meinem Gedächtnis, dass 8 plus 5, 13 ist, also addiere ich eins dazu... **I**: In der zweiten Subtraktion hast du gesagt, 4 von 13 ist 9. Wie hast du das ausgerechnet? Ich habe gesehen, dass du nachgedacht hast. **Michalis**: ...9 plus 4 macht 13...wenn es 10 plus 4 wäre, würden wir 14 bekommen... also jede Zahl, die wir zu 9 addieren, gibt eine Zahl direkt darunter.

Gefragt ist in der ersten Subtraktion der Rest der Aufgabe 14-8= _. Der übliche Rechenweg wäre das Rückwärtszählen weder mit noch ohne Halt an der Zehn. Unser Schüler vermeidet die Subtraktion und wählt statt dessen die Addition mit einem fehlenden Summanden. Diese Operation wird ihn mit weniger Mühe und größerer Sicherheit zur erwünschten Zahl führen. Gesucht wird also die Ergänzung der Acht bis zur Vierzehn und die Aufgabe lautet 8+_=14. Um diese Ergänzungsaufgabe auszurechnen, vermeidet er das Vorwärtszählen und beginnt von der ihm bekannten Summe 8+5=13. Um an die Vierzehn zu kommen, muss er den zweiten Summanden um eins vergrößern (von Fünf zur Sechs). Auch in der zweiten Subtraktion wird anstelle des Rückwärtszählens von der Dreizehn bis zur Vier die Addition gewählt. Gefragt ist hier auch der zweite Summand der Aufgabe 4+_=13, die Ergänzungszahl der Vier bis zur Dreizehn. Automatisch denkt er sich, dass sich bei der Addition einer Einerzahl zur Zehn die Einer nicht verändern, mit der Neun sich diese jedoch um eins verkleinern. Die Drei ist um eine Einheit kleiner als die Vier, also ist der zweite Summand die Neun.

Beide Subtraktionsaufgaben verwandelt der Schüler in Ergänzungsaufgaben, was die Ansicht bestätigt, dass die meisten Schüler eine Vorliebe für additive Vorgehensweisen haben. Im ersten Fall wird eine **bestimmte Summe** (8+5), deren Ergebnis dem Schüler bekannt ist, **als Rechenstütze** genutzt, um eine benachbarte Summe (8+6) auszurechnen. Die Nachbaraufgaben werden in Beziehung zueinander gesetzt, die systematische Betrachtung dieser verhilft zum fehlerfreien und schnellen Erreichen des Ergebnisses. Ähnlich ist es auch im zweiten Fall. Hier wird als Ausgangspunkt das leichtere Operieren (hier das Addieren) mit der Zehn genommen. In Anlehnung daran gelangt der Schüler zu dem Fazit, dass das Addieren zur Nachbarzahl **Neun** um eins kleinere Ergebnisse als mit der Zehn ergibt. Diese Feststellung nutzt er dann entsprechend aus.

Der Schüler stützt sich auf vorherige Kenntnisse, nutzt die Umkehrbarkeit der Operationen Addition und Subtraktion, hat die Strukturbeziehungen zwischen ihnen vertieft und bringt die Aufgaben und deren Ergebnisse in einen Zusammenhang. Er vermeidet schwierige Rechnungen und zieht es vor, sichere und mühelose Wege zu gehen. Die Strategien, die er anwendet, sind sehr gut durchdacht und unterliegen einer Systematik, was darauf hindeutet, dass er den Lehrstoff sehr gut beherrscht.

4.3.2.8.2 Zweiter Fall

Kostas (F=4, Un=1)
Kostas kommt aus Russland und besucht seit zwei Jahren die Schule in Griechenland.

231 | 9 -18 | 2 051	**I**: Die Subtraktion 8 von 13 gleich 5, wie hast du sie so schnell gemacht? **Kostas**: Ich habe von der 8 die 3 subtrahiert und es blieben 5. Dann habe ich von der 13 die 3 rausgeholt und dann die 5 von der 10...

Kostas Überlegungen: 13-8= ...	8 – 3 = 5	(13 - 3) - (8 - 3)
	13 – 3 = 10	10 - 5 = 5
	10 – 5 = 5	(Konstanz der Differenz)

Hier geht es um die Subtraktion 13-8, d. h. eine Subtraktion mit Zehnerunterschreitung. Kostas wendet das Rückwärtszählen mit einem zusätzlichen Detail an. Dieses Detail erinnert an das Gesetz der Subtraktion, wobei man vom Subtrahenden und vom Minuenden dieselbe Zahl abziehen kann, ohne dass sich die Differenz verändert. Dass dieser Strategie das Gesetz der Konstanz der Differenz innewohnt, ist diesem Schüler wohl unbewusst. Ziel des Schülers ist es, die Aufgabe mit der fehleranfälligen Zehnerunterschreitung zu vermeiden und so zu modifizieren, dass eine neue leichtere, deshalb sichere und gleichzeitig ergebnisgleiche Aufgabe entsteht. Das erreicht er, indem er die ursprüngliche Aufgabe in die Form bringt, **in der als Minuend immer die Zahl 10 steht**, also 10-a=b. Um dies zu erreichen, ist zuvor ein weiterer Schritt erforderlich. Im ersten Schritt werden die Einer des Minuenden parallel vom Minuenden (und zwar bis zum Erreichen der Zehn) und Subtrahenden abgezogen. Die Folge ist dann bekannt. Der Rest des Subtrahenden wird danach von der Zehn subtrahiert, und das Ergebnis bildet den Rest der Subtraktion.

Nach der Division rechnete er die untere Subtraktionsaufgabe aus, in der die vorher beschriebene Strategie erneut auftritt. Er erläutert wie folgt:

$\begin{array}{r} 2057 \\ -189 \\ \hline 1868 \end{array}$	**Kostas**: 7 von 9,... 2. 2 von 10, 8, die schreiben wir. 1 der Übertrag, plus 8 ist 9. 5 von 9, 4, 4 von 10 macht 6, die schreiben wir. 1 der Übertrag, plus 1, 2. 0 von 2, 2. 2 von 10, 8. 1 der Übertrag, von 2, 1. **I**: Hat euch der Lehrer die Subtraktion so beigebracht? **Kostas**: In Russland beginnen wir die Subtraktion umgekehrt. Von oben nach unten. **I**: Das was du rechnest, von der 9 ziehe ich die 7 ab, hast du das hier oder in Russland gelernt? **Kostas**: Hier habe ich das gelernt. Ich habe das alleine gemacht! **I**: Bravo! Du bist sehr gut.

Auch in dieser Subtraktion werden dieselben Schritte befolgt. Beim lauten Rechnen zeigt der Schüler sogar, dass hier ein Zwischenschritt ausgelassen wird. Dieser Schritt wäre das Abziehen der Einerziffer des Minuenden vom erweiterten Minuenden, um die leichte Subtraktion von der Zehnerzahl zu erreichen, also 9 – 7 = 2, *17 – 7 = 10* und zuletzt 10 – 2 = 8. Auf diese Weise hat er seine Strategie vereinfacht.

Bei genauerer Betrachtung dieser Strategie fallen folgende Vorteile auf, die wahrscheinlich auch diesen Schüler bewegen, sie immer anzuwenden:

a) Es wird immer die kleine von der größten Zahl subtrahiert, egal ob sie sich im Minuenden oder Subtrahenden befindet.
b) Es besteht kein Zehnerübergang, bei dem viele Fehler auftreten. Es ergibt sich immer die Subtraktionsaufgabe 10-a=b, die in der Regel jeder Schüler in der vierten Klasse ohne Probleme lösen sollte.
c) Wenn sich die kleine Ziffer im Subtrahenden befindet, wird die gewöhnliche Strategie angewendet.

4.3.2.8.3 Dritter Fall

Anna (F=8, Un=0)

224 | 18 -18 | 12 044 -36 08	(in der zweiten Teildivision) **Anna**: Die 18 geht in die 24 zweimal. **I**: Wie hast du das gefunden? **Anna**: Die 1 geht in die 4 viermal, aber weil wir dahinter noch eine Ziffer haben, nehmen wir die 2 ... **I**: ....Wie hast du die 8 (in der zweiten Subtraktion) gefunden? **Anna**: Ich sage 6 plus 6 macht 12. Ich tue auf die 6 zwei dazu und es werden 8 (und die Summe ist 14).

In der zweiten Subtraktion der Aufgabe, Sechs von Vierzehn, wird nicht subtrahiert sondern addiert. Als Ausgangspunkt wird die Summe äquivalenter Mengen benutzt, die in diesem Fall (6+6=12) leicht zu berechnen ist. Da im Subtrahenden eine Vier steht, muss der zweite Summand um zwei vergrößert werden und so wird die Gleichung zu 6+8=14. Die gefragte Zahl ist die Acht, die auch die Ergänzung von Sechs bis Vierzehn bildet.

Dasselbe Vorgehen wurde auch in der Subtraktion 17-9 angewendet, die die Interviewerin ohne Bezug auf die bestimmte Division der Schülerin stellte. Um die Neun von der Siebzehn abzuziehen, stützt sich Anna auf die Summe gleicher Summanden 9+9=18. Da aber in dieser Subtraktion nicht die Achtzehn sondern die Siebzehn steht, wird der eine Summand um eins verkleinert und es entsteht die Summe 9+8=17. In dieser Gleichung befindet sich auch die gesuchte Zahl Acht, die die Ergänzung der Neun bis zur Siebzehn bildet. Anna bevorzugt die Ergänzungsaufgabe 9+_=18, um die Subtraktionsaufgabe 18-9=_ zu lösen.

In beiden Fällen kann man sehen, dass die **Verdopplungsaufgaben** einen besonderen Stellenwert für diese Schülerin besitzen. Sie werden erkannt und als Ausgangspunkt benutzt, um Nachbaraufgaben auszurechnen. Sie gelten als Orientierungsstützen, zu denen die Nachbaraufgaben in Beziehung gesetzt werden. Die Gesetzmäßigkeiten sind so leicht einsichtig. Man gelangt ökonomisch und systematisch zu der Lösung, wenn man die Summanden operativ verändert.

4.3.2.8.4 Vierter und fünfter Fall

Aristidis (F=3, Un=0)

13104 | 56 -112 | 2 019	**Aristidis**: Die 56 geht in die 131 zweimal... **I**: Wie hast du dir die 2 ausgedacht? **Aristidis**: Ich habe multipliziert und kurz nachgedacht... **I**: Und was hast du dabei gedacht? **Aristidis**: Zweimal 5 ist 10... und in der Nähe muss das sein... **I**: Schön. Klug von dir!....Wie hast du dann die 9 von der 11 berechnet? **Aristidis**: Ich sage zuerst 10 minus 2 ist 8 und 1 dazu macht 9.

Aristidis Überlegungen:
11 – 2 = (10 + 1) – 2 = (10 - 2) + 1 = 8 + 1 = 9

Giorgos (F=5, Un=2)

$\begin{array}{r\|l} 224 & 18 \\ \cline{2-2} -18 & 12 \\ \cline{1-1} 044 & \\ -36 & \\ \cline{1-1} 09 & \end{array}$	(in der ersten Subtraktion) **I**: 8 von 12, wie hast du das so schnell berechnet? **Giorgos**: Ich sage es Ihnen gleich ... Die 18 geht in die 44 zweimal, aber ich werde es auch mit der 3 versuchen. **I**: Willst du mir jetzt sagen, wie du subtrahierst? **Giorgos**: Sagen wir mal die 8 von der 12. Von der 10 ziehe ich 8 ab, es bleiben 2, plus 2 macht 4...

Die Strategie, die diese Schüler in den Subtraktionen anwenden, ist nicht das Ergänzen sondern das Abziehen. Als Zwischenhalt wird die Zehn genutzt. Das übliche Abziehverfahren enthält zwei Schritte: Der Subtrahend wird in zwei Teile zerlegt. Zuerst wird der erste Teil des Subtrahenden bis zum Erreichen der 10 abgezogen und danach der zweite Teil von der 10, z. B.:

13 – 7 = ... 7 = 3 + 4
13 – 3 = 10
10 – 4 = 6

In unserem Fall werden statt zwei Subtraktionen eine Subtraktion und eine Addition durchgeführt. Es ist der Minuend, der als eine Summe von Zehn plus Drei zerlegt wird. Diese 10 ist der Zehner, der in der Zehnerüberschreitung geborgt wird. Im ersten Schritt wird der ganze Subtrahend von der Zehn abgezogen (die Subtraktion von der Zehn ist immer leichter) ungeachtet dessen, dass der tatsächliche Minuend größer als Zehn ist. Im zweiten Schritt wird die zweite Zerlegung des Minuenden zum Rest addiert. Wieder wird das Operieren (hier Subtrahieren) mit der Zehn bevorzugt und gleichzeitig die zweite Subtraktion in eine Addition umgewandelt, z. B.:

13 – 7 = (10 + 3) – 7 = 10 – 7 + 3 = 3 + 3 = 6

Damit ein Schüler zu dieser Strategie gelangt, muss er vorher das übliche Abziehverfahren verstanden und angewendet haben, das verständlicher für die Denkart der Schüler ist, da man sich in einer Richtung bewegt und nur Subtraktionen durchführt, auch wenn es vielleicht schwieriger in den Berechnungen ist.
Diese Strategie weist eine größere Komplexität auf, da sie zuerst einen Zug rückwärts und dann vorwärts benötigt und eine Kombination beider Operationen darstellt. Die Berechnungen sind jedoch leichter, da die zweite Operation eine Addition ist, die für die Schüler immer leichter als eine Subtraktion ist.

4.3.2.8.5 Sechster Fall

Kostantinos (F=6, Un=1)

<table>
<tr>
<td>75665 ⎸ 37
-74 ⎸ 2045
0166
-148
0185
-185
000</td>
<td>(in der zweiten Subtraktion)
Kostantinos: 8 von 6 geht nicht. 8 von 16... 7, 8, d. h. 8. 4 plus 1, die wir uns geliehen haben, 5, von 6, 1. 1 von 1 ist 0.
I: Kannst du mir erklären wie du die 8 von der 16 berechnet hast?
Kostantinos: Von der 10 habe ich die 8 subtrahiert und 2 gefunden, diese (die 2) addierte ich zu 6 und fand 8. ... Die 37 geht in die 185 ...

(weiter unten im letzten Divisionsschritt)
I: Womit multiplizierst du?
Kostantinos: Mit der 5.
I: Gut. Mach weiter. ...Wie hast du eigentlich die 5 gefunden?
Kostantinos: Die 3 geht in die 10 dreimal, in die 8 zweimal, d. h. 5.
I: Hat der Lehrer euch das so beigebracht?
Kostantinos: Nein.
I: Du machst das von alleine?
Kostantinos: Ich habe auch andere Wege, komplizierte, andere mehr kompliziert, andere intelligente...
I: Und wo findest du diese?
Kostantinos: Ach, durch Zufall. Wenn ich mal nicht kann, finde ich etwas!
I: Aha!</td>
</tr>
</table>

Hier geht es um das Herausfinden der Quotientenziffer. Dafür wird folgende Berechnung durchgeführt. Die Einerziffer des Teildividenden (185) und des Divisors (37) werden nicht in Betracht gezogen. Die restlichen Ziffern des Teildividenden (18) werden durch den nun einstelligen Divisor (3) nach ihrem Stellenwert schrittweise dividiert, diese Ergebnisse werden zusammenaddiert und ergeben auch die gesuchte Quotientenziffer. In unserem Beispiel wird zuerst der Quotient der Aufgabe 10:3=3 gesucht, dann der Quotient der Aufgabe 8:3=2, diese zwei Quotienten werden addiert und ergeben die Ziffer 5 und so ergibt sich 185:37=5. Der Schüler spaltet einen leicht teilbaren Betrag ab, dividiert ihn und notiert das Teilergebnis. Dieselbe Operation führt er mit dem restlichen Betrag durch und gelangt zum Ergebnis, indem er die zwei Teilergebnisse addiert. Dieser Vorgang basiert auf dem Distributivgesetz bezogen auf die Addition. Dieses Gesetz bietet eine große Hilfe für das Erlernen der Einmaleinstafel und der inversen Divisionstafel. Wenn ein Produkt zweier Zahlen unbekannt ist, ist es möglich, dieses in bekannte Produkte zu zerlegen und es dann zu berechnen. Dasselbe gilt auch für die Division. Eine Divisionsaufgabe kann in zwei leichtere Aufgaben zerlegt werden. Dieses Vorgehen wird aber nicht im Buch vorgestellt, z. B.

$$7 \times 9 = \_ \qquad \begin{array}{r} 5 \times 9 = 45 \\ +\ 2 \times 9 = \underline{18} \\ 63 \end{array} \qquad\qquad 42 : 7 = \_ \qquad \begin{array}{r} 35 : 7 = 5 \\ +\ 7 : 7 = \underline{1} \\ 6 \end{array}$$

Obwohl die Schüler die Ziffer des Quotienten meistens multiplikativ berechnen, wird hier anders vorgegangen. Der Schüler zieht es vor, die ursprüngliche komplexe Aufgabe (dreistellige: zweistellige Zahl) in zwei einfachere Divisionsaufgaben zu zerlegen und diese zu kombinieren. Um dies zu ermöglichen, vereinfacht er die Anfangsaufgabe indem er die Einerziffer beider Faktoren auslässt bzw. beide Zahlen verkürzt. Diese Vereinfachung kann jedoch die Genauigkeit des Ergebnisses beeinflussen. Dies gilt aber auch, wenn man den Quotienten durch Runden der Zahlen abschätzt. Es ist jedoch festzuhalten, dass auf diesem Weg die Schwierigkeit überwunden wird, die Quotientenziffer überschlagsmäßig oder annähernd zu berechnen, wenn es um größere Zahlen geht. Man ist der richtigen Quotientenziffer sehr nahe, was sich mit dem Bilden des Teilproduktes auch überprüfen lässt. So vermeidet man das aufwändige und zeitraubende Multiplizieren des Divisors mit diversen Zahlen, bis das erwünschte Ergebnis ermittelt wird. Es ist ein kluger Ausweg, wenn Schüler nicht wissen, wie sie mit großen Zahlen sicherer umgehen können.

In dem vorangegangenen Abschnitt wurden eine Reihe von Vorgängen, Verfahren und Strategien beschrieben, die die Schüler in den Grundrechenarten angewendet haben, obwohl diese nicht in den Schulbüchern enthalten sind. Wohl aber haben diese mit dem im Unterricht gelehrten Stoff zu tun und basieren auf Vorkenntnissen der Schüler. Man könnte sie als eine Art von Erweiterungen und Entdeckungen sehen, die eine Vielzahl von bewundernswerten differenzierenden Aspekten aufweisen.

Im Rahmen des entdeckenden Lernens (vgl. Winter, 1989, S. 174) sind die Entdeckungen der Schüler keine objektiven Entdeckungen sondern Nachentdeckungen und -erfindungen. Ausgegangen wird von dem verfügbaren Wissen und den erworbenen Fähigkeiten. Je besser dieses Vorwissen organisiert und beherrscht wird, je größer das Gefühl des Schülers ist, etwas sicher zu können, desto mehr besteht die Wahrscheinlichkeit, dass etwas Neues entdeckt wird (vgl. ebd., S. 79). Die Organisation der alten Informationen ist an dieser Stelle sehr wichtig, denn sie beeinflussen ihre Abrufbarkeit. Nur wenn man weiß, wo sich die Informationen befinden, weiß man auch, wie man zu ihnen gelangt (vgl. Bruner, 1981, S. 27). Der Schüler arbeitet an seinen Erfindungen bzw. Nacherfindungen nicht gezielt. Dies geschieht eher unbewusst. Das eigentliche Ziel seiner Problemlösungsaktivitäten ist die Lösung von Problemen und nicht das Entdecken von Zusammenhängen oder Einsichten (vgl. Ausubel, Novak & Hanesian, 1981, S. 35). Während ein Feld erkundet oder eine Lösung zu einem gestelltem Problem gesucht wird, reaktiviert der Suchende alle Inhalte, die in enger Beziehung zu diesem Sachverhalt stehen, was gleichzeitig eine intensive Wiederholung des Gelernten ist. Bestimmte Wissenselemente werden sortiert, verglichen und so kombiniert, dass neue Assoziationen gebildet werden und aus alten Einzelheiten neue Ganzheiten entstehen (vgl. Winter, 1989, S. 174). Somit lässt sich nach Winter (1989, S. 79) das Lernen immer als ein Weiterlernen, und nach Bruner (1981, S. 16) eine Entdeckung als Neuordnen oder Transformieren des Gegebenen verstehen.
So ist es auch diesen Schülern gelungen, durch gedankliches Durchspielen der Algorithmen der Rechenoperationen und der arithmetischen Gesetzmäßigkeiten Vereinfachungen der üblichen Vorgehensweisen zu entwickeln. Dadurch dass das Material nach den eigenen Interessen und den kognitiven Strukturen organisiert wurde, ist es im Gedächtnis der Schüler am ehesten zugänglich (Bruner, 1981, S. 28).

Eine solche Leistung sollte von jedem Lehrer anerkannt und geschätzt werden, denn dies bedeutet auch zugleich Respekt gegenüber der Schülerpersönlichkeit. Die Schüler haben gezeigt, dass sie aktiv-entdeckend im Mathematikunterricht gelernt haben, ohne dass der Lehrer in jedem Fall einen Entdeckungen fördernden Unterricht anstrebte. Die meisten Schüler beschränken sich in der Regel darauf, die bestehenden und im Unterricht vorgestellten mathematischen Vorgehensweisen anzuwenden oder versuchen dies zumindest, um ein Problem zu lösen. Für sie ist Mathematik das Suchen von Lösungsverfahren in gestellten Problemsituationen, das mit der Anwendung von bestimmten Regeln erfolgreich werden kann. Die Reproduktion gelernter verbaler Verhaltensweisen kann jedoch nur zeitlich und inhaltlich lokal funktionieren. Auf Dauer hat sich Lernen mit intellektueller Einsicht als wirkungsvoller erwiesen (vgl. Winter, 1989, S. 1). Das Interesse, sich in den gelernten Stoff zu vertiefen und Einsicht in versteckte Strukturen zu gewinnen, kennzeichnet nicht das Regelverhalten jedes Schülers und sollte deshalb vom Lehrer nicht leichtsinnig übergangen werden. Der Lehrer sollte nicht nur die Richtigkeit dieser Strategien überprüfen und je nach seinen Bewertungen seine Schüler ermutigen, einige von diesen zu „adoptieren" oder zu vermeiden. Er sollte vielmehr versuchen, durch didaktische Maßnahmen günstige Voraussetzungen zu schaffen, die einsichtsvolles Lernen ermöglichen und Kreativität und neue Einfälle provozieren. Er sollte jeden Versuch seiner Schüler, ob erfolgreich oder nicht, positiv begrüßen und sie anregen, eigene Lösungsansätze zu finden und ihre Gedanken ohne Hemmungen zu äußern. Die Anerkennung dieser Schülerinitiativen würde die Schüler motivieren, ihre Suchprozesse, Erkundungen, Erfindungen und Feststellungen fortzusetzen. Das Bemühen des Schülers, eine Aufgabe selbstständig zu lösen und das unerwartete Erschließen neuen Wissens bietet Gelegenheiten zu intellektuellen Identifikationen, zu Erfolgsergebnissen, zu Erkundungen des eigenen Verstandes und des Gedächtnisses. Dadurch wird das Selbstkonzept gestärkt und die Kinder gewinnen das nötige Selbstvertrauen, das sie zu neuen Leistungen bereit und fähig macht (vgl. Winter, 1989, S. 2).

Trotz der vielen positiven Aspekten von Entdeckungen, ist das Entwickeln von Strategien des Entdeckens nicht das primäre Lernziel der Unterrichts. Jeden Lehrenden sollte darüber hinaus die Frage von Ausubel et al. beschäftigen:

> „Wäre es nicht realistischer, sich zunächst das Ziel zu setzen, dass jeder Schüler auf einen guten rezeptiven Unterricht sinnvoll, aktiv und kritisch reagiert, bevor wir uns bemühen, aus ihm einen kreativen Denker oder gar einen guten kritischen Denker und Problemlöser zu machen?" (Ausubel et al., 1981, S. 38)

Diese neuen Strategien bilden ein interessantes Ergebnis dieser Untersuchung. Eine neue Studie, die ähnliche neue Rechenstrategien der Schüler thematisieren würde, wäre von besonderem Interesse für die Mathematikdidaktik. Von solchen Untersuchungen sind wertvolle Anregungen für die Unterrichtspraxis zu erwarten und gleichzeitig eröffnet sich ein neues Feld für interessante Forschungsarbeiten.

4.4 Diskussion der Untersuchungsergebnisse

Auf den vorangegangenen Seiten wurden die systematischen Fehler, die im Divisionstest aufgetreten sind, näher untersucht. Zunächst wurden die Fehler lokalisiert und beschrieben, unter Rückgriff auf die einschlägige Literatur wurden Hypothesen zu ihrer Entstehung aufgestellt. In der Folge wurde eine qualitative Analyse der Fehler vorgenommen, die die logische Struktur des einzelnen Fehlermusters erkundet und offenlegt und die individuelle Fehlertypologie jedes Schülers bestimmt. Wesentlich waren hierbei die Interviews, die die möglichst weitreichende Erfassung der Kinder beim Lösen und Kommentieren ihrer eigenen Aufgabenlösungen ermöglichten. Die Schüler wurden bei dem Versuch, ihre Gedankengänge und Rechenstrategien zu erläutern, mit anregenden Fragestellungen durch die Verfasserin unterstützt. Aus der Analyse ihrer Antworten und Erklärungsversuche wurde ersichtlich, in welchen Aufgabenkonstellationen und Teilschritten systematische Fehler auftreten bzw. durch welche Schwierigkeitsmerkmale der Aufgaben die beobachteten Fehler ausgelöst werden und wie die Schüler auf diese Schwierigkeiten reagieren. Dieser Prozess ermöglichte es, die Fehlerursachen einzugrenzen und Vorschläge zur Behebung bzw. Vorbeugung einzelner Fehlermuster zu entwickeln. Es waren jedoch nicht nur die Fehler, die in den Interviews zum Vorschein kamen. Auch die Stärken der Schüler wurden evident und insbesondere ihre Fähigkeit, das verfügbare Wissen und erworbene Fähigkeiten untereinander in Beziehung zu setzen, umzuorganisieren und zu reflektieren, um daraus eigene Strategien zu entwickeln.

An dieser Stelle werden noch einmal die systematischen Fehler ins Visier gerückt und einige Überlegungen zu ihrer Entstehung angestellt.

Systematische Fehler wurden beim schriftlichen Dividieren in den einzelnen Teilschritten und Teilfertigkeiten lokalisiert:

1. bei der Subtraktion des Teilproduktes vom Teildividenden
2. beim Einmaleins
3. beim Berechnen der Quotientenziffern
4. beim Rechnen mit der Null
5. beim Verfahren der Division

Einzelne systematische Fehler (z. B. Fehler mit der Null, Fehler beim Berechnen der Quotientenziffern) wurden auch von Schülern gemacht, die gute Leistungen im Mathematikunterricht zeigen. In großer Häufigkeit traten sie jedoch bei Schülern auf, die Lernschwierigkeiten in diesem Fach aufweisen. Bei der qualitativen Fehleranalyse wurden beide Schülergruppen berücksichtigt, es wurden Abschnitte aus ihren Interviews präsentiert. In allen Fällen wurde deutlich, dass die systematischen Fehler keine Flüchtigkeitsfehler sind und keinem Zufallsprinzip unterliegen, sondern dass sie eine Regelhaftigkeit, einen „logischen Kern“ besitzen und „auf ideosynkratische und für den einzelnen Schüler sinnerfüllenden Regeln beruhen“ (Radatz, 1980, S. 55).

Für die Gruppierung der systematischen Fehler in Kategorien wurden die Fehlerkategorien benutzt, die in der deutschen Literatur zur Fehleranalyse vorzufinden sind (Radatz, 1980; Gerster, 1982a). Aus der Auswertung der Tests und Interviews ergibt sich, dass zu den bereits festgestellten Fehlerkategorien keine neuen Fehlerarten hinzukamen. Dieselben Fehlergruppen, die auch in Untersuchungen mit deutschen Schülern auftraten, konnten auch in dieser Untersuchung mit griechischen Schülern bestätigt werden. Zwar ist die Notation der schriftlichen Division in Griechenland anders als in Deutschland, doch diese Tatsache übte keinen Einfluss auf die Schülerlösungen aus. Es wird – unabhängig von der Notation – dieselbe Schrittfolge durchlaufen und es werden dieselben Teilhandlungen durchgeführt. Diese Teilhandlungen sind es, die die schriftliche Division zum kompliziertesten Verfahren machen. Die Schwierigkeit liegt darin begründet, dass viele Teilhandlungen ausgeführt werden müssen und dass bei diesen Teilhandlungen die Beherrschung anderer Rechenverfahren vorausgesetzt wird (nämlich des Multiplizierens und des Subtrahierens). Insbesondere bei mehrstelligen Divisoren wird das Rechnen nicht auf bloßes Anwenden der Grundaufgaben reduziert, da weitere Teilfertigkeiten gefragt sind: Bestimmen des (Teil-)Dividenden – überschlagsmäßiges Dividieren – Multiplizieren – Subtrahieren (Lorenz, 1983, S. 48ff.). Obwohl die Einführung dieser Teilfertigkeiten in beiden Ländern aufgrund der verwendeten Lehrbücher und der Lehrmethodik starke Unterschiede aufweist, wurden bei den Schülern dieselben Fehlerarten festgestellt, was folgende Annahme zulässt:

> „(es) scheint ... bestimmte Universalien im kindlichen Denken zu geben, die spezielle Fehlertypen bei curricularen Anforderungen bewirken (…)“ (Lorenz, 1992, S. 29)

Abhängig vom jeweils verwendeten Lehrbuch und der Lehrmethodik ist jedoch die Art und Weise, wie die Schüler die einzelnen Teilschritte der Division berechnen. Aus dem „lauten Rechnen“ der Schüler ließen sich die Vorgehensweisen erkennen, die für griechische Schüler beim schriftlichen Dividieren charakteristisch sind. Diese sind zwar nicht maßgeblich für alle Schüler, sie treffen jedoch für die Schüler, die als Stichprobe für die vorliegenden Untersuchung ausgewählt wurden, zu und lassen Vermutungen zu, dass auch von der übrigen Schülerpopulation ähnliche Rechenstrategien angewendet werden. Die griechischen Schüler bestimmen den Teildividenden an Hand der Stellenanzahl des Divisors und den Vergleich zwischen Teildividenden und Divisor („x Ziffer hat der Divisor, x Ziffer teilen wir auch links vom Dividenden…“). Die meisten von ihnen schätzen die Quotientenziffer mit Hilfe der Überschlagstechnik „Überschlagen nach den führenden Ziffern“ und gehen dann multiplikativ vor, um durch Rückgriff auf das Einmaleins die entsprechende Ziffer zu berechnen. Diejenigen, die diese Überschlagstechnik nicht beherrschen, wählen als Ausgangspunkt eine zufällige Quotientenziffer aus und führen (oft unzählige) Proben aus, bis sie die richtige Ziffer ermittelt haben. Nur ein geringer Anteil berechnet die Quotientenziffer additiv, durch fortgesetzte Additionen des Divisors. Bei der Subtraktion des Teilproduktes vom Teildividenden gehen die meisten Schüler ergänzend vor, viele dabei unter Zuhilfenahme ihrer Finger.

Fehlertypen wurden bei der Informationsaufnahme und -verarbeitung auf Seiten der Schüler lokalisiert. Sie hatten unterschiedlichen Entstehungshintergrund:

- Bei hierarchisch gegliederten Lerninhalten, wie z. B. in der Mathematik, kann man den derzeitigen Stoff nur verstehen, wenn man den vorangegangenen Stoff verstanden hat. Treten *Wissenslücken aus zurückliegenden Lernphasen* auf, führen diese zu enormen Lernschwierigkeiten und zu einem Lernrückstand. Dies war der Fall bei Schülern, die Schwierigkeiten mit dem Verfahren der Division hatten, weil ihnen grundlegende Kenntnisse bezogen auf die anderen Rechenoperationen (Subtraktion, Multiplikation) oder die einzelnen Teilfertigkeiten der Division (Bestimmen des Teildividenden, Überschlagen) fehlten.

- Bei manchen Schülern war *Gedächtnisversagen oder geringes Kurzzeitgedächtnis* zu beobachten. Zwischenergebnisse (wie auch Übertrags- und Behalteziffern) wurden nicht im Gedächtnis behalten, auch wenn diese kurz davor ausgesprochen wurden. Mussten diese Schüler ihre Aufmerksamkeit kurzfristig einer anderen Tätigkeit bzw. dem nächsten Rechenschritt zuwenden, so waren ihnen die Zwischenergebnisse entfallen. Weitere Schüler konnten sich die einzelnen Teilschritte, die beim schriftlichen Dividieren erforderlich sind, nicht merken. *Konzentrationsstörungen und mangelnde Aufmerksamkeit* führten dazu, dass in den abschließenden Teilschritten einer Rechenoperation die inverse Rechenoperation durchgeführt wurde, z. B. wurde beim letzten Schritt einer Subtraktion addiert.

- *Fehlinterpretationen und unzulässige Verallgemeinerungen* führten zu zahlreichen Fehlern wie z. B. zum Abziehen der kleineren von der größeren Zahl unabhängig von der Rechenrichtung, Fehler beim Herunterholen von Ziffern des Dividenden und beim Rechnen mit der Null. Die Handlungsweisen der Schüler stammen in diesen Fällen aus zurückliegenden Erfahrungen mit ähnlichen Problemen. Traten Aufgaben mit veränderten Teilaspekten auf, die jedoch Ähnlichkeiten mit vorhergehenden Aufgabentypen hatten, blieb die Analyse der veränderten Aufgabenbedingungen aus. Die bekannten Lösungsstrategien wurden beibehalten und ausgeführt. Sie führten zwangsläufig zu Fehlern.

- *Fehlende Einsicht in das Verständnis einer Operation* hinderte einige Schüler, aus bekannten Rechensätzen die Nachbaraufgaben abzuleiten. So konnten Schüler aus ihnen bekannten Einmaleinssätzen die Nachbaraufgaben nicht berechen oder konnten die Größenordnung der Einmaleinsergebnisse nicht richtig abschätzen.

- Manche Schüler schlossen ihre *Aufgabenbearbeitung* nicht ab und ließen sie *unvollständig*, ohne dies selbst zu bemerken. So gingen die Schüler vor, die in den Divisionen einen zu großen Rest hinterließen ohne sich darüber weitere Gedanken zu machen.

Die Ätiologie der systematischen Fehler hängt jedoch nicht nur mit den Schülern sondern auch mit der Lehrmethodik und auch mit dem Lehrwerk zusammen. Die beschriebenen Fehler sind nicht nur als Fehlleistungen des Schülers, sondern auch als Folgen und Unzulänglichkeiten des erteilten Unterrichts und des Lehrkompendiums anzusehen und bilden einen Hintergrund für Maßnahmen auf der curricular-didaktischen Ebene:

▪ Aus den Interviews wurde deutlich, dass die meisten Schüler die Differenzen inner- und außerhalb des Divisionsverfahrens ergänzend berechneten, obwohl im Lehrbuch nur das Abziehverfahren thematisiert wird. Es kommt vor, dass das Ergänzen von einigen Klassenlehrern als zusätzliche Strategie angeboten wird, oder vom Schüler selbst entwickelt und angewandt wird. Im Lehrbuch wird das **Ergänzungsverfahren** jedoch nicht explizit thematisiert, obwohl die Vorteile dieses Verfahrens dafür sprechen (Padberg, 1996, S. 169):

- Beim Ergänzungsverfahren wird nur das geläufigere und weniger fehleranfällige Einsundeins benötigt.
- Das Vorwärtszählen wird besser beherrscht als das Rückwärtszählen.
- Die Subtraktion mehrerer Subtrahenden ist beim Ergänzungsverfahren leichter zu handhaben.
- Der Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion wird unmittelbar deutlich.

- Die Herausgabe von Wechselgeld bei Einkaufssituationen, welche den Schülern in der Regel vertraut sind, erfolgt im Sinne des Ergänzens.

Es ist daher unabdingbar, dass im Lehrbuch neben dem Abziehverfahren auch das Ergänzungsverfahren vorgestellt wird, um den Schülern weitere, neue und eventuell weniger fehleranfällige rechnerische Möglichkeiten zu eröffnen.

- Die meisten Schüler, die in der vorliegenden Untersuchung die Differenzen ergänzend berechneten, gingen zählend vor, unter Zuhilfenahme der Finger. Dabei setzten sie ihre Finger dynamisch ein, d. h. nicht für die Darstellung eines Zahlbildes, sondern mnemotechnisch, als „externes Gedächtnis beim Weiterzählen“ (vgl. Lorenz, 1993, S. 174ff.). Dass die Finger die erste Versinnbildlichung der Zahlen darstellen und das Fingerrechnen nicht nur in den Eingangsklassen persistiert (ebd.), ist allgemein bekannt. Bei schwachen Rechnern bildet es sogar die einzige Rechenhilfe und verfestigt sich bis in die großen Klassen.
  Unglücklicherweise hatten die Schüler, die das Fingerrechnen in der vorliegenden Untersuchung anwendeten, auch mit dieser Strategie keine Garantie für fehlerloses Rechnen. Wie sich herausstellte, waren die Abzählstrategien vieler Schüler fehlerbehaftet, da sie sich nicht auf eine Abzählstrategie festlegen konnten, hin und wieder die Anfangszahl mitzählten oder nur die zwischen liegenden Zahlen abzählten. Manchmal konnten sie zusätzlich die ausgesprochenen Zahlen in ihrer Anzahl nicht richtig erfassen. Daher erwies sich diese Methode für die Schüler als ineffizient.

Eine unmittelbare Folge des zählenden Rechnens war, dass andere im Unterricht behandelte überlegene Strategien ungenutzt blieben. Die Rede ist hier von **heuristischen Strategien**. Grundsätzlich wird das zählende Rechnen in den ersten Schulklassen verwendet und soll allmählich in den folgenden Jahren durch heuristische Strategien abgelöst werden. Diese Entwicklung ist jedoch bei vielen Kindern mit Lernschwierigkeiten nicht zu verfolgen.
Heuristische Strategien werden angewendet, um Lösungen aus Bekanntem abzuleiten (Radatz & Schipper, 1983, S. 65). Sie setzen u. a. das Kennen wichtiger Grundaufgaben sowie Einsichten in die Eigenschaften der Rechenoperationen voraus. Dieses Vorwissen fehlte jedoch bei rechenschwachen Schülern, so dass sie nur auf das zählende Rechnen angewiesen waren. Pädagogisch und didaktisch wäre es jedoch nicht sinnvoll, den Schülern aufzuzwingen, das zählende Rechnen zu vermeiden. Denn Zähltechniken entwickeln auch rechenschwache Kinder spontan und können sie in verschiedenen Situationen des elementaren Rechnens anwenden. An diese vorhandenen Fähigkeiten der Schüler muss der Unterricht anknüpfen (vgl. Wember, 1998, S. 111ff.).

> „Beim zählenden Rechnen der Kinder anzuknüpfen heißt nicht, beim Zählen stehen zu bleiben; denn so wichtig es auch ist, die formalen Algorithmen aus den informellen Spontanverfahren der Kinder herauszuentwickeln, so wichtig ist es, den Kindern zu helfen, sich vom Zählen als alleiniger Strategie zu lösen und einsichtvolles Zahlenrechnen anzustreben.“ (Wember, ebd., S. 112)

Die Notwendigkeit des Ablösens vom zählenden Rechnen machen die Nachteile der zählenden Rechenstrategien deutlich: Zählendes Rechnen ist abhängig vom Kurzzeitgedächtnis und bei Auftreten von Fehlern muss das Abzählen wieder von Anfang an gestartet werden (Wember, 1989, S. 441). Weiterhin bleibt das zählende

Rechnen nur in überschaubaren Zahlenräumen effektiv, erschwert die Einsicht in Analogien (es wird mechanisch und isoliert gerechnet) und in die Dezimalstruktur des Zahlensystems (es wird weitergezählt und nicht zum Zehner ergänzt) und verhindert den Erwerb von automatisierten Grundaufgaben (Wember, 1998, S. 113). Aus diesem Grund ist es sehr wichtig, dass die Schüler die Zerlegungen der einstelligen Zahlen, die Ergänzungen der einstelligen Zahlen zum Zehner, die Verdopplungsaufgaben erwerben und sicher beherrschen, sowie Einsicht in die Eigenschaften der Rechenoperationen (Kommutativ- und Assoziativgesetz) und in die dekadische Analogie gewinnen, um auch in der Lage zu sein, Rechenvorteile zu erkennen und heuristische Strategien zu verwenden und sich nach und nach vom zählenden Rechnen abzulösen.

- Von besonderer Relevanz sind in diesem Zusammenhang die **Grundaufgaben der Addition und Subtraktion**. Diese sollten die Schüler nicht auswendig lernen, sondern sich bewusst einprägen. Dies erfordert zunächst das handelnde Lösen der Grundaufgaben oder das Lösen mit zeichnerischer Unterstützung, erst dann können zum Berechnen der Aufgaben heuristische Strategien eingesetzt werden (vgl. Radatz & Schipper, 1983, S. 70). Angestrebtes Ziel sollte es sein, dass die Schüler die Grundaufgaben reichlich üben und automatisieren, so dass sie diese nicht jedes Mal neu berechnen müssen, sondern lediglich aus ihrem Gedächtnis abrufen. Die Beherrschung der Grundaufgaben gewinnt in den schriftlichen Rechenverfahren eine besondere Bedeutung, da diese dabei permanent aufgegriffen werden.

- Große Schwächen zeigten die Schüler im **Einmaleins**. Für eine große Schüleranzahl beschränkten sich die Einmaleinskenntnisse auf die ersten Zahlensätze bestimmter Einmaleinsreihen, von denen sie weitere Multiplikationsaufgaben nicht berechnen konnten. Dass im griechischen Lehrkompendium auf die Beziehungen zwischen den Einmaleinsaufgaben derselben Reihe und zwischen den einzelnen Reihen nicht eingegangen wird, wurde bereits erläutert. Es ist unbedingt notwendig, den Schülern das flexible und ökonomische Erlernen des Einmaleins beizubringen (siehe hierzu 5.7.1). Ausgehend von wenigen Multiplikationsaufgaben (Kernaufgaben) lassen sich die übrigen Gleichungen einer Einmaleinsreihe durch verschiedene Rechenstrategien erarbeiten. Wird zusätzlich das Kommutativgesetz genutzt, reduzieren sich die Einmaleinsreihen auf die Hälfte. Auf diese Weise müssen sich die Schüler nur wenige und leichte Einmaleinssätze einprägen, die sie als Stützpunkte benutzen können, um sämtliche Aufgaben einer Einmaleinsreihe zu lösen oder vergessene Einmaleinsergebnisse jederzeit selbst nachrechnen zu können.

- In den Interviews zeigte sich weiterhin, dass einige Schüler eine Aufgabe nicht unabhängig von ihrer Darbietungsform bearbeiten konnten. So gab es Schüler, die in der Lage waren, schriftlich zu dividieren, wenn auch mit Fehlern. Als sie dann aufgefordert wurden, dieselbe Aufgabe mit Material (Rechengeld), also handelnd zu lösen, hatten sie große Schwierigkeiten. Das war verwunderlich, da den Schülern zumeist das Arbeiten auf der symbolischen (abstrakten) Ebene Schwierigkeiten bereitet. Offensichtlich hatten die Schüler nicht genügend Übung im Umgang mit diesem bestimmten Anschauungsmittel oder ihnen wurde zu früh die Möglichkeit genommen, die Aufgaben handelnd zu lösen. Vermutlich fand im Unterricht kein ausreichender Wechsel zwischen den drei Brunerschen Darstellungsmodi statt. So konnten die Schüler die anschauliche Aufgabe nicht mit der symbolischen Aufgabe verbinden, sich den Operationsablauf nicht visuell vorstellen und brauchten Unterstützung beim **handelnden Vollzug der Aufgabe**. Trotz der unzulänglichen Übung mit Veranschaulichungsmitteln trauten die Schüler den Lösungen, die sie mit Veranschaulichungsmitteln gefunden hatten, auch wenn sie die Richtigkeit der Ergebnisse nicht rechtfertigen konnten. Dies hängt wohl damit zusammen, dass sie weniger Vertrauen in ihre Fähigkeiten im schriftlichen Dividieren hatten und mehr an das glaubten, was sie sehen konnten, in diesem Fall das Rechengeld. Solange die Schüler die Aufgaben nicht handelnd lösen können, werden sie auch nicht in der Lage sein, die symbolische – abstrakte Repräsentation nachzuvollziehen.

> „Handlungen sind häufig Ausgangspunkte, selten Endresultate eines schulischen Lernvorgangs. Zumeist ist es das Ziel, beim Schüler das Verstehen eines Problems, die Einsicht in eine Sache zu fördern" (Wember, 1988, S. 159).

Nur wenn ein Lerninhalt auf verschiedenen Darstellungsebenen erarbeitet wird, können „generalisierbare, bewegliche und systematische kognitive Strukturen" (Wember, 1988, ebd.) konstruiert werden. Der handelnde Vollzug einer Aufgabe bietet jedoch nicht nur die Möglichkeit, die Struktur des Problems zu erfassen, sondern auch die eigenen Lösungsversuche auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen und die eigenen Fehler zu entdecken und zu verstehen. Diese Voraussetzungen müssen gegeben sein, um einen erfolgreichen Lernvorgang gewährleisten zu können.

- Viele Schüler hatten Schwierigkeiten beim Verbalisieren ihrer Handlungen. Sehr oft benutzten sie **falsche Sprechweisen** während sie an einzelnen Lösungsschritten arbeiteten. So sagten sie z. B., während sie subtrahierten: „die 9 in die 4 geht nicht" statt „9 von 4 geht nicht" oder auch beim Dividieren: „9 von 15 ist einmal" statt „die 9 geht in die 15 einmal". Sie verwechselten also die Sprechweisen der einzelnen Operationen. Anstrengend war für sie, dass sie gleichzeitig rechnen und sprechen sollten. Dies war etwas Neues für die Schüler, da sie offensichtlich sehr selten oder überhaupt nicht aufgefordert wurden, ihre Lösungsschritte zu verbalisieren. Viel mehr waren sie an das stille schriftliche Rechnen gewöhnt. Es ist jedoch von immenser Bedeutung, dass den Schülern auch im Unterricht die Gelegenheit gegeben wird, Sachverhalte oder Gedankengänge zu verbalisieren, weil sie durch das Erklären ihre eigenen Handlungen besser verstehen und tiefere Einsicht in die mathematische Struktur erlangen. Das Verbalisieren von Lösungswegen gibt die Möglichkeit, das Denken zu fördern und die Präzision des Ausdrucks zu verbessern. Auf Seiten des Lehrenden werden dadurch der Einblick in die Gedankenwelt und das Verstehen der Vorgehensweise der Schüler ermöglicht. Beide Aspekte sind förderdiagnostisch als Hinweise auf den Lernprozess zu nutzen.

- Nicht nur die Schüler sondern auch die **Lehrer** sollten im Unterricht auf ihren sprachlichen **Ausdruck** achten. Vereinfachte und unpräzise Formulierungen von Regeln, wie z. B. „wenn die Zahl (gemeint der Teildividend, das Fachwort wird aber vom Lehrer vermieden) kleiner als der Divisor ist, muss man in das Ergebnis eine Null schreiben" können einen negativen Effekt haben. Sie können von den Schülern buchstäblich aufgenommen und übergeneralisiert werden und so zu Fehlinterpretationen und systematischen Fehlern führen.

- Während der Interviews wurden Beobachtungen bezogen auf das Arbeitsverhalten und die Arbeitsgewohnheiten der Schüler gemacht. Dabei wurde festgestellt, dass die Schüler niemals unaufgefordert Rechenproben durchführten und nur dann die bereits errechneten Ergebnisse hinterfragten, wenn sie über ihre Vorgehensweise nicht sicher waren. Bei den meisten Schülern lag es daran, dass sie keine Vorstellung von der Größenordnung des Ergebnisses bzw. der Teilergebnisse hatten, demnach war jedes Ergebnis akzeptabel. Sie rechneten eher mechanisch und ziffernweise, ohne zu beurteilen, ob das jeweils zustande gekommene Teilergebnis auch stimmen könnte und oft ohne die Zahlen als Ganzes zu erfassen. Sie mussten jedes Mal angehalten werden und mit adäquaten Fragestellungen auf das zuvor errechnete (Teil)Ergebnis aufmerksam gemacht werden. Aber auch diese Hinweise der Verfasserin blieben in den meisten Fällen unberücksichtigt. Sinnvoll erscheint es daher, den Schülern **Orientierungshilfen** für ihre Berechnungen zu geben. Durch das Bestimmen der Anzahl der Quotientenziffern wird eine Vorstellung über die Größenordnung des Ergebnisses der Division vermittelt. Für das Berechnen der Quotientenziffern können Überschlagsrechnungen und das Runden sehr hilfreich sein. Für die weiteren Teilhandlungen, die im schriftlichen Dividieren impliziert sind, müssen sich die Schüler angewöhnen, Rechenkontrollen durchzuführen, da nur so Fehlern vorgebeugt, bzw. sie lokalisiert und korrigiert werden können.

- In vielen Fällen erhärtete sich der Verdacht, dass die Schüler Einzelkenntnisse besaßen, die in keinem systemischen Zusammenhang standen. Nachbaraufgaben oder Umkehraufgaben konnten nicht aus bekannten Rechensätzen abgeleitet werden und Transferleistungen wurden selten erbracht. Rechenvorteile konnten nicht erkannt werden, die Eigenschaften der Rechenoperationen wurden gar nicht genutzt. Der **Strukturzusammenhang** fehlte, so dass die Schüler vorhandene Wissenselemente untereinander nicht in Beziehung setzen oder auf ähnliche Situationen transferieren konnten. Sogar das laute Denken zeigte, dass die Schüler nach starrem Schema rechneten und oft unverstandene Automatismen ausführten (vgl. Wember, 1988, S. 159f.). Daher waren sie nicht in der Lage bei veränderten Aufgabenstellungen die nötigen Modifikationen durchzuführen, sie unterbrachen ihre Lösungsversuche oder gelangten zu falschen Ergebnissen. Aus diesem Grund sollte der Unterricht mehr Gewicht auf Strukturen legen und den Kindern durch sorgfältig ausgewählte Veranschaulichungsmittel und operatorische Übungen helfen, Beziehungen zu entdecken und Strukturen einzusehen (vgl. Scherer, 1995, S. 199). Dabei hat der Begriff operatorische Übungen, der von Aebli geprägt wurde, folgende Bedeutung:

  > „Erlernte Operationen werden in variierenden Aufgabenstellungen geübt und zu verwandten bzw. gegensätzlichen Operationen in Beziehung gesetzt“ (Aebli, 1963, zitiert nach Wember, 1988, S. 159f.).

- In den Tests wurden schließlich sehr heterogene Leistungen zwischen den Schülern derselben Klasse festgestellt. Neben den Schülern, die alle Aufgaben bearbeiteten mit sehr wenigen Fehlern, gab es auch welche, die leere Testblätter abgaben. Bei solch erheblichen **individuellen Unterschieden** ist die innere Differenzierung von großer Wichtigkeit. Da wie bereits erwähnt, nicht in jeder Schule eine Sonderklasse eingerichtet werden kann, muss der Klassenlehrer die Initiative ergreifen, Schüler mit massiven Lernschwierigkeiten zu fördern. In solchen Fällen gilt es zunächst das Vorwissen der Schüler zu diagnostizieren, um darauf abgestimmte Fördermaßnahmen einzuleiten. Sehr heterogen zeigten sich auch die Leistungen der Schüler zwischen den verschiedenen Schulen, was sich auch auf die jeweilige Lehrmethode zurückführen lässt.

All diese Erkenntnisse über die Rechenstrategien, die Entdeckungen und die Schwierigkeiten der Schüler wurden durch die Analyse ihrer Lösungen aufgedeckt und im weiteren

Verlauf der Untersuchung berücksichtigt. Die Fehleranalyse spielte sowohl in dieser als auch in der weiteren Phase der Untersuchung eine bedeutende Rolle. Die Fehleranalyse dient dazu, die Fehlermuster frühzeitig zu erkennen, so dass dem Einüben und Festigen der Fehler vorgebeugt werden kann. Der Lehrer kann dadurch seinen Unterricht, die Effekte seines Unterrichts und die möglichen Ursachen für die Fehlleistungen seiner Schüler reflektieren und überdenken und adäquate Differenzierungs- und Fördermaßnahmen einleiten. Auf der Fehleranalyse und der daraus resultierenden Diagnose basierte auch das dreimonatige Unterrichtsexperiment, das im Anschluss an diese Phase der Untersuchung folgte. Mit Hilfe von sogenannten „Standortbestimmungen" wurde versucht, zunächst den Wissenstand der Schüler zu ermitteln, um darauf die neuen Kenntnisse aufzubauen und neue Fertigkeiten einzuüben. Ziel des Unterrichts war es, bestimmten Schülern, die erhebliche Schwierigkeiten oder auch gar keine Kenntnisse bezogen auf die schriftliche Division hatten, an das Niveau der Klasse zu führen, so dass sie schriftlich mit mehrstelligem Divisor dividieren lernten. Wie dieser Förderunterricht konzipiert wurde und auf welche Schwierigkeiten die Schüler stießen, soll im nächsten Kapitel beschrieben werden.

5 Der Unterricht

5.1 Einleitung

Es ist bekannt, dass in den griechischen Regelschulen auch eine Gruppe von Schülern zu finden ist, die Lernschwierigkeiten aufweisen. Von dieser Schülerpopulation ist in der einschlägigen Literatur die Rede und sie wird von den übrigen Kategorien sonderschulbedürftiger Schüler differenziert (Kipriotakis, 1989, S. 16; Kirk, 1973, S. 5 u. 25). Die Merkmale, die die traditionellen Kategorien sonderschulbedürftiger Schüler aufweisen, sind folgende: Sehensbeeinträchtigungen, Hörschäden, Beeinträchtigungen in der Sprache, körperliche Behinderungen, Verhaltensstörungen und geistige Behinderung. Lernschwierige Schüler können keiner dieser Kategorien zugeordnet werden, wenn sie nicht ähnliche zusätzliche Merkmale aufweisen. Man findet sie jedoch in den Regelschulen und meistens zurückgezogen am Klassenrand. Tatsache ist, dass ihre Entwicklung und ihr Fortschritt gehemmt werden, solange sie lediglich das gewöhnliche Unterrichtsprogramm mit durchlaufen (Kirk, 1973, S. 5). Der Schulbesuch hat unter solchen Bedingungen zur Folge, dass Schwierigkeiten in einem oder mehreren Fächern entstehen (Kipriotaktis, 1989, S. 58). Die Lernschwierigkeit resultiert aus der Unfähigkeit des Schülers seinen schulischen Verpflichtungen auf dem erforderlichen Lern- und Leistungsniveau zu entsprechen. Häufig drückt sich diese Schwierigkeit durch Senkung der Leistung eines Schülers unter das Niveau seines Entwicklungsstandes aus. Die Kluft zwischen den schulischen Anforderungen und seiner Leistung bestimmt den Umfang der Lernschwierigkeiten (Kipriotakis, ebd. S. 58). Um positive und effektive Ergebnisse zu erreichen, ist es notwendig, dass das Bildungsprogramm den Bedürfnissen der Schüler angepasst wird, so dass wieder eine reibungslose Beziehung zum Lernen hergestellt wird. Die sechs Schüler, die für den Förderunterricht ausgesucht wurden, werden dieser Schülergruppe zugeordnet. Ziel des Förderunterrichts war, auf die Schwächen und Schwierigkeiten der Schüler, die sie in der Arithmetik und speziell in der Division zeigten, einzugehen. Die Schwierigkeiten der Schüler konnten durch die genaue Analyse ihrer Fehler im Vortest und im Interview lokalisiert werden und in den folgenden Unterrichtsstunden aus der Nähe betrachtet werden.

5.2 Der Förderunterricht

Nachdem die Lernschwierigkeiten der betreffenden Schüler durch den Test und das Interview diagnostiziert und interpretiert worden waren, wurde als nächstes Ziel der Versuch unternommen, diese Schwierigkeiten zu beheben und ihnen die notwendigen Hilfen zu geben. Zu diesem Zweck wurde ein Förderunterricht geplant, der sowohl zeitlich als auch inhaltlich begrenzt sein sollte. Die Dauer des Förderunterrichts würde drei Monate nicht überschreiten und der Inhalt wurde auf den Algorithmus der Division beschränkt. Der Unterricht konnte jedoch nicht mit dem Verfahren der Division beginnen. Voraussetzung für das Erlernen dieses Algorithmus ist die Kenntnis der anderen Operationen, die notwendige Grundlagen für die Einführung der Division bilden. Daher war es angebracht, zunächst die übrigen Grundrechenarten und dann die Division zu behandeln. In diesen drei Monaten sollten die Schüler bestimmte Wissenselemente erwerben, um in der Lage zu sein, sich Lernsituationen und -angeboten zu stellen, mit denen sie sich zuvor nicht auseinandersetzen konnten. Sie sollten Fertigkeiten und Kenntnisse erwerben und damit sichere Grundlagen für ihr Weiterlernen erhalten (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 1996, S. 15) und die Gelegenheit nutzen, in ihren Klassen integriert zu werden, um im Unterrichtsgeschehen keine passiven Zuschauer sondern aktive Teilnehmer zu sein, etwas, was sie selbst wie auch ihre Lehrer seit langer Zeit aufgegeben hatten. Gleichzeitig bot sich für die Verfasserin die Gelegenheit, die Effektivität von bestimmten Vorgehensweisen zu überprüfen und sie gegebenenfalls durch neue Erkenntnisse zu ergänzen.

5.3 Die Arbeitsgruppen

Die Auswertung der Tests gab Hinweise auf eine Vielzahl von Schülern mit Lernschwierigkeiten. Die Verfasserin wählte mit Hilfe der Klassenlehrer sechs Schüler aus, die an dem Förderunterricht teilnehmen sollten. „Die nachfolgenden Fallbeispiele entstammen einer Praxis für Kinder mit Lernschwierigkeiten. Sie sind nicht ausgewählt, weil sie in irgendeinem Sinne repräsentativ für diese Kinder sind, sondern weil in ihnen die Bandbreite möglicher Symptome und Verursachungen deutlich wird“ (Lorenz, 1987, S. 2). Zunächst wurde nach dem Einverständnis der Eltern gefragt. Nicht alle Eltern waren bereit, ihr Kind zum Förderunterricht zu schicken. Ihrer Meinung nach brauchten ihre Kinder keine zusätzliche Förderung in diesem Fach. In diesen Fällen wurde auch nicht länger darauf bestanden, und es wurden andere Schüler gesucht. Den Förderunterricht haben insgesamt sechs Schüler besucht, die zwei Dreiergruppen zugeordnet wurden. Die Einteilung in die Gruppen erfolgte in Hinblick auf eine möglichst homogene Zusammensetzung. Die Schüler sollten ähnliche Lernbedürfnisse haben und wurden analog zu ihren Ergebnissen im Test und in den Interviews beiden Gruppen zugeordnet. Alle sechs Schüler hatten am Ende des vierten Schuljahrs am Vortest teilgenommen. Die erste Gruppe bildeten drei Schüler Chronis, Irini und Thodoris, die im Vortest einige Divisionen mit einstelligem Divisor bearbeitet hatten. Die zweite Gruppe bestand auch aus drei Schülern Stella, Nikos und Alexis. Diese konnten jedoch im Vortest keine Aufgabe bewältigen. An den Interviews, die nach dem Test stattgefunden hatten, nahmen drei von den Schülern teil.

Vor Beginn des Förderunterrichts wurde der Versuch unternommen, Informationen über diese Schüler zu sammeln. Schulschwierigkeiten werden nie allein durch die Person des Schülers bedingt. Es sind meistens auch nicht-kognitive Faktoren, die das Entstehen und die Manifestation von Lernstörungen verursachen (vgl. Sander, 1981, 1996). Das Umfeld des Schülers, besonders die Familie und die Schule spielen dabei eine wichtige Rolle. Deshalb wurden auch diese Bereiche untersucht. So wurden z. B. Gespräche mit den Eltern, dem derzeitigen Klassenlehrer und dem früheren Klassenlehrer (wenn es möglich war) geführt. Die Klassenlehrer waren diejenigen, die auch den Mathematikunterricht erteilten.

Es handelte sich um die „letzten der Klasse“, eine Kommentierung der Klassenlehrer. Viele Faktoren haben dazu beigetragen, dass sich nun diese Schüler am Rand ihrer Klassen befanden. Die Lehrer beschäftigten sich nur minimal mit ihnen und ihre Anwesenheit im Unterricht war selten zu spüren. Ihr Verhalten außerhalb des Klassenzimmers zeigte bis auf einen Schüler keine Abweichung. Es gab Momente, in denen sie ernsthaft und fleißig waren, kritisch und selbstbewusst handelten. In den familiären Umgebungen der Schüler fehlte jegliche Motivation für eine produktive Teilnahme am Unterricht und für eine erfolgreiche Schullaufbahn. Einige von diesen Schülern besuchten eine „Ganztagsschule“. So werden die Schulen benannt, die bis vier Uhr nachmittags in Betrieb sind. Das Schulprogramm dauert bis ein Uhr mittags. In den übrigen Stunden bleiben die Kinder berufstätiger Eltern in der Schule. Sie werden betreut von einem Lehrer, der mit ihnen die Hausaufgaben bearbeitet und sie mit verschiedenen Aktivitäten beschäftigt.
Nach der nötigen Absprache mit den Eltern dieser Schüler, ihrem Klassenlehrer, dem Schuldirektor und dem Schulrat begann der Förderunterricht in einem der Räume dieser Ganztagsschule. Jede Unterrichtsstunde dauerte für jede Gruppe 45 bis 50 Minuten. Insge-

samt wurden vier Stunden pro Woche drei Monate lang durchgeführt. Die Schüler besuchten alle regelmäßig den Unterricht und fehlten nur in Krankheitsfällen.

5.3.1 Ergänzende Informationen zu jedem Schüler

Nachfolgende Informationen über die Schüler ergänzen die Schülerpersönlichkeit, beschreiben die Familien- und Schulsituation und entfalten somit das Schülerprofil. Die Namen der Kinder sowie einige familiäre Daten wurden geändert bzw. kurz und undetailliert beschrieben, um die Anonymität der Probanten zu gewährleisten.

5.3.1.1 Erste Gruppe

Chronis ist der älteste Sohn der Familie. Der Vater verbringt die meiste Zeit fern von seiner Familie, bedingt durch seine Arbeit als Ungelehrter. Er hat zwar eine Ausbildung abgeschlossen, ohne jedoch in diesem Bereich berufstätig zu sein. Chronis Mutter ist Hausfrau (ohne weitere Ausbildung) und hat die Erziehung und Betreuung ihrer zwei Kinder (sie hat auch eine Tochter) übernommen, was sie manchmal überfordert. Chronis ist überbehütet, egozentrisch, vermeidet es sich anzustrengen und wehrt sich gegen schulische Anforderungen. Er zeigt großes Interesse daran, den Unterricht zu stören. In der Klasse ist er unruhig und zeigt geringes Interesse für seine schulischen Angelegenheiten. Er kommt auch oft in Konflikt mit anderen Mitschülern.

Thodoris ist ebenfalls der älteste Sohn der Familie und hat einen kleinen Bruder, der den Kindergarten besucht. Der Vater ist als Handwerker beschäftigt und erwarb den Hauptschulabschluss. Nach der Arbeit bleibt er mit den Kindern zu Hause. Die Mutter ist nach der Scheidung ihrer Eltern in einem Heim groß geworden und arbeitet nun als Pflegerin. Bei seinen Hausaufgaben kann Thodoris nur Hilfe von seiner Mutter bekommen, da der Vater nicht über die nötigen Kenntnisse verfügt. Die Mutter kommt aber spät nach Hause und es bleibt ihr nicht viel Zeit, um ihren Sohn bei den Schulaufgaben zu betreuen. Thodoris hat große Lücken, was ihn aber nicht daran hindert, konsequent seine Schulaufgaben zu erledigen und Interesse und Willen für weiteres Lernen zu zeigen. Er hat ein sehr niedriges Selbstkonzept in Bezug auf seine schulischen und besonders die mathematischen Leistungen. In seinem bisherigen Wissen ist er sehr unsicher. In seiner Freizeit treibt er Sport (spielt in einem Fußballverein) und besucht einen Computerkurs. In der Klasse ist er kein Unruhestifter, aber er lässt sich leicht von seinen Mitschülern mitreißen. Er imitiert das Verhalten seiner Freunde.

Irini ist die einzige Tochter aus der zweiten Ehe ihrer Mutter. Aus der ersten Ehe hat sie große Geschwister, die schon ihre eigenen Familien haben. Sie ist ein verwöhntes Kind, das alle Wünsche erfüllt bekommt. Sie ist kontaktfreudig und gesprächig. Ihre Kenntnisse in Mathematik sind oberflächlich, instabil und lückenhaft. Die Beziehungen zwischen den Zahlen und den arithmetischen Operationen sind für sie etwas Mysteriöses. Die Eltern haben ein falsches Bild vom Leistungsniveau ihrer Tochter. Sie rechtfertigen ihre Lernschwierigkeiten mit der Komplexität des Faches und wollen sie nicht überanstrengen. Die Mutter hat zeitweise versucht, ihr zu helfen, doch sie wurde oft handgreiflich und unterließ weitere Förderversuche. Sie meint, Mathematik wäre nichts für ihre Tochter und somit waren die Defizite von Irini naturgegeben.

5.3.1.2 Zweite Gruppe

Nikos ist der zweite und jüngste Sohn der Familie, es besteht ein großer Altersunterschied zu seinem ältesten Bruder. Auch er wird von seinen Eltern verwöhnt. Er ist klein gebaut und häufig krank. Seine Eltern haben kein festes Einkommen und versuchen, die Ausgaben der Familie aus gelegentlichen Jobs zu finanzieren. Mit größerem Einsatz könnte Nikos dem Schulunterricht folgen, für ihn haben aber außerschulische Aktivitäten den Vorrang. In sportlichen Aktivitäten (Fußball) zeigt er sehr gute Leistungen und verbringt viele Stunden am Nachmittag damit, womit auch seine Eltern einverstanden sind. Bei seinen Hausaufgaben wird Nikos von seinem größeren Bruder betreut. Die Familie wohnt mit den Großeltern. So übernimmt auch meistens die Großmutter die Betreuung der Hausaufgaben von Nikos.

Stella ist Tochter einer Mutter, die nach zwei gescheiterten Ehen nun alleinerziehende Mutter ist. Sie arbeitet im kaufmännischen Bereich und kann nur mit ihrer Tochter zusammen sein, wenn ihre Schicht es erlaubt. Oft bleibt Stella alleine zu Hause oder mit ihren Großeltern. Betreut wird sie bei ihren Hausaufgaben von ihrem Großvater oder ihren älteren Geschwister, die ihre eigenen Familien gegründet haben. Sie genießt es, Gesellschaft zu haben und Geborgenheit zu fühlen. Auch sie hat große Wissenslücken und ist unsicher, was ihre Leistungen anbelangt. Ihre Teilnahme am Unterricht ist gering, ihre Antworten und Bemerkungen bezugslos. Für Gruppenarbeiten zeigt sie erhöhtes Interesse. Doch sie kann sich schwer auf ihre Arbeit konzentrieren. Jeder Lärm im Raum, jede Bewegung unterbricht ihre Konzentration. Sie hat außerschulische Interessen (Sport- und Tanzkurs), von denen sie stolz erzählt.

Alexis ist das erste Kind der Familie und hat noch zwei kleinere Geschwister. Der Vater besitzt ein kleines Dienstleistungsunternehmen, und die Mutter ist Hausfrau. Die Familie gehört einer besonderen religiösen Gemeinschaft an und unterscheidet sich dadurch von den anderen Familien. Das ist auch ein wichtiger Grund dafür, dass Alexis von seinen Mitschülern und Altersgenossen zurückgewiesen und mit Ironie behandelt wird. In der schulischen Umgebung ist er ein Einzelgänger mit ein oder zwei Freunden. Seine Haltung ist entsprechend der Ablehnung, die er täglich ertragen muss, sehr abweisend und negativ. Anfangs machte er den Eindruck eines autistischen Kindes, ein Eindruck, der sich aber nicht bestätigte. In der Schule fällt er wegen seiner Verträumtheit und Unaufmerksamkeit auf. Im Unterricht ist er völlig teilnahmslos und zeigt kein Interesse für alles, was in der Klasse abläuft. Sein Desinteresse wird durch das gestörte Verhältnis zu seinem Lehrer verstärkt. Sein schulisches Wissen ist im Gegensatz zu seinem Wissen über seine Religion gering. Manchmal fällt es ihm schwer, morgens aufzustehen und in die Schule zu gehen, weil er zu spät ins Bett geht. Er schläft sich aus und bleibt zu Hause. Die Mutter äußerte hierzu, sie könne ihn nicht jedes Mal schlagen um ihn zu überreden. Also verbringt er seine Zeit spielend vor dem Computer, was zu seinen täglichen Beschäftigungen zählt. Er geht wenig aus dem Haus und wenn dann nur um sich mit seinen wenigen Freunden aus der Nachbarschaft zu treffen. Die Eltern haben die Unaufmerksamkeit und Resignation ihres Sohnes akzeptiert und hoffen nur, dass er den Hauptschulabschluss erreicht. Für die Schule lernt er überhaupt nicht. Es gibt Lehrer, die in seiner Klasse unterrichten und seine Stimme noch nie gehört haben.

Die Eltern dieser Schüler sahen in dem bevorstehenden Förderunterricht eine unerhoffte Hilfe, die ihren Kindern angeboten wurde. Sie erklärten sich bereit, mit allen Mitteln zu helfen und waren während dieser Zeit immer ansprechbar. Diese wenigen Informationen schildern das schulische und familiale Umfeld der Schüler und helfen, ihre emotionale und motivationale Befindlichkeit und ihre damit zusammenhängende kognitive Leistungsfähigkeit zu verstehen (vgl. Sander, 1996, S. 64). Eine Konzentration allein auf das Lern- und Leistungsverhalten der Schüler wäre hier nicht ausreichend. Dieses erste Kennenlernen der Schüler war für die Planung des Interventionsprozesses, des Förderunterrichts notwendig. Ihre besonderen Gefühle, Einstellungen, Persönlichkeitsmerkmale und Verhaltensweisen wurden berücksichtigt. Die psychischen Merkmale bilden die emotionale Welt der Schüler, die sich bedeutend auf das Lernen auswirkt. Absicht der Verfasserin war es, von Anfang an eine möglichst reibungslose Beziehung zu jedem Schüler aufzubauen. Auf der anderen Seite wurden Maßnahmen für die Verbesserung der kognitiven Leistungsfähigkeit der Schüler getroffen. Ihre Leistungen im Test und in den Interviews und die daraus resultierenden Schwierigkeiten bestimmten die Lernhilfen, die für diese Schüler ausgewählt wurden.

5.4 Lehrinhalte des Förderunterrichts

Zu Beginn des Förderunterrichts sollte zunächst kein detaillierter Plan über das gesamte Lehrprogramm gemacht werden (vgl. Sander, 1980; 1996). Ein grober Ablauf der ausgewählten Einheiten war bekannt. Beginnend von der Addition würden alle Rechenoperationen bis hin zur Division behandelt werden. Der Umfang und der Inhalt jeder Einheit war jedoch nicht im Vorhinein zu bestimmen. Es fehlten präzise Informationen über den Kenntnisstand der Schüler, die erst im Laufe des Förderunterrichts exakt erhoben wurden. Die vorhandenen Kenntnisse der Schüler bestimmten in jeder Phase die Auswahl der Lehrinhalte und den Übergang in die nächste Phase. Gerade „zurück gebliebene" Schüler bringen häufig sporadische, manchmal diffuse Wissenselemente mit, die jedes Mal berücksichtigt werden müssen. Ausgangspunkt der unterrichtlichen Aktivitäten waren also die Vorkenntnisse der Schüler. Gleichzeitig wurde das Augenmerk auf die auftretenden Fehler gerichtet und es wurde der Versuch unternommen, das Verständnis der Schüler bezogen auf die fehlerbehafteten Lerninhalte zu verbessern. Im Sinne von Lorenz (1997) handelte es sich also um einen diagnostischen Förderunterricht.

Jedoch war die Behandlung der ausgewählten Themen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) nicht in mehreren Durchgängen möglich, wie das im herkömmlichen Unterricht nach dem Spiralprinzip realisiert wird. Nach der Einführung eines Themas folgte die Übungs- und danach die Anwendungsphase. Erst nachdem sich die Schüler mit dem jeweiligen Thema erfolgreich auseinandersetzen konnten, wurde zum nächsten Thema übergegangen. Diese übergeordneten Themen bildeten die Lernsequenzen, die in bestimmter Anordnung und zeitlicher Abfolge erarbeitet wurden. Im Sinne von Gagné (1975, S. 188 ff.) waren dies die nötigen Lernhierarchien, die es erlauben, den Lernvorgang in Sequenzen zu strukturieren und die einzelnen Teilziele zu planen, um an das Endziel zu gelangen. Da im Förderunterricht, der zeitlich begrenzt war, die Wissenslücken der Schüler gefüllt werden sollten, musste jede Lernsequenz gesichert werden, um dann mit einer neuen fortzufahren. Das fordert auch die Fachstruktur der Mathematik, in der die einzelnen Wissenselemente eine Kette bilden. Die „Blockierungen" dieser Schüler in diesem Fach traten hervor, als sie über bestimmte vorauszusetzende Fertigkeiten nicht verfügten. Da Lernen kumulativ ist, konnten sie auf ihren Lücken nicht mehr aufbauen. Daher war es notwendig, jede Lernsequenz sorgfältig zu bearbeiten und abzusichern. Auf diese Weise sollten untergeordnete Fähigkeiten verfügbar gemacht werden, die zum Erwerb der übergeordneten Fähigkeiten beitragen würden.
Insgesamt wurden vier Etappen im Förderunterricht festgelegt. Die folgende Tabelle soll einen Überblick über die ausgewählten Lehrinhalte geben.

Phasen	Inhalte
1. Addition	Zehnerergänzungen, additive Zerlegungen der einstelligen Zahlen, Zehnerüberschreitung, dekadische Analogie, Verdopplungsaufgaben, Stellenwerte, halbschriftliche Addition, schriftliche Addition.
2. Subtraktion	Zehnerunterschreitung (Rechenwege), halbschriftliche Subtraktion, schriftliche Subtraktion ohne Übertrag, schriftliche Subtraktion mit Übertrag, Abziehen von der Null.
3. Multiplikation	Einmaleinsreihen und Hilfen zu ihrer Erlernung, flexibles Erarbeiten der Einmaleinsreihen durch die Kernaufgaben, schriftliche Multiplikation.
4. Division	Grundaufgaben der Division, Division durch einstelligen Divisor ohne und mit Rest, Runden und Abschätzen des Ergebnisses, Rechenkontrollen, Null im Quotienten oder Divisor, Division durch zweistelligen bzw. dreistelligen Divisor.

Tabelle 23: Übersicht des Unterrichtsablaufs und der Lerninhalte

Auf den folgenden Seiten werden die Einheiten so beschrieben, wie sie im Unterricht behandelt wurden. Es wird gleichzeitig Bezug auf das Schülerverhalten und ihre Verständnisschwierigkeiten genommen, die während der Unterrichtszeiten beobachtet wurden. Das folgende Unterrichtskonzept stellt eine Alternative zur Auseinandersetzung mit diesen Themen dar und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

5.5 Phase 1. Einführung der Addition

Die einzigen Informationen, die über diese Schüler zur Verfügung standen, waren die Beschreibungen und Bewertungen der Klassenlehrer in ihrer bisherigen Laufbahn, ihre Leistungen im Vortest und in dem Interview. Bis zur Durchführung des Unterrichtsprojektes waren jedoch drei Monate vergangen und zu diesem Zeitpunkt, genauer zu Beginn des neuen (fünften) Schuljahres, waren ihre genauen Fähigkeiten nicht bekannt. Auf die Frage der Verfasserin, welche Operation die Schüler als die leichteste empfanden, wurde von allen die Addition genannt. Mit Selbstverständlichkeit und Lachen behaupteten sie, dass sie damit keine Schwierigkeiten hätten. Dies sollte in der Folge auch in der Praxis überprüft werden. Für diese und für jede neue Einheit wurde ein Arbeitsblatt mit einigen Aufgaben im Sinne einer Standortbestimmung für das jeweilige Thema gegeben. Dies würde Aufschluss über die vorhandenen Kenntnisse der Schüler geben (vgl. Wittmann & Müller, 1994b, S. 97). Entsprechend würden Entscheidungen für die Auswahl der Inhalte und die Unterrichtsplanung getroffen werden und die Informationen würden das Schülerprofil ergänzen.

Für diese Standortbestimmung wurden fünf Additionsaufgaben ausgewählt, die aus einer früheren Untersuchung stammen (vgl. Chatzigeorgiou, 1990, S. 21).

$$\text{a.}\ \begin{array}{r} 537 \\ +\ \underline{342} \end{array} \qquad \text{b.}\ \begin{array}{r} 203 \\ 122 \\ +\ \underline{351} \end{array} \qquad \text{c.}\ \begin{array}{r} 539 \\ +\ \underline{243} \end{array} \qquad \text{d.}\ \begin{array}{r} 345 \\ +\ \underline{487} \end{array} \qquad \text{e.}\ \begin{array}{r} 288 \\ 205 \\ +\ \underline{129} \end{array}$$

Es handelt sich bei den ersten zwei Aufgaben um Additionen ohne Überschreitung (a. und b.) mit zwei und drei Summanden. Die übrigen drei Aufgaben enthalten Überschreitungen. Der Übertrag befindet sich an der Einerstelle in der dritten Aufgabe (c.) und bei der Einer- und Zehnerstelle zugleich in der vierten und fünften Aufgabe (d. und e.). Die Aufgaben wurden zunächst mündlich vorgelesen, so dass Erkennen und Schreiben der Zahlen überprüft werden konnte.

Die erste Aufgabe wurde von vier Schülern richtig gelöst. Eine Schülerin (Stella) hatte Schwierigkeiten beim Schreiben der Zahlen und schrieb 5337 statt 537. Die Rechnung mit dieser Zahl war fehlerfrei. Ein Schüler (Alexis) addierte fälschlicherweise einen Übertrag bei der Hunderterstelle und erhielt so das Ergebnis 9.

Bei der zweiten Aufgabe gab es wiederum vier richtige Ergebnisse. Ein Schüler (Chronis) erhielt 476 statt 676 als Ergebnis, weil er die Ziffer 2 in der Hunderterspalte der obersten Zahl übersehen hatte. Stella schrieb 2003 statt 203 und 1222 statt 122, rechnete aber mit diesen Zahlen richtig.

Zwei falsche Antworten gab es auch bei der dritten Addition. Eine Schülerin (Irini) addierte neun plus drei und notierte eine Drei und eine zweite Schülerin (Stella) fand bei der Einer- und Zehnerstelle je um eine Ziffer abweichende Ergebnisse (neun plus drei berechnete sie als elf und fünf plus drei als neun).

Bei der vierten Aufgabe gab es drei falsche Lösungen. Ein Schüler (Alexis) berechnete den Übertrag von den Einern nicht mit bei den Zehnern und fand 822. Irini addierte fünf plus sieben und notierte eine Null, so dass sie 830 als Ergebnis erhielt. Stella addierte neun plus vier und notierte eine Vier und errechnete 842.

Bei der letzten Aufgabe gab es nur eine richtige Lösung. Drei Schüler addierten bei der Hunderterstelle einen zu großen Übertrag. Nikos und Thodoris addierten zwei statt einen Übertrag und bekamen 722 statt 622 und Chronis addierte drei mal die Ziffer zwei und bekam 822. Irini hat jedes Mal die Zehnerziffer der Teilsummen notiert und die Einerziffer übertragen. Sie erhielt bei der Einerstelle dreiundzwanzig, notierte die Zwei und behielt die Drei als Übertrag. Bei der Zehnerspalte erhielt sie dreizehn, notierte die Eins und hatte als Übertrag die Drei, die mit den anderen Hunderterziffern acht ergab. So war ihr Ergebnis 812. Stella schrieb die Zahlen falsch und als sie es bemerkte und diese korrigierte, vergaß sie bei der Zahl zweihundertfünf die Ziffer zwei, die sie vorher wegradiert hatte. Sie vergaß, den Übertrag von der Zehner- zur Hunderterstelle zu übertragen und so ergab sich 322.

Bei diesen Aufgaben zeigte sich, dass die Überträge den Schülern Schwierigkeiten bereiten. Entweder addierten sie den falschen Übertrag (zu klein oder zu groß) oder sie vergaßen ihn. Auch das Schreiben von großen (dreistelligen und mehrstelligen) Zahlen wurde von manchen nicht beherrscht. Das Addieren von einstelligen Zahlen mit und ohne Zehnerüberschreitung scheinte problematisch zu sein. Die Ergebnisse unterschieden sich von den richtigen Ergebnissen um eins, was auf zählendes Rechnen deutet, das nicht richtig angewendet wurde.

In den nächsten Tagen offenbarten sich die Schwächen der Schüler. Das zählende Rechnen, gestützt auf die Finger, war die einzige Methode, über die sie verfügten. Das wollten sie jedoch nicht offen zeigen oder zugeben. Doch jedes Mal, wenn etwas berechnet werden sollte, verschwanden die Finger unter den Schreibtischen. Die Ergänzungen der einstelligen Zahlen zum Zehner konnten nicht spontan aufgesagt werden. Es fehlte jede Art von inneren Vorstellungen. Die Summe einstelliger Zahlen ohne Zehnerüberschreitung musste zuerst berechnet werden, war also noch nicht automatisiert. Die additiven Zerlegungen der Zahlen waren auch im Zehnerraum nicht bekannt. Die Mehrheit der Schüler konnte die Zahlen bis zum Tausenderraum fehlerfrei schreiben, die Stellenwerte konnten sie aber auch bei zweistelligen Zahlen nicht erkennen. Als sie aufgefordert wurden, die Zehner- oder Hunderterspalte an geschriebenen Zahlen zu zeigen, handelten sie zufällig. Das stellengerechte Schreiben der Stellenwerte untereinander bereitete ihnen keine Schwierigkeiten, solange die Summanden dieselbe Stellenzahl hatten. Bei der mündlichen Vorgabe der Zahlen zweihundertfünfundsiebzig (275) und zwei (2) und der Aufforderung diese schriftlich zu addieren, gaben zwei Schüler folgende Notation:

$$\begin{array}{l} \;\;275 \\ \underline{+\;2\;\;\;\;\;\;} \end{array}$$

wobei sie sagten, dass man vom Anfang beginnen muss. Diejenigen, welche die richtige Notation fanden, konnten diese nicht begründen, sondern sagten, man müsse immer von hinten beginnen. Kopfrechnen war für diese Schüler unmöglich. Um eine einstellige mit einer zweistelligen Zahl zu addieren, mussten sie die Zahlen zunächst aufschreiben und dann schriftlich addieren, da sie die horizontale Operation nicht durchführen konnten.
Die Kenntnisse der Schüler waren sehr beschränkt in Vergleich zu ihrem Alter und ihrem kognitiven Entwicklungsstand. Es wäre nicht übertrieben, wenn man sie mit einem starken Erstklässler oder einem mittleren Zweitklässler vergleichen würde. Natürlich besaßen diese

Schüler auch weitere Kenntnisse höheren Grades. Diese waren jedoch nicht einheitlich, sondern unsystematisch, unkoordiniert und unorganisiert und abgesondert von der Fachstruktur, so dass innere Verflechtungen, Assoziationen und Verbindungen nicht möglich waren.
Die ersten Themen demnach waren die Beziehungen der Zahlen im Zwanzigerraum und der Stellenwert der Zahlen. Die Intention war, die Schüler in Kontakt mit den Zahlen zu bringen, diese ihnen vertraut zu machen, um ohne Furcht und Angst mit ihnen arbeiten zu können. Nach Meinung der Verfasserin sind das Verständnis der einstelligen Zahlen und ihre Beziehungen zueinander, die Überschreitung des Zehners bei Addition und Subtraktion und das Einmaleins die Grundlagen für die Arithmetik der Primarstufe. Alles Übrige kann leicht hierauf aufgebaut werden.

Begonnen wurde mit *den Ergänzungen der einstelligen Zahlen zum Zehner*. Als Ausgangspunkt wurde die Zehn gesetzt, weil sie ein wichtiger Punkt in unserem Zehnersystem und Anhaltspunkt bei der Über- bzw. Unterschreitung des Zehners ist. Hier wurden Steckwürfel eingesetzt, die die Schüler schon aus den vorigen Klassen kannten und die übliche Vorgehensweise wurde befolgt. Mit zweifarbigen Steckwürfeln konstruierten sie alle möglichen Kombinationen, um den Zehner zu erhalten. Dabei wurden sie aufgefordert, ihre Handlungen zu verbalisieren. Nach den Handlungen mit dem Material wurde dieses zur Seite gelegt, und es folgte die mündliche Übung. Nur an den Stellen, wo die Schüler nicht fortfahren konnten oder eine falsche Antwort gaben, wurden sie angehalten, die Würfel zu benutzen. Um die inneren Bilder und Vorstellungen bewusst zu machen und zu festigen, wurden danach die Augen geschlossen und die Schüler sollten die vorgegebene Zahl und ihre Ergänzung in ihrem Kopf bilden und ihre Antwort an den Steckwürfeln bestätigen. Diese Verinnerlichungen sind das Fundament für die Einsicht (oder die Eintrittskarte) in die Welt der Zahlen und das Kopfrechnen in der Folge, sie werden im Schulalter schrittweise erworben. Auf kognitive Schemata stützt sich auch jeder Erwachsene, obwohl es ihm nicht immer bewusst ist.

> “I encourage the children to develop `mental images‘ - ´pictures‘ in their minds. Some find this difficult, but children, and adults, do have mental images. Ask any group of people a complex (particularly spatial) question and you will often see them shut their eyes, or roll them up to the ceiling. Are they looking for pictures in their minds? I think they are“ (Atkinson, 1992, S. 47).

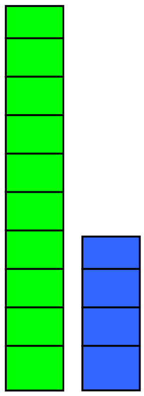
Dies sollte auch diesen Kindern ermöglicht werden. Dieser ersten Phase, dem Erfassen von Objekten und das Hantieren mit ihnen, wurde die größte Bedeutung beigemessen. Erst danach schloss sich die schriftliche Phase an, in der das Geübte schriftlich eingeübt werden sollte. Bis zu diesem Zeitpunkt hatten die Schüler den Eindruck, dass alles ein Spiel war und dass nun Mathematik begann.

> “Most of the children had only experienced maths as something that you do on pieces of paper so it was all very different for them. ...Having done this activity, I now know to hide the pencil and paper and only bring it out when the children have explored the apparatus, so that they can record what they have done. This keeps the attention on `doing and talking‘, so they are thinking mathematically“ (Atkinson, 1992, S. 97).

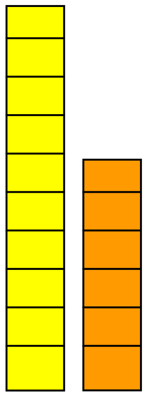
In der schriftlichen Phase wurden symbolische Darstellungen eingesetzt und die Schüler bildeten Gleichungen, lösten Ergänzungsaufgaben und füllten Zahlenhäuser aus.

Zahlenhäuser	Gleichungen	Ergänzungsaufgaben
10		
4 *6*	4+6=	3+_=10
5	2+8=	6+_=10
3	…	…
7		
2		

In der mündlichen und in der schriftlichen Übungsphase standen die Steckwürfel den Schülern zur Verfügung.



4+_=10



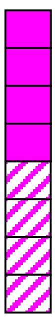
_+6=10

Von der gebildeten Zehnerreihe nebenan berechneten die Schüler die Ergänzungen.

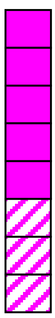
In entsprechenden Sachkontexten erfolgte die Vertiefung und Anwendung. Sachaufgaben der Form „Eine Klasse hat 10 Schüler. Wie viele von ihnen können Mädchen und wie viele Jungen sein?“ förderten die Argumentationsfähigkeit und regten zur Erkundung an. Als es sichergestellt war, dass die Schüler den Zehnerraum beherrschen, wurden Erweiterungen bis zum Tausenderraum durchgeführt, wodurch die Einsicht in die dekadische Struktur vermittelt werden sollte.

In dieser Art wurden die Ergänzungen nicht nur für den Zehner, sondern auch für einstellige Zahlen gefunden. Und so wurde das zweite Hauptthema vorbereitet, die *additiven Zerlegungen der Zahlen*. Für vorgegebene Zahlen wurden alle Zerlegungsmöglichkeiten gesucht. Absichtlich wurden die Zahlen nur in zwei Summanden zerlegt, da das Aufsuchen von mehreren Summanden nicht zu den Zielsetzungen dieses Unterrichts beitragen würde. Es wurden wieder konkrete Handlungen an den Steckwürfeln durchgeführt und wie bei den Zehnerergänzungen mit sachbezogenen Kontexten abgeschlossen. Bei der Bildung der Zerlegungen wurden zwei Farben bei den Steckwürfeln benutzt, um die Ergänzungen hervorzuheben und auch das operative Verändern der Summanden zu verdeutlichen.

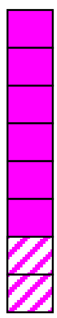
8=4+4



8=5+3



8=6+2



Bis zu diesem Punkt gingen die Summen der Zahlen nicht über den Zehnerraum. Um die *Zehnerüberschreitung* zu thematisieren, wurden Summen mit einstelligen Zahlen gegeben, die über die Zehn hinausgingen und die Schüler wurden aufgefordert, diese zu berechnen. Die einzige Strategie, die sie anwendeten, war das Vorwärtszählen gestützt auf die Finger, ohne immer vom größeren Summanden aus weiterzuzählen. Neben den Würfeln wurden Plättchen und das Zwanzigerfeld präsentiert. Das Legen und Lösen der Aufgabe waren ihnen überlassen. Die Schüler haben die Aufgaben unterschiedlich und vielfältig gelegt. Die vorgezeichnete Zehnerreihe am Zwanzigerfeld und die gefertigte Zehnerreihe bei den Steckwürfeln gaben Hinweise auf das lineare Legen der Zahlen. So gelangten die Schüler zur Bildung des Zehners. Hier wurde wieder die dekadische Analogie genutzt, um die Überschreitung im Hunderterraum zu erweitern und es entstanden operative Aufgabenserien (9 + 3, 19 + 3, 29 + 3,...), die die Schüler mit großer Freude bildeten.

Nachdem diese Strategie begriffen worden war, folgte das Verdoppeln und Halbieren im Zwanzigerraum. Gleichzeitig wurden auch die Verdopplungsaufgaben (als Spezialfall der Addition) geschrieben und an Hand dieser wurden die Nachbaraufgaben gerechnet. Die Schüler waren begeistert, da sie die Ergebnisse und ihre Veränderung leicht begründen konnten. Nun hatten sie neben dem Vorwärtszählen auch die Bildung des Zehners und die Verdopplungsaufgaben als Stützpunkte für die Addition mit Zehnerüberschreitung. Das, was sie nun brauchten, war ein Fazit, welches sie allein nicht ziehen konnten. Alle Rechenwege konnten sie mit Richtigkeit anwenden und verbalisieren. Schwierig war für sie das Notieren der Schritte mit arithmetischen Symbolen (Termen), was mit Hilfe der Verfasserin vorgenommen wurde. Sie hatten Schwierigkeiten beim Setzen des Plus- und Gleichheitszeichens an der richtigen Stelle und beim Schreiben aller Teilschritte.

Als Erweiterung des Zwanzigerraums wurden die Vielfachen von 10 und 100 eingeführt. Beim Vor- und Rückwärtszählen der Zehner- und Hunderterzahlen hatten die Schüler keine Schwierigkeiten, also wurde zum nächsten Thema, dem *Stellenwert* und der *Zahlenbildung* übergegangen. Die Unterscheidung der Stellenwerte wurde an konkretem Material vorgenommen. Dafür wurden Streichhölzer in Zehner und Hunderter gebündelt und wieder auseinandergelegt. Das Verbalisieren der Handlungen war erleichternd und unerlässlich für das Verständnis der Stellenwerte. Das Vorzeigen des Meterstabes war hier auch sehr hilfreich. Nachdem die Bedeutung der Stellenwerte und ihrer Beziehungen zueinander klar herausgestellt war, erfolgte die Analyse von Zahlen in ihren Stellenwerten. Bestimmte Zahlen wurden vorgegeben, mit Streichholzbündeln und Münzen gelegt, mündlich beschrieben und dann schriftlich festgehalten (237 = 2H 3Z 7E = 237E).

Die Kenntnis der Stellenwerte war Voraussetzung für das nächste Thema, die *halbschriftliche Addition* mit zweistelligen Zahlen. Durch Handlungen an Material (Streichholzbündeln) wurden alle Rechenwege entdeckt, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$
\begin{aligned}
24 + 17 &= 20 + 10 + 4 + 7 && \text{(Stellenwerte extra, Zehner plus Zehner)}\\
&= 4 + 7 + 20 + 10 && \text{(Stellenwerte extra, Einer plus Einer)}\\
&= 24 + 10 + 7 && \text{(Zehner erst)}\\
&= 24 + 7 + 10 && \text{(Einer erst)}\\
&= 17 + 20 + 4 && \text{(Zehner erst, Beginn mit der zweiten Zahl)}
\end{aligned}
$$

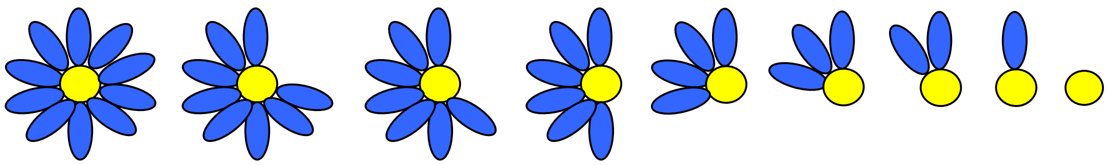
Die Verfasserin unterstützte die Schüler beim Suchen neuer Strategien. Mit diesen Strategien wurde auch das Kopfrechnen geübt. Die Schwierigkeit der Schüler bestand im Behalten der Zwischenergebnisse. Deshalb wollten sie die Summanden immer aufschreiben, um diese vor ihren Augen zu haben. Von allen Rechenwegen wurden die „Stellenwerte extra“

und „Zehner erst“ bevorzugt. Im Verlauf der Übungen einigten sich auch diejenigen, die die Strategie „Zehner erst“ benutzten, auf die „Stellenwerte extra“. Diese war einfacher, da man beim letzten Schritt eine reine Zehnerzahl mit einer Zehner-Einerzahl addieren muss (was nur die Zehnerziffer verändert), statt eine Zehner-Einerzahl mit einer Einerzahl (wobei die Ziffern beider Stellenwerte verändert werden können).

Die Arbeit hatte eine spielerische Form, und es wurde angestrebt, dass sie keine großen Ansprüche stellte und den Schülern Spaß machte. Gespielt wurde während des Erarbeitens der Addition mit den Zahlenkarten und den Zahlenblumen. Mit den Zahlenkarten wurde das Spiel „Werfen und Legen“ gespielt, das die additiven Zerlegungen der Zahlen im Zwanzigerraum übt. Auf den Tisch wurde eine Zahl geworfen und eine additive Zerlegung dieser Zahl aus der Menge der Karten genommen.

5+3	6+2	8

Dabei wurde immer gesprochen: „Ich lege die Acht und nehme die Sechs plus zwei.“
Die Zahlenblumen waren aus farbigem Karton gefertigte Blumen mit maximal zehn Blättern. Die Anzahl der Blätter schwankte zwischen null und zehn. Damit sollten die Ergänzungen der Zahlen zum Zehner geübt werden. Gleichzeitig dienten sie als Veranschaulichungsmittel für die Stellenwerte.



Besonders beliebt waren bei den Schülern Aufgaben, an denen sie etwas erraten oder herausbekommen sollten. Solche wurden bei der Analyse der Zahlen in ihren Stellenwerten angewendet, und zwar in dieser Form:“ Ich habe eine Zahl im Kopf, die drei Zehner, zwei Einer und fünf Hunderter hat. Wie heißt die Zahl?“

Schließlich wurde die schriftliche Addition eingeführt. Das stellengerechte Schreiben der Zahlen untereinander kam sehr natürlich und die meiste Aufmerksamkeit wurde den Überträgen geschenkt, die immer notiert werden mussten, da Fehler sonst nicht vermieden werden konnten.

Sehr viel Zeit wurde auf die Ergänzungen der einstelligen Zahlen zum Zehner, die additiven Zerlegungsmöglichkeiten der Zahlen und das Überschreiten des Zehners verwendet. In dieser Phase war es notwendig, „Zeit zu verlieren, um später Zeit zu gewinnen“ (Lehrerbuch 1. Klasse, S. 164). Diese Beharrlichkeit beruht auf der Überzeugung, dass diese Kenntnisse Grundlage und Fundament für das Erlernen der Rechenoperationen bilden und wichtige Strukturelemente derer sind. Dies soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden:

$$\begin{array}{r} 257 \\ \underline{+\ 98} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1029 \\ \underline{-53} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ \underline{x\ \ 14} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 249 & \underline{9} \\ \underline{-18} & 27 \\ 69 & \\ \underline{-63} & \\ 6 & \end{array}$$

Die Lösungen dieser Aufgaben basieren auf den Ergänzungen zum Zehner, den Zahlenzerlegungen, der Unterschreitung des Zehners und dem Einmaleins.

Es muss an dieser Stelle betont werden, dass die Vorgänge zum Erwerb des Zahlenverständnisses von den Schülern eingesehen, jedoch nicht automatisiert wurden. Dies war aus den Antworten der Schüler zu ersehen. Jedes neue Wissenselement, das erworben wurde, ließ die vorigen Kenntnisse verblassen. Diese Feststellung machte dauernde Wiederholung nötig. Tatsache war jedoch, dass die Schüler eine Geläufigkeit in der Addition gewonnen hatten. Alles deutete darauf hin, dass sie nun mehr mit der Subtraktion würden fortfahren können.

5.6 Phase 2. Einführung der Subtraktion

In der zweiten Phase folgte die Subtraktion. Im Vortest hatte sich gezeigt, dass manche Schüler bei den Divisionen die Teilprodukte von den Teildividenden falsch abgezogen hatten. An dieser Stelle werden diese Fehler wieder ins Auge gefasst. Es waren folgende:

S_1= Fehler in Subtraktionen ohne Zehnerübergang
S_2= Fehler in Subtraktionen mit Zehnerübergang
S_3= Fehler beim Abziehen von der Null
Q_2= Größere Quotientenziffer. Durch das Setzten einer großen Quotientenziffer ergab sich ein Teilprodukt, das größer als der zugehörige Teildividend war. Die Schüler bemerkten nicht, dass sie eine Zahl von einer darüberstehenden kleineren Zahl subtrahierten und fuhren wie gewöhnlich fort. Beim letzten Schritt der Subtraktion borgten sie sich eine Ziffer, ohne dass diese im Teildividenden existierte.

Die bereits für die Addition durchgeführte Standortbestimmung wurde auch hier angewendet. Für die Standortbestimmung in der Subtraktion, die im Vergleich zur Addition eine viel komplexere Operation ist, wurden zwei Arbeitsblätter verteilt. Das erste beinhaltete fünf Subtraktionsaufgaben, die keinen Übertrag erforderten. Diese waren folgende Aufgaben:

486	978	1030	1009	43
a. - 231	b. - 301	c. - 20	d. - 8	e. - 102

Die einzigen Schwierigkeitsmerkmale waren die ungleiche Stellenzahl (c., d. und e.), das Abziehen von der Null (c. und d.) und das Abziehen der Null (b. und c.).

Die erste, dritte und vierte Aufgabe wurde von allen Schülern richtig gelöst. Bei der zweiten Aufgabe gab es eine falsche Antwort. Beim Abziehen der Null von der Sieben in der Zehnerspalte notierte eine Schülerin (Irini) eine Null. In der letzten Aufgabe gab es vier falsche identische Antworten. Diese Schüler (Irini, Alexis, Nikos, Thodoris) bemerkten nicht, dass oben die kleinere Zahl steht, rechneten wie gewöhnlich und notierten am Ende die Eins aus der Hunderterspalte. So erhielten sie das Ergebnis 141.

Bei den Subtraktionen ohne Übertrag hatten diese Schüler keine Schwierigkeiten. Wie sah es aber mit den Überträgen aus? Um eine Antwort auf diese Frage zu erhalten, wurde noch ein zweites Arbeitsblatt verteilt. Auf diesem standen sechs Aufgaben mit Übertrag und zwar folgende:

72	849	506	604	96900	55111
a. - 49	b. - 62	c. - 207	d. - 8	e. - 25998	f. - 22999

Diese Aufgaben stammen aus den diagnostischen Tests von Gerster (1982a). Zu den Schwierigkeitsmerkmalen dieser Aufgaben gehören wieder der Übertrag in eine leere Stelle (b. und d.), der Übertrag in eine leere Stelle und das Ergänzen bis 10 (d.), der Übertrag zur Null und das Ergänzen bis 10 (c.), gleiche Ziffer übereinander (e.), gleiche Ziffern in benachbarten Spalten (f.), der Übertrag zur 9 (f. und e.), gleiche Ziffern übereinander nach Berücksichtigung des Übertrags (e.) (vgl. Gerster, 1982a, S. 49-51).

Bei der ersten Aufgabe gab es drei falsche Antworten. Zwei Schüler (Chronis und Nikos) wendeten die Erweiterungstechnik falsch an, und statt die Erweiterungsziffer zu der Zehnerziffer des Subtrahenden zu addieren, subtrahierten sie diese. So rechneten sie drei von sieben statt fünf von sieben und das Ergebnis war 43. Eine Schülerin (Irini) geriet durch falsche Rechenrichtung zum Ergebnis 37.

Bei der zweiten Aufgabe gab es vier Fehlantworten. Thodoris addierte beim letzten Schritt (er erhielt 987), Alexis berücksichtigte in der Zehnerspalte nicht die richtige Rechenrichtung (er erhielt 727), Stella machte Fehler beim Einspluseins in der Zehnerspalte und addierte im letzten Schritt (sie erhielt 817) und Irini vermied wieder den Zehnerübergang, in dem sie die falsche Rechenrichtung wählte (sie erhielt 827).

Bei der dritten Aufgabe zogen zwei Schülerinnen in der Einerspalte die kleinste von der größten Ziffer ab (sie notierten 301), zwei weitere Schüler (Chronis und Thodoris) machten Fehler mit der Null in der Zehnerspalte (sie notierten 309), Nikos machte denselben Fehler und operierte darüber hinaus in falscher Weise mit der Erweiterungsziffer (er notierte 409) und Alexis fing mit Addition in der Einerspalte an (er erhielt 323).

Bei der vierten Aufgabe wendeten zwei Schüler (Irini und Thodoris) bei der Einerspalte die falsche Rechenrichtung an (604), Chronis vergaß den Übertrag und machte Fehler mit der Null (606), Nikos machte Fehler mit der Null (506), Stella machte Fehler mit der Null und mit der Rechenrichtung (604) und Alexis fing wieder mit Addition bei der Einerspalte an (622).

Bei der fünften Aufgabe machten vier Schüler Fehler mit der Null (notierten 71098, 71000, 1000) und zwei Schüler wendeten die Erweiterungstechnik falsch an.

Bei der letzten Aufgabe ließ Stella die Überträge ganz aus (33222). Zwei Schüler wendeten die Erweiterungstechnik falsch an (34332) und der eine von ihnen vergaß die Überträge bei der Zehner- und Hunderterspalte (34222). Alexis setzte überall die gleiche Ziffer (22222), Irini gab auf und löste die Aufgabe nicht. Thodoris war der einzige, der die richtige Lösung errechnen konnte.

Bei den Fehlern traten die Fehler mit der Null am häufigsten auf (10), es folgte die falsche Rechenrichtung (8) und die fehlerhafte Erweiterungstechnik (7). In kleinerer Streuung tauchten die inverse Operation (4), die fehlende Berücksichtigung des Übertrags (3) und Fehler beim Einspluseins (1) auf. Hierbei handelte es sich um systematische Fehler. Nikos und Chronis hatten die Erweiterungstechnik falsch verstanden, Irini und Stella zogen die kleinste von der größten Zahl ab, und fast alle hatten Schwierigkeiten beim Operieren mit der Null.

Diese Erkenntnisse bestimmten auch die Inhalte der folgenden Unterrichtsstunden. Die Unterrichtsplanung basierte auf den Schulbüchern und den oben erhobenen Daten. Im Laufe der Behandlung der Subtraktion wurden neue Inhalte behandelt, die die Schwächen der Schüler aufgriffen, nachdem ihre Bedeutung und ihre Rolle für die mathematische Erziehung und für das Erreichen der Unterrichtsziele bestimmt wurde. Insgesamt wurde die Behandlung der Subtraktion in neun Stunden abgeschlossen. In den griechischen Lehrbüchern werden für den Algorithmus der Subtraktion (außer dem Sachrechnen) in der dritten Klasse sieben und in der vierten Klasse vier Unterrichtsstunden vorgesehen.

In den Stunden des Förderunterrichts wurde nicht nur die Subtraktion thematisiert, da auch ein Zeitraum für die Wiederholungen gebraucht wurde. Die Wiederholungen waren als Einführung für jede Unterrichtsstunde vorgesehen. Dies war der einzige Weg, um dem

Vergessen der behandelten Themen entgegenzuwirken. Trotz des Einsatzes von Anschauungsmitteln und Arbeitsmitteln im Unterricht, blieben die neuen Kenntnisse nur für kurze Zeit in ihrem Gedächtnis. Ein weiterer Grund für die Behandlung der einzelnen Themen in mehreren kleinen Einheiten waren die Konzentrationsschwierigkeiten der Schüler, dementsprechend ihr kurzes Durchhaltevermögen und ihre Schwäche beim Erfassen von Zusammenhängen. Die Schüler waren für eine kurze Dauer aufmerksam, nur eine kurze Zeitspanne konnten sie ihre Aufmerksamkeit auf das jeweilige Lernobjekt richten. Die Dauer der Konzentration und der Moment des Nachlassens waren deutlich zu spüren. Weiterhin konnten sie ihr Wissen nicht erweitern, transformieren und in neuen Situationen anwenden. Als bei der Behandlung der Fehler mit der Null das Abziehen von der Null erklärt wurde und die Aufgabe 250-8 gelöst wurde, konnten sie dies nicht generalisieren, um die Aufgabe 2007-9 zu bewältigen. Vor solchen Herausforderungen ließen sie die Bleistifte fallen, ohne auf der Suche nach der richtigen Antwort zu bestehen. Alle Fälle mussten einzeln, in gemeinsamen Gesprächen thematisiert werden. Alle Schüler wurden konsequent an den Handlungen mit dem Material und an den Aufgabenlösungen beteiligt. Jeder Schüler sollte Erfolgserlebnisse haben, die aus eigenen Handlungen resultierten. Nur so bestand die Hoffnung, ihnen Kenntnisse zu vermitteln, die ihre Stellung in der Klasse verbessern und sie zu gleichwertigen Mitgliedern machen würde (vgl. Massialas, 1975, S. 42).

Eingeführt wurde die Subtraktion mit Hilfe von Sachkontexten. Mit den Handlungen an den Steckwürfeln konnten die Schüler feststellen, dass die Subtraktion die Umkehroperation der Addition ist. Daher nutzten sie die Zehnerergänzungen und die dekadische Analogie, um weitere Differenzen zu berechnen 10-3=, 100-30=, 1000-300= und 20-5=, 20-15=. Das Rückwärtszählen mit den Fingern, bei dem oft auch Zahlen ausgelassen wurden, war dominanter als die aufgezeigte Analogie zur Addition. Um davon abzuweichen, wurden den Schülern Differenzen mit *Zehnerunterschreitung* gegeben. Sie bekamen den Hinweis, sich beim Abziehen um die Bildung des Zehners zu bemühen (14-6=14-4-2=...). Die Hilfestellung im ersten Beispiel war für sie notwendig, da sie die Schritte nicht alleine durchführen konnten. Das Verbalisieren der Handlung erleichterte ihr Verständnis. Jedoch war das Notieren der Schritte mit Schwierigkeiten verbunden. Deshalb wurde im Weiteren nicht mehr darauf bestanden. Wichtiger erschien in dieser Phase das Verstehen der Technik.

Größerer Wert wurde zunächst auf das *Ergänzen* gelegt, das als nächstes thematisiert wurde. Die Ergänzungsmethode, mit der die Subtraktion in eine Addition mit einem fehlenden Summanden verwandelt wird, wird nicht im Schulbuch vorgestellt. In der Schule wird sie jedoch von den Lehrern und zu Hause von den Eltern praktiziert. 65% der Schüler wendeten diese Methode auch bei der Untersuchung an. Um das Ergänzen von der kleineren zur größeren Zahl einzuführen, wurde wiederum die Umkehrbarkeit der beiden Operationen betont. Das Erkennen des Zusammenhangs zwischen den Aufgaben 10-7=3 und 7+3=10 war an konkretem Material möglich, da man dieselbe Menge entfernte und danach wieder dazu legte. Doch die Schüler konnten nicht verstehen, wie man bei der Subtraktion das Ergebnis additiv berechnen kann. Sie waren gewöhnt in der Subtraktion rückwärts und nicht vorwärts zu zählen. Das Erhalten desselben Ergebnisses überzeugte die Schüler davon, dass sie auch bei der Subtraktion additiv (ergänzend) verfahren können. Die ersten Einwände gegen dieses Verfahren konnten durch die Anwendung des Vorwärtszählens (Ergänzens) beseitigt werden, das die Schüler im Vergleich zu dem Rückwärtszählen bevorzugen. Das Ergänzen wurde intensiv im Zwanzigerraum geübt und im Hunderterraum erweitert. Die Schüler waren von dieser Strategie begeistert. Sie interpretierten auch ihre Denkweise: “Ich finde zuerst bis zehn und dann addiere ich die Zahl über die Zehn.“ Sie wollten mündlich wie auch schriftlich ihr Können beweisen. Sie konnten nicht glauben, dass die Subtraktion mit Zehnerunterschreitung so leicht sei.

> „This was recieved with great excitement by the children. As the weeks went by I began to see what was underlying that excitement. It was a sense of `ownership‘.“ (Atkinson, 1992, S. 46)

Alles, was die Kinder einsehen und verstehen konnten, war nicht mehr fremd für sie, sondern es addierte sich zu ihrem geistigen Eigentum. Der Besitz neuer Wissenselemente stärkte ihr Selbstwertgefühl. In diesen Stunden schien auch eine Änderung der Einstellung der Schüler stattzufinden. Sie erkannten die Bedeutung der Arbeit, die in den Arbeitsgruppen geleistet wurde, verstanden, dass sie Erfolge hatten und versuchten, ihr Bestes zu geben. Sie schätzten ihre Leistungen und handelten selbstbewusster. Damit war eins der wichtigsten pädagogischen Ziele erreicht. Das Selbstbewusstsein des Schülers bestimmt in einem hohen Maß seine Zielsetzungen, seine Kompetenzen und seine Bereitschaft, sich mit Situationen auseinanderzusetzen, die für ihn von Bedeutung sind (vgl. Massialas, 1975, S. 42, übersetzt von der Verfasserin). Als die Schüler sahen, dass sie neue Fähigkeiten erworben hatten, steigerte sich ihr Interesse für das Fach. Der Erfolg war die größte Selbstbelohnung, die sie erhalten konnten. Natürlich wollten sie auch Rückmeldungen zu ihren Erfolgen durch die Umgebung. Sie wollten eine Bestätigung für ihre Handlungen und eine Bewertung von der Verfasserin hören.

In Anlehnung an die halbschriftliche Addition wurden mit Hilfe der Streichholzbündel auch die Rechenwege für die halbschriftliche Subtraktion gefunden. Zunächst sagten sie die Strategie „Stellenwerte extra“ auf. Bei der weiteren Strategie „Zehner erst“ musste Hilfe gegeben werden.

„Stellenwerte extra“	„Zehner erst“	„Einer erst“
57 – 23 = 30 + 4 = 34	57 – 23 = 34	57 – 23 = 34
50 – 20 = 30	57 – 20 = 37	57 – 3 = 54
7 – 3 = 4	37 – 3 = 34	54 – 20 = 34

Bei den Übungen für das Kopfrechnen wählten sie die Strategie „Zehner erst“ aus. Diese fordert ein Zwischenergebnis weniger und man muss nur eine Operation anwenden. Für die schriftliche Subtraktion werden im Schulbuch zwei Techniken, die Erweiterungstechnik und die Borgetechnik vorgestellt. Bis zum Erscheinen der neueren Lehrbücher wurde der *traditionelle* Rechenweg angewendet, der eine Synthese der beiden erwähnten Techniken ist. Dieser soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden:

$$\begin{array}{r} 95 \\ -\ 68 \\ \hline 27 \end{array}$$

Rechengang:
“8 von 5 geht nicht. Wir borgen einen Zehner und sagen 8 von 15, (Borgen).
8 von 15 ist 7. 1, die wir uns geborgen haben, plus 6 ist 7 (Erweitern).
7 von 9 ist 2“.

Diese Technik wird in den Lehrbüchern nicht vorgestellt. Viele Schüler benutzen heute noch diesen Rechengang, den sie von ihren Eltern gezeigt bekommen.

Im Förderunterricht wurden beide Techniken, die Erweiterungs- und die Borgetechnik vorgestellt. Am Anfang wählten die Schüler die Technik aus, die sie als *leichtere* eingeschätzt hatten und auch möglichst fehlerfrei anwenden konnten. Vier von den Schülern wählten die Erweiterungstechnik aus und die übrigen zwei die Borgetechnik. Bei der Erweiterungstechnik wurden die Schüler aufgefordert, die Erweiterungsziffer automatisch auch diagonal herunterzuholen und dabei das Wort „automatisch" auszusprechen. Die Borgetechnik bereitete zwei Schülern (Stella und Nikos) besondere Schwierigkeiten, wenn die davorstehende Ziffer eine Null war. Wie konnten sie sich eine Eins aus der Null borgen? Deshalb übersprangen sie die Null (oder Nullen) und borgten sich von der davorstehenden Ziffer ($\neq 0$) die nötige Eins, unabhängig vom Stellenwert dieser Ziffer. Das soll in den folgenden Beispielen verdeutlicht werden:

$$\begin{array}{r} {}^{4}\cancel{5}03 \\ \underline{-\ 207} \\ 206 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1\,{}^{5}\cancel{6}00 \\ \underline{-\ \ 407} \\ 1103 \end{array}$$

Manchmal irritierten die Schüler die vielen Striche vom Durchstreichen und die Ziffer, die nach dem Borgen entstand:

$$\begin{array}{r} {}^{5}\cancel{6}\ {}^{1}\cancel{2}\ 6 \\ \underline{-\ 2\ 5\ 8} \\ 3\ 7\ 8 \end{array}$$

Statt im zweiten Schritt den Minuenden 11 zu bilden, rechnete Thanasis 12, die sich mit der durchgestrichenen 2 bildet.

Die Schüler konnten leicht einsehen, dass diese Technik große Gefahren birgt und beschlossen die Erweiterungstechnik zu benutzen. Ihnen wurde auch erklärt, dass sie in der Divisionsstaffel nicht den Platz haben würden, um Ziffern durchzustreichen. Aus diesen Gründen wurde in der Folge von allen Schülern die Erweiterungstechnik praktiziert.

Bei der schriftlichen Subtraktion wurden folgende Einheiten eingeteilt und berücksichtigt:

- Subtraktion ohne Übertrag

$$\begin{array}{r} 7 \\ \underline{-\ 4} \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \underline{-\ 5} \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \underline{-\ 6} \end{array} \quad \begin{array}{r} 29 \\ \underline{-\ 16} \end{array}$$

- Subtraktion mit Übertrag

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{-\ 3} \end{array} \ldots \quad \begin{array}{r} 16 \\ \underline{-\ 6} \end{array} \ldots \quad \begin{array}{r} 16 \\ \underline{-\ 7} \end{array}$$

Auf diese Weise wurde von den einfachen Fällen zu schwierigeren übergegangen.

- Abziehen von der Null

$$\begin{array}{r} 0 \\ \underline{-\ 0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ \underline{-\ 1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ \underline{-\ 2} \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ \underline{-\ 3} \end{array} \ldots \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{-\ 5} \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ \underline{-\ 6} \end{array} \quad \begin{array}{r} 120 \\ \underline{-\ \ 6} \end{array}$$

Diese Differenzen wurden auf Karton geschrieben und den Schülern präsentiert. Sie dienten entweder als Einstieg oder als Übung für ähnliche Fälle.

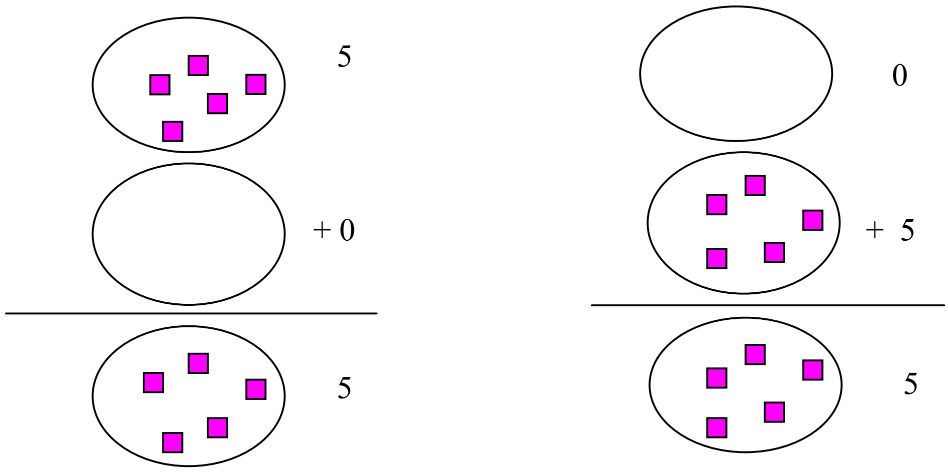
- Abziehen einer Zahl von einem Minuenden mit aufeinanderfolgenden Nullen

1004	1004	1004		1004	1004	1004
- 0	- 1	- 2	...	- 4	- 5	- 6

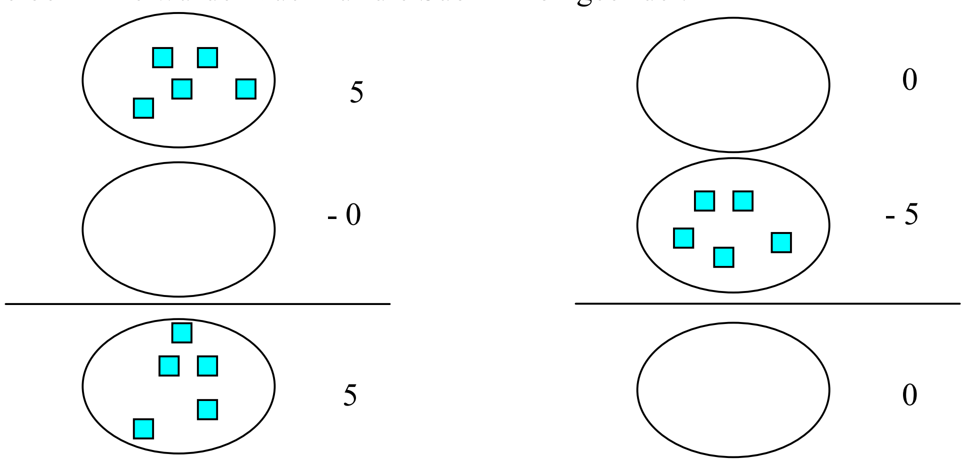
Die Reihenbildung verhalf dazu, dass diese Sonderfälle länger in der Erinnerung blieben.

- Unterscheidung und Inbeziehungsetzen von ähnlichen Fällen

Die folgenden Fälle versetzten die Schüler in Unsicherheit und verursachten Fehler in den Aufgaben. Sie wurden in Bezug zu ähnlichen (inversen) Fällen gesetzt und mit Hilfe der Mengen veranschaulicht.



Dieselben Fälle wurden auch für die Subtraktion gebildet:



Jedes Mal wenn Fehler dieser Art auftraten, wurden die entsprechenden Karten gezeigt.

In den Förderstunden wurde nicht auf das Lösen von Sachaufgaben hingearbeitet, da das Hauptinteresse darin bestand, die Unterrichtung des Algorithmus der Division vorzubereiten. Nach Ansicht der Verfasserin können die Techniken der Rechenoperationen jedoch nicht völlig abgesondert von den entsprechenden Sachkontexten und -aufgaben thematisiert werden. Anregungen wurden hier aus den Erfahrungen und der Umwelt der Schüler gewonnen.

In der Übungsphase wurden viele Aufgaben laut gerechnet. Trotzdem traten bei der Verbalisierung der Rechenwege viele sprachliche Fehler und Unzulänglichkeiten auf. Die Schüler benutzten Wörter aus der Addition, begannen die Rechnung vom Minuenden (falsche Rechenrichtung). Ferner vergaßen sie Überträge bei der Subtraktion, obwohl sie diese notiert hatten, berechneten die Ergänzungen falsch, machten Fehler mit der Null und es unterliefen ihnen generell dieselben Fehler.

Da die analytische und interpretative Behandlung dieser Themen voranging, wurden praktische mündliche Hinweise eingesetzt, die positive Ergebnisse brachten:

- „Bei der Addition und Subtraktion beginnen wir immer von unten."
- „Nicht vergessen! Die Überträge der Addition und Subtraktion."
- Es wurde die Vereinbarung getroffen, die Überträge immer zu notieren und nach ihrer Berücksichtigung wegzuradieren.
- „Bei der Subtraktion benutzten wir das Wort *von* oder *bis* (für die Ergänzung)."

Diese Hinweise bildeten Generalisierungen, die in simpler Sprache, mit den Worten der Schüler formuliert waren.

Die Auseinandersetzung mit der Subtraktion barg für die Schüler viele Schwierigkeiten und viele Erfolgserlebnisse zugleich. Sie waren mit entsprechender Führung in der Lage, konstruktiv zu denken, neue mit alten Informationen zu kombinieren und Schlussfolgerungen zu ziehen. Die neuen Kenntnisse und ihre Erfolge steigerten ihre Leistungen, und das beeinflusste auch ihre Haltung im Unterricht. Sie wurden ruhiger, nahmen die Sache ernst, und konzentrierten sich auch besser als am Anfang. Der Zugang zum Wissen ließ sie grundlegende Vorstellungen von dem Fach entwickeln. Im Laufe der Behandlung der Subtraktion zeigte sich, dass sie eine schwierige Operation ist, in der viele Sonderfälle unterschieden werden können. Zum Schluss konnten die Schüler Subtraktionsaufgaben erfolgreich bewältigen. Für ihre Erlernung wurde keine revolutionäre Methode benutzt. Es wurden die gängigen Strategien angewendet, der Lehrstoff wurde eingeteilt und den Voraussetzungen und dem Lernrhythmus der Schüler angepasst.

5.7 Phase 3. Einführung der Multiplikation

Voraussetzung für den Algorithmus der Division ist auch die Kenntnis der Multiplikation. Bei der Testerhebung und der Durchführung der Interviews wurden Lücken beim Beherrschen des Einmaleins festgestellt, was ein Hindernis für das Verfahren der Division war, da die meisten Schüler die Quotientenziffer multiplikativ einschätzten. Es wurden Versuche vorgenommen, die verschiedenen Ergebnisse additiv, aus den Nachbaraufgaben oder mit dem Aufsagen der ganzen Reihe zu berechnen. Entsprechend wurde auch hier gehandelt. Die Multiplikation der jeweiligen Quotientenziffer mit dem Divisor entspricht dem Verfahren der Multiplikation mit einstelligem Multiplikator. Das Erlernen dieses Falles würde für den Algorithmus der Division ausreichen. Da aber die Multiplikation mit mehrstelligem Multiplikator in den Lehrstoff der fünften Klasse gehört, wurden im Förderunterricht alle Fälle der Multiplikation behandelt, um die Schüler ohne Lücken weiterzuführen. Dieser zusätzliche Unterricht bildet sicher ihre letzte Chance in der Primarstufe dieses Verfahren zu erlernen.

Die Standortbestimmung der Multiplikation umfasste fünf Aufgaben. Vier davon hatten einen einstelligen Multiplikator und die letzte einen zweistelligen Multiplikator:

a. $\begin{array}{r} 447 \\ \underline{\times 3} \end{array}$ b. $\begin{array}{r} 250 \\ \underline{\times 5} \end{array}$ c. $\begin{array}{r} 378 \\ \underline{\times 2} \end{array}$ d. $\begin{array}{r} 3748 \\ \underline{\times 3} \end{array}$ e. $\begin{array}{r} 589 \\ \underline{\times 24} \end{array}$

Zwei Schüler (Alexis und Irini) drückten gleich zu Beginn ihre Unfähigkeit aus, sich mit diesen Aufgaben auseinanderzusetzen. Alexis erklärte, als in der Schule dieses Verfahren behandelt wurde, habe der Lehrer zu große Zahlen benutzt und deshalb habe er es nicht verstehen können. Für ihn war die Aufgabe 234×2 zu schwer. Irini sagte, sie könne die Einmaleinsreihen nicht gut. Mit Hilfe konnte sie Aufgaben bewältigen, die keine zweistellige Ergebnisse bei den Teilprodukten hatten,
z. B.:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{\times 2} \\ 48 \end{array}$$

Folgende Aufgabe konnte sie nicht lösen

$$\begin{array}{r} 428 \\ \underline{\times\ 8} \\ 48 \end{array}$$

Bei der Aufgabe mit dem zweistelligen Multiplikator gab sie diese Lösung:

$$\begin{array}{r} 22 \\ \underline{\times 12} \\ 24 \end{array}$$

Die vier weiteren Schüler erhielten in der ersten Aufgabe das richtige Ergebnis.

In der zweiten Aufgabe bereitete die Null drei Schülern (Stella, Chronis und Thodoris) Schwierigkeiten und sie rechneten 5×0=5. Stella addierte als Behalteziffer eine Eins statt einer Zwei.

In der dritten Aufgabe gab es drei falsche Antworten. Nikos rechnete 2×8=18 (aus Perseveration) und Stella rechnete 2×7=18 und 2×3=8, was Einmaleinsfehler der Nähe sein können.

Bei der vierten Aufgabe gab es nur eine richtige Lösung. Chronis rechnete in der Hunderterspalte 3×3=6 was auf Addition hindeutet, Stella und Thodoris addierten eine falsche Behalteziffer an der selben Stelle (eins statt zwei).

Bei der fünften Aufgabe gab es keine richtige Lösung. Außer Stella wussten alle Schüler, wie man die Teilprodukte unter dem horizontalen Strich anordnet. Sie schrieb beide Teilprodukte untereinander. Thodoris rechnete 4×9=37, Chronis addierte im zweiten und Nikos im ersten Teilprodukt größere Behalteziffern (zwei statt eins).

Die Schwierigkeiten ergaben sich also beim Einmaleins, dem Rechnen mit der Null, den Behalteziffern und dem Schreiben der Teilprodukte. Mit diesen Erkenntnissen begann die Behandlung der Multiplikation. Den Schülern wurden drei leichte Sachaufgaben gegeben. Diese erforderten jeweils eine Addition, eine Subtraktion und eine Multiplikation. Nachdem die Schüler jeder für sich die Aufgaben gelesen hatten, sollte jeder seine Lösung präsentieren und begründen. Für die Sachaufgaben der Addition und Subtraktion bestanden keine Schwierigkeiten. Bei der dritten Aufgabe nutzten sie wieder die Addition. In diesen und ähnlichen Sachkontexten wurde erklärt, wann man auf die Multiplikation zurückgreifen muss. Die Schüler sollten den Sinn der Multiplikation verstehen und diese Operation den anderen gegenüberstellen.

5.7.1 Das Einmaleins

Die meisten Fehler werden in der Multiplikation durch die Einmaleinsreihen verursacht. Es ist verständlich, dass die Einmaleinsreihen nicht gleichzeitig mit dem Verfahren oder beim Lösen von zugehörigen Aufgaben gelernt werden können. In Bezug auf dieses Thema hat der schulische Unterricht nicht immer Erfolg, da manchen Schülern auch noch in der fünften Klasse Fehler in diesem Bereich unterlaufen. Die hier vorgestellten Schüler beherrschten zwar einzelne Ergebnisse, die Mehrheit konnte jedoch nicht viel oder gar nichts mit ihren Kenntnissen anfangen. Da die erste Hälfte des Förderunterrichts für das Einüben der Addition und der Subtraktion vorgesehen war, musste bei der Einteilung der Einheiten berücksichtigt werden, dass die Schüler ausreichend Zeit haben würden, das Einmaleins zu üben. Dafür würde allein die zweite Hälfte des Förderunterrichts nicht ausreichen. Deshalb wurde schon sehr früh bei der Unterrichtsplanung eine Auseinandersetzung mit diesem Thema angeregt. Während in der ersten Phase die Ergänzungen zum Zehner, die Überschreitung des Zehners und die Zahlzerlegungen thematisiert wurden, haben die Schüler gleichzeitig die Reihe der Zwei und Zehn erarbeitet. In jeder Unterrichtsstunde wurden vier bis fünf Minuten der Einführung, Vertiefung oder Wiederholung von Einmaleinsreihen gewidmet.

Schon mit den ersten Produkten wurde das Kommutativgesetz eingeführt. Dieses wurde durch das Legen von Plättchen verdeutlicht. Für die Schüler war das Verbalisieren des Gesetzes ein Wortspiel, nichts das sie hätten systematisch erfassen können. Die Bedeutung und Funktion wurde ihnen erst etwa in der Mitte der Behandlung der Einmaleinsreihen deutlich, als sie plötzlich bei dem Austausch der Ziffern feststellten, das sie dem Produkt schon früher begegnet waren und das Ergebnis bereits kannten. Die Nutzung der Kommutativität war eine große Hilfe und Freude für die Schüler, die sich in diesen Momenten nicht anstrengen mussten, sondern auf ihre früheren Lernergebnisse zurückgreifen konnten.

Die *Reihe der Zehn* bereitete keinem der Schüler Schwierigkeiten, da sie alle in Zehnerschritten zählen konnten. Die *2er Reihe* wurde in Bezug zu den Verdopplungsaufgaben der Addition gesetzt, die von der ersten Phase bekannt waren. Es folgte die *5er Reihe*, die mit einer Zeichnung veranschaulicht wurde. Alle Schüler waren in der Lage in Fünferschritten zu zählen. Einige von ihnen konnten die Produkte nicht mit den Ergebnissen verbinden. Sie konnten deshalb nicht simultan Produkte der 5er Reihe aufsagen, im Sinne von 7*5=35. Aus diesem Grund wurde versucht, die innere Vorstellung der 5er Reihe zu bilden und zu stärken. Die Abbildung des Hunderterfeldes, gezeichnet mit Plättchen, war nicht sehr hilfreich. Etwas Konkreteres war hier erforderlich. Auf einen Karton wurden fünf Reihen mit Bäumen gemalt. Jede Reihe hatte zwei Felder mit jeweils fünf Bäumen. Dadurch waren die Fünfer und die Zehner deutlich erkennbar, was den Schülern sehr hilfreich war.

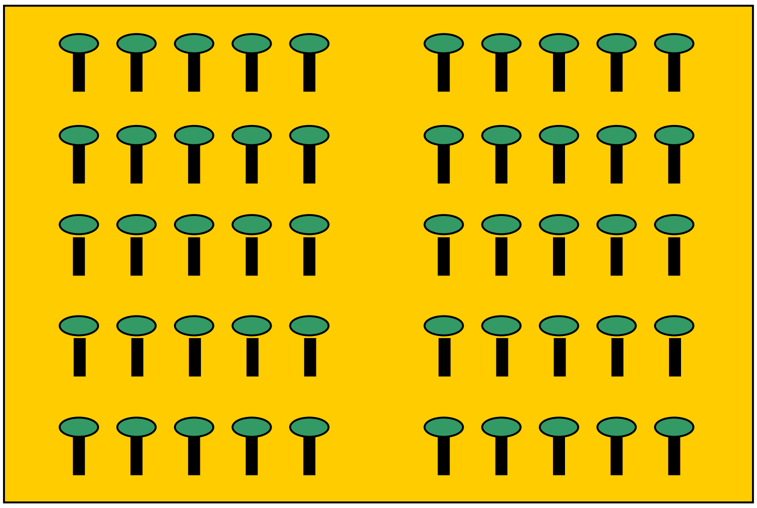


Abb. 3: Darstellung der 5er Reihe am Beispiel von Bäumen.

Diesen Reihen, der 2er, der 5er und der 10er Reihe, wurde große Aufmerksamkeit geschenkt, die Schüler sollten sie möglichst fehlerfrei beherrschen. Grund dafür war, dass sie die Grundlage einer Rechenstrategie sind, die in der Folge für das flexible Auffinden des Einmaleins eingesetzt werden sollte.

Es folgten die *4er Reihe*, verbunden mit den Reifen eines Wagens, die *3er Reihe* mit dem Eierkarton und die *7er Reihe* mit den Wochentagen. Diese Verbindungen halfen nicht beim Erlernen der Reihen. Sie spielten möglicherweise eine Rolle bei dem Auffinden der ersten Produkte. Statt dessen wurden die Reihen durch Versuch und Irrtum, also mechanisch, erlernt.

Für die *6er und 8er Reihe* wurde der Kassettenrecorder eingesetzt. Die Reihen wurden zunächst aufgeschrieben und jeder Schüler nahm sie auf einer Kassette auf, mit der Abmachung, diese zu Hause sorgfältig zu üben. In manchen Fällen wurde auch der Taschenrechner benutzt. Die Benutzung des Kassettenrecorders fand große Resonanz bei den Schülern und war vielleicht deshalb besonders effektiv. Absichtlich wurde er nur an bestimmten und schwierigen Reihen angewendet. Hätte man ihn bei allen Reihen eingesetzt, hätte er an Attraktivität und Effektivität verloren.

Für die *9er Reihe* wurden zwei Wege benutzt, ein systematischer und ein praktischer (vgl. Thornton & Bley, 1995, S. 257). Der systematische basiert auf Hilfen, die für das Erinnern der Ergebnisse konzipiert wurden. Als Hilfe kann die Summe der Ziffern der Ergebnisse dienen, die immer eine Neun ergeben. Wenn man die Ergebnisse betrachtet, sieht man, dass die erste Ziffer um eins kleiner ist, als der Faktor mit dem die Neun multipliziert wird (ebd.).

Wenn man in der Folge die Ergebnisse fokussiert, ist folgende Feststellung zu treffen: Jedes neue Produkt ergibt sich aus dem vorangegangenen Produkt durch das operative Verändern der Stellenwerte.:

1*9= 9
2*9=18
3*9=27
4*9=36
…

Ab hier steigen die Ziffern in der Zehnerspalte und sinken die Ziffern in der Einerspalte um 1.

Der praktische Weg stützt sich auf die Finger. Zunächst werden die Fingern von der linken zur rechten Hand von 1 bis 10 nummeriert. Um z. B. 9×3 zu multiplizieren, biegen die Schüler ihren dritten Finger (in der linken Hand) nach unten und lesen das Produkt von den Fingern ab: zwei Finger (links von dem gebogenen Finger) an der linken Hand und sieben (rechts) an der rechten Hand: 27! Diese Methode wurde den Schülern als Geheimnis anvertraut, auf das sie in der Schule gut achten sollten. Nichts machte sie glücklicher und das Behalten wurde somit gut gesichert.

Nachdem die Schüler einige Reihen durchgearbeitet hatten, wurden die „Zwillinge" der Multiplikation präsentiert und auf kariertes Papier gezeichnet. Hierunter waren die Malaufgaben mit gleichen Faktoren (Quadratzahl – Aufgaben) zu verstehen. Die Benennung „Zwillinge" wie auch die Eigenart dieser Produkte regten das Interesse der Schüler an, was sich positiv auf das Erinnern der Ergebnisse auswirkte.

Für die neuen Reihen wurde der Zahlenstrahl ausgefüllt. Oberhalb der Reihe wurden die Ergebnisse und unter dieser die dazugehörigen Produkte notiert, z. B.

0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

1×2 2×2 3×2 4×2 5×2 6×2 7×2 8×2 9×2 10×2

Mit der Einführung jeder neuen Reihe wurde ein Arbeitsblatt zur Übung für Zuhause verteilt. Es enthielt Multiplikations- und Divisionsaufgaben folgender Formen: 3×8=…, 24=…×8, 48:8=…, …×8=32, …:8=10. Dies war die einzige Hausaufgabe, die die Schüler im Rahmen des Förderunterrichts erfüllen sollten.

Die Behandlung des Einmaleins wurde erst abgeschlossen, als die Schüler das Verfahren mit zweistelligem Multiplikator übten. Zwischendurch wurden stets kurze Wiederholungen durchgeführt. Die Schüler vergaßen Vieles schon nach zwei bis drei Tagen. Von der für die Behandlung des Einmaleins zur Verfügung stehenden Zeit wurde der größte Anteil nicht für das Erlernen, sondern für das Behalten und Erinnern der Produkte verwendet. Es waren fast zwei Monate seit Beginn des Unterrichts vergangen. Die Schüler hatten mit den Zahlen gearbeitet und sich an sie gewöhnt. Sowohl die Zahlenvorstellungen als auch die Zahlenbeziehungen schienen weniger kompliziert. Nach dem Erarbeiten des Einmaleins glaubte die Verfasserin, dass die Schüler die Voraussetzungen hatten, neue Wege und Hilfen zum Lösen der Aufgaben verstehen und anwenden zu können. Die Rede ist hier von den Kernaufgaben und dem flexiblen Erarbeiten der Einmaleinskenntnisse (vgl. Padberg, 1996, S. 125 ff.).

Als Kernaufgaben werden die Aufgaben mit dem Faktor 1, 2, 5 und 10 bezeichnet. Also sind z. B. die Kernaufgaben der 4er Reihe die 1×4, 2×4, 5×4 und 10×4. Ausgehend von diesen Aufgaben können alle übrigen Aufgaben derselben Reihe auf verschiedene Arten berechnet werden. Dies soll das folgende Beispiel zeigen:

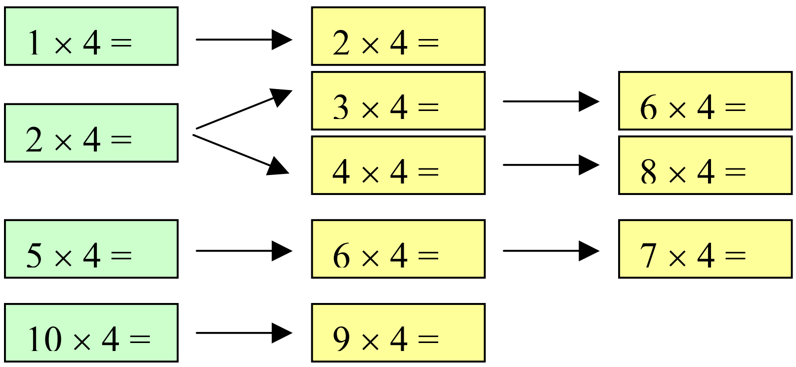
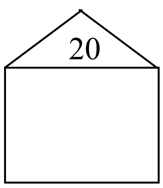


Abb. 2: Ein Beispiel für die Berechnung einer Einmaleinsreihe aus den Kernaufgaben (vgl. Padberg, 1996, S. 128).

Einige der oberen Aufgaben können durch Verdoppeln (6×4, 8×4), andere additiv ausgehend von Nachbaraufgaben (2×4, 3×4, 6×4, 7×4) und wieder andere unter impliziter Anwendung des Distributivgesetzes für die Subtraktion (9×4) berechnet werden. Zwischen den einzelnen Aufgaben existieren vielfältige Vernetzungen, so dass eine bestimmte Aufgabe auf verschiedenen Wege gelöst werden kann. Die einzige Voraussetzung ist die Kenntnis der Kernaufgaben. Diese Strategie ist ideal für lernschwache Schüler. Sie hat den Effekt, „dass sich die Schüler nicht einen Wust von vielen, unverbunden nebeneinanderstehenden Fakten mühsam einprägen müssen, sondern stattdessen nur ein System übersichtlich miteinander verbundener Aussagen“ (Padberg, 1996, S. 128).

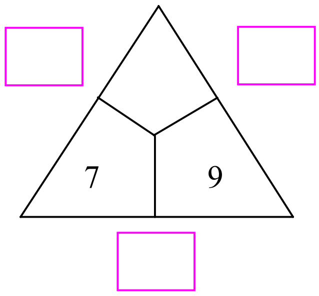
Das Einmaleins wurde mündlich durch Abfragen, schriftlich mit den Zahlenhäusern und intensiv mit den Rechendreiecken geübt, die die Schüler mit ausgesprochenen Spaß ausfüllten. Bei den Zahlenhäusern wurden unter gegebenen Einmaleinszahlen alle passende Multiplikationsaufgaben geschrieben (Kopiervorlage von „Das Zahlenbuch“ der 3. Klasse).



In dieses Häuschen sollten die Schüler alle Malaufgaben mit dem Ergebnis 20 schreiben, die sie kannten.

Die Rechendreiecke, die im selben Lehrbuch für die Erarbeitung der Addition und Subtraktion vorgestellt werden, wurden hier von der Verfasserin für die Multiplikation eingesetzt. Das Produkt der Zahlen in benachbarten Feldern ergibt die Zahl in dem davor stehenden Kästchen. Dieses Übungsformat lässt verschiedene Schwierigkeitsstufen zu, je nach Aufgabenstellung. Je weniger Felder belegt sind, desto höher wird der Schwierigkeitsgrad. Wenn die Zahlen in den inneren Feldern gegeben sind, können die äußeren Zahlen durch Multiplikation berechnet werden. Fehlen die Zahlen in den inneren Feldern, entstehen Ergänzungsaufgaben der Art $3 \times \_ = 27$ oder $\_ \times 3 = 27$. Angeregt durch diese Aufgaben wurde auch das inverse Einmaleins thematisiert und der Zusammenhang zur Umkehraufgabe Division hergestellt.

Durch Variation der Aufgabenstellung ergeben sich Mal- und Ergänzungsaufgaben.



Um den Schülern eine Übersicht über das gesamte Einmaleins zu geben, wurden alle Einmaleinszahlen (nur diese) auf einem Zahlenstrahl linear platziert. Die Schüler erhielten die Gelegenheit, Feststellungen für die Streuung der Zahlen in den verschiedenen Intervallen des Hunderterraums zu machen und dieses optische Bild half besonders zur Bildung innerer Vorstellungen.

5.7.2 Das Verfahren

Im griechischen Schulbuch der dritten Klasse wird das Verfahren der Multiplikation auf unterschiedliche Weisen vorgestellt:

a. 4 * 22 =	b. 20 + 2	c. 2Z + 2E	d. 22
4 * (20 + 2) =	× 4	× 4	× 4
4 * 20 + 4 * 2 =	80 + 8 = 88	8Z + 8E = 88	88
80 + 8 = 88			

Der vierte Rechenweg stellt die Kurzform und gleichzeitig das Normalverfahren dar. Bei der Multiplikation mit einstelligem Multiplikator hatten die Schüler keine großen Schwierigkeiten, wenn man von den Einmaleinsfehlern absieht. Nach der Demonstration von Beispielen im Unterricht konnten sich auch diejenigen an das Verfahren erinnern, die in der Standortbestimmung keine Aufgabe lösen konnten. Betont wurde das Berücksichtigen der Behalteziffern und deren Addition an der richtigen Stelle. Die meisten Fehler wurden (im Test und auch in den Interviews) bei der Multiplikation mit zweistelligen Multiplikatoren beobachtet. Das Verfahren, das in Griechenland praktiziert wird, sieht so aus:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 24 \\ \hline 180 \\ +\ 90 \\ \hline 1080 \end{array}$$

- Multiplikator ist der zweite Faktor
- Die Faktoren und die Teilprodukte stehen stellengleich untereinander.
- Die Rechnung beginnt mit dem niedrigsten Stellenwert des Multiplikators.

Im Unterricht traten weitere Fehlermuster auf:

a. $\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 24 \\ \hline 180 \\ +\ 90 \\ \hline 270 \end{array}$ b. $\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 24 \\ \hline 820 \end{array}$ c. $\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 24 \\ \hline 90180 \end{array}$

Wie man aus diesen Lösungsversuchen erkennt, wurden in dem ersten Fall die Teilprodukte untereinander, aber nicht stellengleich platziert. Im zweiten Fall wurden die stellenwertgleiche Ziffern miteinander multipliziert und die zweistelligen Teilergebnisse ganz ausgeschrieben. Im dritten Fall wurden die Teilergebnisse richtig berechnet, aber auf dieselbe Linie geschrieben. Fehlerursache ist hier vermutlich die Ähnlichkeit mit dem Verfahren der schriftlichen Addition (vgl. Gerster, 1982a, S. 109). Die erste Handlung der Verfasserin war, die Schüler auf ihre Fehler aufmerksam zu machen. Dies sollte nicht durch die Worte der Verfasserin, sondern durch Handlungen der Schüler geschehen. Bei der Benutzung von Objekten und der Durchführung von Handlungen wurde darauf geachtet, dass kleine Zahlen verwendet wurden, dass die Veranschaulichungsmittel den Kindern schon bekannt waren und die Handlungen an ihnen leicht durchführbar waren. Dies sollte das Entdecken von Fehlern durch die Schüler erleichtern. Das Bewusstmachen der Fehler bei den Berechnungen oder Verfahren sollte als Motivationsverstärkung für das Suchen der richtigen Lösung dienen.

Gegeben wurde die Aufgabe 15×12. Die Operationen wurden an Steckwürfeln durchgeführt. Zehnerstreifen repräsentierten die Zehner und einzelne Würfel die Einer. Die Schüler legten zuerst (10×12) und dann (5×12). Getrennt berechneten sie die Zehner und die Einer durch Zählen in Zehner- und Zweierschritten. Die Summe der Teilprodukte zeigte den Schülern, dass ihre Lösungsmuster zu falschen Ergebnissen führten. Die folgende Abbildung zeigt das Legen der Aufgabe mit Steckwürfeln.

10×12

5×12

Die verschiedenen Rechenwege und die Analyse, die im Schulbuch bei der Einführung der schriftlichen Multiplikation vorgestellt werden, wurden an dieser Stelle ausgelassen. Sie ermüdet die Schüler, ist für sie langweilig und deshalb uneffektiv. Hervorgehoben wurde also die Kurzform, die generell gültig ist und im täglichen Leben angewendet wird. Zunächst wurde das stellengleiche Schreiben der Teilprodukte thematisiert. Dass die gleichen Stellenwerte immer untereinander (in derselben Spalte) geschrieben werden, wurde schon in den vorigen Rechenoperationen betont. Auch die Addition der Teilprodukte erforderte dies. Durch handelndes Operieren mit Streichhölzern bemerkten die Schüler ihre Fehler. Dies schloss aber keinesfalls eine Wiederholung der Fehler aus. Die Übungen in den folgenden Stunden verhalfen zur Festigung dieses Prinzips.

Bei der Multiplikation mit drei- und vierstelligen Multiplikatoren trat dieses Fehlermuster neben anderen (Einmaleinsfehler, Additionsfehler und Fehler bei den Behalteziffern) wieder auf. Für seine Behebung erwies sich neben der kurzen Begründung „die Einer unter die Einer und die Hunderter und die Hunderter" ein praktischer Hinweis als sehr hilfreich. Die Aufgaben wurden auf kariertes Papier geschrieben. Die letzten Ziffern der Teilprodukte bildeten eine *Treppe*. Die Schüler wurden aufgefordert, diese immer mit rotem Stift zu zeichnen, was sie gerne taten und amüsant fanden.

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 18 \\ \hline 280 \\ +\ 35 \\ \hline 630 \end{array}$$

Bilden die letzten Ziffern der Teilprodukte keine Skala, ist dieses ein Hinweis auf falsches Schreiben der Teilprodukte.

Oft multiplizierten die Schüler nicht mit allen Ziffern des Multiplikators, sondern ließen eine aus. Um dies zu vermeiden, wurden zuerst die Ziffern des Multiplikators gezählt und so die Anzahl der Teilprodukte berechnet. Die Anzahl der Ziffern des Multiplikators geben auch die Anzahl der Teilprodukte an. Die praktischen Hinweise wurden ständig wiederholt und angewendet. Die formulierten Generalisierungen wurden auch in Hinblick auf die Multiplikation erweitert, als ähnliche Fehler auftraten:

- „Bei der Multiplikation (wie bei der Addition und Subtraktion) beginnen wir immer von unten."
- „Wir vergessen nicht die Skala und die Anzahl der Teilprodukte."
- „Nicht vergessen! Die Überträge bei der Multiplikation, Addition und Subtraktion."

In den ersten Stunden traten auch die Fehler mit der Null auf. Die Null war bei allen Operationen ein Rätsel für die Schüler. Innerhalb des Multiplikationsverfahrens traten Fehler der Form 3*0=3 auf. Dieses Fehlermuster zeigt, dass die Schüler eine mangelnde anschauliche Vorstellung von der Operation speziell im Zusammenhang mit der Null haben (vgl. Gerster, 1982a, S.128). Dafür wurden auch hier Operationen an Material als nützlich angesehen. Die Handlungen wurden mit arithmetischen Symbolen festgehalten. In eine Tüte wurden Bonbons gelegt. Ein Schüler wurde aufgefordert, vier Mal mit seiner Hand in die Tüte zu greifen und hieraus jedes Mal ein Bonbon zu nehmen. Diese Handlung wurde auch in Form eines Produktes geschrieben $4\times1=4$. Ein zweiter Schüler wiederholte die Handlung, jedoch jedes Mal ohne etwas herauszunehmen. So gelangten die Schüler zu der Aussage $4\times0=0$. Die Rolle der Null in der Multiplikation wurde den anderen Operationen gegenübergestellt:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +0 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +4 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ -0 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ -4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \times 4 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ \times 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 1 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \times 4 \\ \hline 4 \end{array}$$

Zusätzlich wurde auch die Eins in der Multiplikation thematisiert obwohl die Schüler mit ihr keine Schwierigkeiten hatten. Die Fehler mit der Null hielten sich jedoch. Jedes Mal wurden diese Abbildungen hervorgeholt und die Schüler konnten ihre Fehler selbst erklären.

Die Maßnahmen, die für die Sicherung des Einmaleins getroffen wurden, hatten auch das Ziel, die Fehler mit den Behalteziffern zu vermindern (vgl. Gerster, 1982a, S. 141). Es wurden oft falsche Behalteziffern addiert. Manchmal lag das an den Einmaleinsfehlern oder an der Schwierigkeit der Schüler, sich die richtige Ziffer zu merken. Deshalb wurde beschlossen, die Behalteziffer immer zu notieren. Alle Schüler notierten diese rechts neben der Aufgabe ohne dass dadurch neue Fehler entstanden. Nachdem die Behalteziffer addiert war, sollte diese sofort durchgestrichen werden. Stella „behielt“ die Behalteziffern mit den Fingern der linken Hand, kam aber manchmal durcheinander und bevorzugte deshalb diese immer zu schreiben. Diese Abmachung wurde nicht immer von den Schülern eingehalten. Es gab Fälle, in denen sie die notierten Ziffern nicht addierten oder sie addierten diese zwei Mal, weil sie vergaßen diese durchzustreichen. Jedoch konnten diese Fehler vermindert werden.

Es ist der Anfang des dritten Monats und die Behandlung der Multiplikation wird abgeschlossen. Obwohl den Schülern verschiedene Rechenstrategien vorgestellt wurden und sie diese richtig anwenden können, benutzen sie immer noch manchmal das zählende Rechnen. Sie wissen dass 30+30=60. Das schließt nicht aus, dass sie die Summe 3+3=6 mit den Fingern berechnen. Bis zu diesem Zeitpunkt erfolgte die Behandlung der Themen in den Gruppen parallel. Zwischen den Schülern gab es Leistungsunterschiede. Die Verfasserin versuchte ihre Unterschiede auszugleichen, um die selben Lehrinhalte in den Gruppen zu erarbeiten. Die Multiplikation als Operation hat in Vergleich zur Subtraktion nicht so viele Schwierigkeitsfälle. Das war auch der Grund dafür, dass die Schüler sich schneller verbesserten. Die Schwierigkeiten sind weniger im Verfahren als im Einmaleins zu suchen.

5.8 Phase 4. Einführung der Division

Die letzte Phase des Unterrichts war für die Einführung der Division und die Behebung der Fehler in dieser Operation vorgesehen. Folgende Fehler waren in den Tests und Interviews systematisch aufgetreten:

- Fehler in der Subtraktion S_1, S_2, S_3
- Fehler bei der Auswahl der Quotientenziffer Q_1, Q_2, Q_3, Q_4
- Fehler im Verfahren V_1, V_2
- Fehler mit der Null 0_1, 0_2
- Fehler in den Teilprodukten P_1, P_2

Diese Fehler können den Operationen folgendermaßen zugeordnet werden:

Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division
P_2	S_1, S_2, S_3, Q_2	V_1, P_1, Q_1	V_2, Q_2, Q_3, 0_1, 0_2,
1	4	3	5

Tabelle 24: Auflistung der Divisionsfehler nach den Operationen

Diese Einteilung prägte auch die Unterrichtsplanung und die durchgeführten Arbeiten in den Gruppen. Aus dieser Tabelle lässt sich entnehmen, dass fünf systematische Fehler in der Division und acht in den übrigen Operationen lokalisiert wurden. Über die Fehler in den anderen Operationen wurde bereits gesprochen. Für ihre Behandlung wurden 2/3 der Unterrichtsstunden eingesetzt, da die Rolle dieser Operationen für die Erlernung und Durchführung der Division grundlegend ist. Sie bilden die Vorbedingungen und die Vorleistungen, auf denen die Division aufgebaut wird.

Am Anfang wurde erwähnt, dass der Förderunterricht inhaltlich auf den Algorithmus der Division begrenzt sein würde. Jedoch mussten auch die anderen Operationen eingeübt werden, da die Division ohne ihre Kenntnis nicht erlernt werden kann. Außerdem würden sich so auch die Fehler in der Division vermindern, was der Grund für die umfangreiche Behandlung der anderen Operationen war.

Die Kenntnisse der Schüler bezogen auf Division waren eingeschränkt und unsystematisch. Häufig begannen die Schüler die Division durch Dividieren des Divisors. In der Folge werden solche Handlungen näher betrachtet. Es stellt sich die Frage, ob diese Vorkenntnisse der Schüler hilfreich sein oder Hindernisse darstellen würden. Das Einführen des Verfahrens und die Korrektur der Fehlermuster erfolgten parallel, da die Behandlung der Fehler das richtige Verfahren aufbaute. Die Lehrinhalte wurden aus der Unterrichtsplanung und im Laufe des Unterrichts erarbeitet. Sie gliedern sich in folgende 5 Teilschritte:

1. Der Begriff der Operation
2. Dividieren durch einstelligen Divisor. Hier wurden folgende Fälle unterschieden:
    a. Alle Teildivisionen gehen in der Division auf.
    b. Die Teildivisionen gehen nicht auf und es bleiben Rest bei den Subtraktionen.
    c. Der Divisor ist größer als die erste Ziffer des Dividenden.
    d. Zwischennull im Dividenden
    e. Null im Quotienten

   f. Endnull im Quotienten
3. Dividieren durch Zehnerzahlen
4. Dividieren durch gemischt zweistelligen Divisor (666:18)
5. Dividieren durch dreistelligen Divisor (6452:234)

Dies waren die Einheiten für die eine Gruppe. Die zweite Gruppe arbeitete schneller, deshalb konnten manche Einheiten ausgelassen werden.

Die Schüler beider Gruppen kannten ihre Fähigkeiten und wussten, dass ihre Kenntnisse bezogen auf die Division unzureichend waren im Vergleich zu ihren Mitschülern. Für manche Schüler war der Einstieg in die Division ein besonderes Ereignis. Das konnte man an ihren spontanen Äußerungen erkennen, als sie hörten, dass in der nächsten Stunde die Division folgen würde. Stella und Irini fragten mit Verwunderung und Angst zugleich, ob sie wirklich die Division lernen würden. Alexis zeigte sich entschlossen und sagte, dass er sich bemühen würde, auch die Division zu lernen. „Sie machen Mathematik leicht" fügte er hinzu. Das wichtigste war, dass er eine mutige Haltung zeigte, obwohl er keine Vorerfahrung mit dieser Operation besaß.

Um das Verständnis für diese Operation zu vermitteln, wurden den Schülern vier Sachaufgaben gegeben. Jede erforderte eine der vier Operationen. Die Schüler erklärten, was in jeder Aufgabe gegeben und was gefragt war. So wurden die Operationen in Beziehung zueinander gesetzt und die richtige Operation für jede Aufgabe gewählt und begründet.

Nachdem die Schüler eine erste Vorstellung von der Division bekommen hatten, wurde ihnen eine Divisionsaufgabe gegeben. Obwohl ihre Leistungen in den Tests abgebildet waren und diese als Standortbestimmung galt, sollte hiermit festgestellt werden, ob in den Monaten, die inzwischen vergangen waren, Fortschritte stattgefunden hatten. Alexis sagte, er könne die Aufgabe nicht lösen. Thodoris führte den ersten Schritt der Division aus, wusste aber in der Folge nicht, wohin er das Teilprodukt schreiben sollte. Chronis schätzte die Quotientenziffer zu klein ein. Mit dem „Herunterholen" der nächsten Ziffer ergab sich eine zu große Zahl, und er konnte nicht weiter machen. Nikos gab folgende interessante Lösung. Er begann, mit dem kleinsten Stellenwert des Dividenden zu rechnen (was in den anderen Operationen zutrifft), schrieb jedoch die Teilprodukte in der richtigen Richtung auf.

$$\begin{array}{l|l} 6396 & \underline{3} \\ \underline{6} & 20300 \\ 09 & \\ \underline{-9} & \\ 03 & \end{array}$$

Gleichzeitig sprach er Folgendes aus: „Die 3 geht in die 6 (zeigt die letzte Ziffer) zweimal. 2 mal 3 ist 6 (schreibt die Zahl unter die erste Ziffer). 6 von 6 ist 0. Die 3 geht nicht in die 0, also 0 im Quotienten. Ich hole die 3...nein, die 9 runter. Die 3 geht in die 9 dreimal. 3 mal 3 ist 9, von 9 ist 0. 3 durch 0 geht nicht, also 0 im Quotienten. Ich hole die 3 runter. Die 3 in die 3, 0."

Irini schrieb das erste Teilprodukt unter die zweite Ziffer und rechnete auch die Subtraktion falsch. Sie war verunsichert und wollte nicht weitermachen, weil sie sicher war, dass es nicht richtig sein würde. Stella multiplizierte den Divisor mit der ersten Ziffer des Dividenden (3×6) und fand 18. Die Eins schrieb sie unter die erste Ziffer des Dividenden und die Acht in den Quotienten. Sie rechtfertigte ihr Vorgehen, indem sie sagte, sie wüsste, dass man die Zahlen mit Multiplikation berechnet. Weiter konnte sie nicht gehen. Mit diesen Feststellungen und den Erkenntnissen aus den Tests und den Interviews begann die systematische Behandlung der Division.

Zunächst wurde die *Rechenrichtung* thematisiert. Es wurde eine Aufgabe in einem Sachkontext gegeben, die die Schüler lösen sollten. Es ging um das Verteilen einer Summe. Die Schüler wurden aufgefordert, die Aufgabe mit Geld zu lösen. Es handelte sich um eine Division, bei der alle Teildivisionen aufgingen. Bei der Teilung fingen sie mit den Scheinen und den Münzen an, die den größten Wert hatten. Es war das Ziel, dass sie verstehen, dass man die Division immer mit den größten Stellenwerten beginnt, mit allen Stellenwerten einzeln arbeitet und die Ziffern des Dividenden als Hunderter, Zehner und Einer im Quotienten zugeordnet werden können. Betont wurde auch der richtige Ausdruck bei dem Divisionsverfahren.

Von diesem Zeitpunkt an lief die Behandlung der Division in den zwei Gruppen nicht parallel. In der einen Gruppe wurden mehrere Einheiten gebraucht, da die Schwierigkeiten des Verfahrens isoliert und gesondert vorgestellt wurden.

Durch Rückgriff auf den Zusammenhang von Multiplikation und Division als Umkehroperationen wurde noch einmal an das inverse Einmaleins erinnert. Die Schüler waren sehr froh darüber, dass sie die Grundaufgaben der Division nicht auswendig lernen mussten sondern ihre Vorkenntnisse hier anwenden konnten. Aus der Umkehrung der Aufgaben des Einmaleins erwarben sie die zugehörigen Divisionsaufgaben.

Als Nächstes wurden Divisionen thematisiert, in denen die Teildivisionen *nicht aufgehen,* wie z. B. in der folgenden Aufgabe:

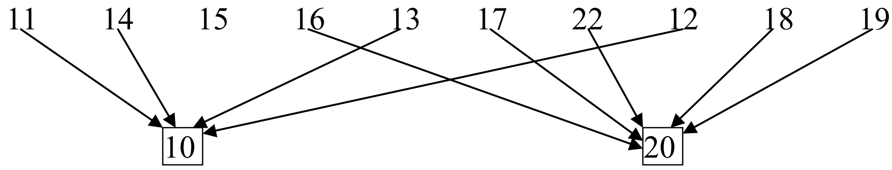
778	3
-6	2
17	

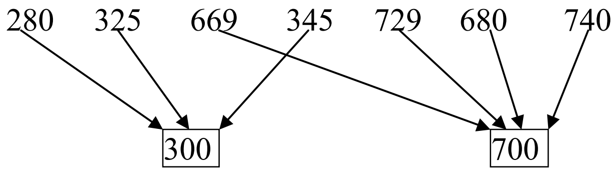
Zwei von den Schülern (Alexis und Irini) hatten große Schwierigkeit, die Quotientenziffern in solchen Aufgaben zu berechnen. Leicht konnten sie Divisionsfakten lösen, die aus einfacher Umkehrung des Einmaleins stammen. (Das inverse Einmaleins wurde in den letzten Stunden der Multiplikation geübt).

So konnten sie Rechensätze der Art 15:3, 28:7 oder 64:8 erarbeiten, doch Rechensätze wie 16:3, 17:3 usw. mussten in einer speziellen Stunde erarbeitet werden. Die Schüler waren auf die Beziehungen „15:3=5 weil 3×5=15“ starr gebunden, sie konnten keine weitere Erweiterung durchführen, um die Aufgabe 16:3 lösen zu können. Handelte es sich bei den Dividenden um keine Einmaleinszahlen, war die Division unmöglich für sie. Um diese Schwierigkeit zu beheben, wurde konkretes Material eingesetzt. Die Schüler führten Divisionen aus, in denen der Divisor den Dividenden ohne Rest teilte. In der Folge wurde der Dividend um eine Einheit erhöht, z. B. 15:3, 16:3, 17:3 usw. Auf diese Art änderte sich der Dividend, ohne dass sich auch der Quotient veränderte. Erst nachdem sie handelnd das Ergebnis feststellten, notierten sie auch die dazugehörige Division.

Nach dieser Einheit wurde den Schülern das *Runden und Abschätzen* des Ergebnisses vorgestellt, so dass sie in den folgenden Stunden dies üben und anwenden konnten. Im Kapitel „Testerhebung“ dieser Arbeit wurde über den ermüdenden Versuch der Schüler im Test gesprochen, die Quotientenziffer zu berechnen und um dies zu vermeiden, wurde das Runden empfohlen.

Das Runden wurde schrittweise eingeführt und sowohl auf den Dividenden als auch auf den Divisor bezogen. Begonnen wurde mit dem Zwanzigerraum und bis über den Tausenderraum erweitert. Die Übungen sahen so aus:





Das Runden der Zahlen hängt nicht mit dem Verständnis der Division, sondern mit dem Zahlenverständnis zusammen. Nachdem die Rundungsregeln besprochen waren, hatten die Schüler keine Schwierigkeit beim Runden der Zahlen. Sie konnten eine dreistellige Zahl auf die Zehner und die Hunderter auf- oder abrunden. Sie bevorzugten jedoch, die Zahlen auf glatte Zehner, Hunderter oder Tausender zu runden und so den Teilquotienten zu bestimmen. Von den Überschlagstechniken, die Gerster (1982a, S.189 ff.) unterscheidet, wurde eine ausgewählt: Überschlag durch Runden des Divisors und Feststellen, wie oft der gerundete Divisor in den (unveränderten) Dividenden passt. Um sehen zu können, ob die Schüler bei den zwei- und mehrstelligen Divisoren richtig gerundet hatten, wurde beschlossen, die Rundungszahl in einem Kreis über den Divisor zu schreiben.

Das Abschätzen des Ergebnisses betraf die Bestimmung der Stellenzahl des Quotienten, und zwar vor Beginn der Rechnung (vgl. Padberg, 1996, S. 243). Dafür wurden die Stellenwerte über die Ziffern geschrieben. War der Divisor größer als die erste Ziffer des Dividenden, würde der Quotient um eine Stelle kleiner sein. Dies soll folgendes Beispiel verdeutlichen:

T	H	Z	E	
7	5	6	8	: 4 = □

7T : 4 ≈ 1T
Der Quotient wird auch mit der Tausenderstelle beginnen, wird also vier Stellen haben.

T	H	Z	E	
3	5	9	2	: 8 = □

3T : 8 ≈ 0T
35H : 8 ≈ 4H
Der Quotient beginnt hier mit der Hunderterstelle, hat also drei Stellen.

Neben dem Abschätzen des Ergebnisses wurden auch ständig Vergleiche zwischen den Teilergebnissen und den Faktoren der Division durchgeführt, die jeden Schritt überprüfen sollten. Diese waren unabdingbar, denn die Division ist eine Operation mit hohem Komplexitätsgrad, der viele Fehler verursachen kann. Die Notwendigkeit dieser Vergleiche ergab sich aus bestimmten Fehlermustern, die in der Folge näher betrachtet werden.
Sehr häufig wählten die Schüler eine Quotientenziffer aus, die kleiner als die richtige war und so war der Rest der Subtraktion in diesem Teilschritt größer als der Divisor, wie im folgenden Beispiel zu sehen ist:

Die Rechenprinzipien fordern, dass die Teildifferenz kleiner als der Divisor ist.

$$\begin{array}{r|l} 331 & \underline{4\quad} \\ \underline{-28} & 7 \\ 051 & \end{array}$$

Dass die Quotientenziffer zu klein ist, merkten die Schüler auch nach der Subtraktion nicht. Sie wussten nur nicht weiter, weil der Teildividend zu groß war. Um dieses Fehlermuster verständlich zu machen, wurden Steckwürfel geholt. Fünfzehn Stück sollten an die drei Schüler verteilt werden und alle sollten gleich viele bekommen. Die Verfasserin verteilte den Kindern 4 Würfel und schrieb die zugehörige Division an die Tafel. Sie sagte, sie könne keine mehr ausgeben und fragte die Schüler, wie viele jeder bekommen hatte. Mit der Antwort „vier“ kamen auch die ersten Einwände von den Schülern, dass sie noch weitere bekommen könnten und zwar jeder einen mehr. Einer von ihnen nahm die drei Würfel und verteilte sie untereinander, so dass keiner übrig blieb. Auf die Frage der Verfasserin, wie man das Verfahren nun vervollständigen konnte, antworteten die Schüler, dass man noch eine Eins zum Quotienten schreiben musste, weil sie noch eins bekommen hatten. Ein Schüler führte das auch aus, multiplizierte und subtrahierte. „Es bleibt null“ sagte er.

$$\begin{array}{r|l} 15 & \underline{3\quad} \\ \underline{-12} & 4\mathbf{1} \\ 03 & \\ \underline{\mathbf{-3}} & \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

An solchen Stellen erschien es sinnvoll, die Fehllösung zunächst bestehen zu lassen und durch eine erneute Lösung mit Hilfe von Veranschaulichungen einen Konflikt zu erzeugen (vgl. Scherer, 1995, S. 153).

Wieder fragte die Verfasserin, wie viele Würfel die Schüler nun hatten, und die Schüler antworteten fünf. Als sie dann aufgefordert wurden, dieses Ergebnis mit dem Quotienten zu vergleichen, sahen sie mit Verwunderung, dass die Zahl 41 nicht stimmte. Die Schüler konnten langsam ihre Fehler verstehen. Daraus wurde folgende Schlussfolgerung gezogen, die als Rechenkontrolle dienen sollte:
„Der Rest jeder Subtraktion muss immer kleiner als der Divisor sein“. Diesem Fehlermuster sollte in der Folge sehr oft begegnet werden. Es ist auch noch im Nachtest bei manchen Schülern zu sehen. Es folgten ähnliche Beispiele, in denen die Teildifferenz nicht genauso groß wie der Divisor war, sondern etwas größer.
Oft erschien auch das inverse Fehlermuster:

$$\begin{array}{r|l} 539 & \underline{6\quad} \\ \underline{-54} & 9 \\ & \end{array}$$

Die Quotientenziffer wurde zu groß geschätzt und das Teilprodukt war größer als der Teildividend. Diese Subtraktion war im Bereich der natürlichen Zahlen unmöglich. Dieser Fall wurde schon bei der Behandlung der Subtraktion besprochen und die Schüler konnten ihren Fehler nachvollziehen. Um diesem Fehlertyp vorzubeugen, wurde eine zweite Rechenkontrolle formuliert: „Das Teilprodukt muss immer kleiner als der Teildividend sein, so dass die Subtraktion durchführbar ist.“
Die Rechenkontrollen, die die Chancen für ein richtiges Vorgehen maximieren sollten, waren demnach folgende:

a. Vergleich des Teilproduktes und des Teildividenden.
b. Vergleich des Restes der Subtraktion mit dem Divisor.

Die Schüler hatten verstanden, weshalb diese Vergleiche so wichtig waren, vergaßen jedoch oft, diese auch durchzuführen.

Mit dem Runden des Divisors, dem Berechnen der Quotientenziffern durch das Einmaleins und dem Abschätzen des Ergebnisses wurde das Auffinden der richtigen Ziffer leichter.
Das Divisionsverfahren wurde in vielen Sachaufgaben geübt und erprobt. Die Sachsituationen spielten dabei eine wichtige Rolle. Diese wurden so gestaltet, dass sie aus dem Lebensbereich der Schüler entstammten. Hatten sie auch etwas Rätselhaftes, steigerte sich das Interesse der Schüler für ihre Bewältigung (vgl. Massialas, 1975, S. 267). In diesen Aufgaben waren keine Fragestellung formuliert (was in den griechischen Lehrbüchern nicht zu finden ist), die Schüler sollten selbst die Fragen entwickeln und die Daten ermitteln.

Die Schüler hatten sich mittlerweile in vielen Stunden mit der Division auseinandergesetzt. Das minderte jedoch ihre Schwierigkeiten kaum. Besonders die Schüler der zweiten Gruppe, in der die nötige Homogenität nicht gegeben war, hatten weiterhin Schwierigkeiten. Es wurde versucht, mit langsamem Arbeitsrhythmus allen Bedürfnissen der Schüler gerecht zu werden. Es gab Tage, an denen die Schüler ermüdet in den Unterricht kamen. Dies erhöhte die Fehlerrate in ihren Antworten. Sie gaben schnelle und leichtsinnige Antworten, konnten sich schwer konzentrieren, machten die einfachsten Berechnungen falsch und vergaßen schon behandelte und ihnen bekannte Themen.

Die letzte Fehlergruppe waren die Nullen im Dividenden, in der Differenz und im Quotienten. Diese Fehler konnten die Schüler schwer alleine registrieren, wenn sie nicht zuvor einen Hinweis dafür von der Verfasserin bekamen. Das erste Fehlermuster dieser Gruppe war das Fehlen von Nullen im Quotienten, da wo es natürlich erforderlich war. Das Abschätzen des Ergebnisses deutete darauf hin, dass im Quotienten zu wenige Ziffern stehen, wie im folgenden Beispiel:

$$
\begin{array}{r|l}
1667 & 8 \\ \cline{2-2}
\underline{-16} & 28 \\
0067 & \\
\underline{-64} & \\
\end{array}
$$

Auch hier wurde konkretes Material eingesetzt, um einen ähnlichen Fall mit kleineren Zahlen zu beschreiben. Bei dem Verteilen von 808 Drachmen an vier Personen, erhielt handelnd jeder davon 202 Drachmen. Bei der schriftlichen Division verminderte sich das Ergebnis auf 22 Drachmen.

Die Schüler konnten den Grund für diese Differenz nicht erklären. Sehr hilfreich war an dieser Stelle die Benennung der Stellenwerte des Dividenden in Bezug zu den Ziffern des Quotienten. Es wurde betont, dass jede Stufe der Division eine Quotientenziffer liefern sollte. Teilt man die Hunderter, bekommt man Hunderter, teilt man die Zehner, bekommt man Zehner usw. Hatten wir aber Zehner? Nein. Diese Lücke konnte nur die Null füllen. Die Rolle der Null war es hier, an dem Platz zu stehen, wo Stellenwerte fehlten (stellenwertbelegende Rolle der Null). Denn in unserem dekadischen System kann man nicht von den Einern an die Hunderter gelangen, ohne vorher die Zehner erreicht zu haben. Da wir keine Zehner bekommen würden, müssten wir dies auch mit der Null ausdrücken. Das, was in der Erinnerung der Schüler blieb, war die generelle Schlussfolgerung: „Wenn wir eine Ziffer herunterholen und der Teildividend durch den Divisor nicht teilbar ist, schreiben wir eine Null im Quotienten.“

$$\begin{array}{r|l}
835 & 6 \\ \cline{2-2}
\underline{-6} & 10309 \\
2 & \\
\underline{-0} & \\
23 & \\
\underline{-18} & \\
05 & \\
\underline{-0} & \\
55 & \\
\underline{-54} & \\
1 &
\end{array}$$

Das zweite Fehlermuster dieser Gruppe war genau das Gegenteil des vorherigen, d. h. das Auftreten von überflüssigen Nullen im Quotienten. Die Schüler dividierten zusätzlich nach jeder Subtraktion auch die Teildifferenz, bevor sie die nächste Ziffer herunterholten, also dividierten sie mehrmalig in derselben Stellenwertspalte. Durch das Abschätzen des Ergebnisses konnten die Schüler erkennen, dass der Quotient zu groß war. Dieses Beispiel wurde handelnd mit Geld durchgeführt. Die Schüler konnten die Bildung des neuen Teildividenden mit der Teildifferenz und das Herunterholen einer neuen Ziffer feststellen. Es folgte die schriftliche Division mit der Schlussfolgerung: „Eine Null setzen wir im Quotienten nur, wenn wir eine Ziffer herunterholen und der Teildividend durch den Divisor nicht teilbar ist“.

Schwierigkeiten bereitete den Schülern auch die Endnull im Dividenden. Einige Schüler holten diese Null herunter und beendeten das Verfahren, so dass der letzte Divisionsschritt fehlte. Dieses Fehlermuster hatte jedoch keine große Streuung. Mit dem Abschätzen des Ergebnisses und der Erklärung der Stellenwerte konnte dieser Fehler leicht behoben werden. Erinnert wurde auch an die Multiplikation in der $5 \times 0=0$ galt und durch Umkehrung der Fakt $0:5=0$ auch stimmen müsste. Die Schüler realisierten, dass sie mit der Null wie mit jeder anderen Ziffer umgehen müssen und sie nicht ignorieren dürfen.

Die Zwischennullen wurden in dasselbe Fehlermuster eingeordnet, in dem der Teildividend kleiner als der Divisor ist. Die Schüler hatten damit keine nennenswerte Schwierigkeiten.
Die Behebung und Korrektur aller Fehler durchlief folgende Stufen:

a. Das Abschätzen des Ergebnisses und die Vergleiche zwischen Divisor, Teildividenden und Quotienten. Das führte zur Lokalisierung und Feststellung des Fehlers.
b. Dieselbe oder eine einfachere Aufgabe wurde an konkretem Material durchgeführt und veranschaulicht. Das führte zum Erkennen des Fehlers.
c. Durchführung der schriftlichen Division ohne Material.
d. Formulieren einer Schlussfolgerung.
e. Üben durch das Lösen ähnlicher Aufgaben.

Die Schüler hatten einige Schwächen in Mathematik, die sowohl aus der Situation in der Klasse als auch durch ihr Umfeld verstärkt wurden. Manchmal wurden sie durch die Menge ihrer Verpflichtungen ungeduldig und demotiviert. Ihre Gedanken blieben an bestimmten und transparenten Beziehungen stehen, ohne diese geeignet modifizieren zu können (dazu das Verstehen der Beziehung 15:3 und ihre Unfähigkeit, den Rechensatz 16:3 zu berechnen). Die Aufteilung des Unterrichtsstoffes in kleine Einheiten und die Isolierung der Schwierigkeiten erlaubte den Erwerb der Disziplin, die eine sehr komplexe Operation wie die Division erfordert. Dies hatte zur Folge, dass Einsicht in die verschiedenen Fehlermuster gewonnen wurde und so die Fehlerrate sank.
Die Gruppenleiterin musste ihrerseits flexibel bleiben. Wissen und geschicktes Handeln waren erforderlich, um jederzeit den Lehrstoff den Schülerbedürfnissen und dem Arbeits-

rhythmus der Schüler anzupassen, der stets bedingungslos respektiert wurde. Ursprüngliche Unterrichtsplanungen wurden in der Unterrichtspraxis modifiziert. Laut Unterrichtsplanung sollten beispielsweise in derselben Stunde sowohl der einstellige als auch der zweistellige Divisor behandelt werden. Es zeigte sich aber in der Praxis, dass die Schüler Verständnisschwierigkeiten hatten, so wurde nur der einstellige Teildividend in der ersten Stunde thematisiert. Alles sollte dem Kinde und seinem Tempo entsprechend vermittelt werden.

Die Divisionen durch zwei- und dreistellige Divisoren wurde als letzte Einheit eingeführt. Dabei wendeten die Schüler alle Rechenhilfen an, die sie in den Divisionen mit einstelligen Divisor bereits gelernt hatten: das Runden des Divisors, das Abschätzen des Ergebnisses und alle Schlussfolgerungen.

Durch das Lösen vieler Aufgaben sollten bestimmte Verhaltensweisen automatisiert werden (das Einschätzen der Quotientenziffer und die nötigen Handlungen, wenn diese zu groß oder zu klein geschätzt wurden). Wird das Verfahren mit einstelligem Divisor verstanden, haben die Schüler in den Aufgaben mit mehrstelligem Divisor wenige Probleme. Dieses Ziel konnten jedoch nicht alle Schüler in der Gruppe erreichen. Irini und Alexis blieben bis zum Zeitpunkt der Durchführung des Nachtestes bei den Aufgaben mit einstelligem Divisor. Irini konnte die nötige Konsequenz in der Regelhaftigkeit nicht aufbringen, die die einzelnen Schritte erforderten. Alexis brauchte länger, bis er das Umgehen mit dem gerundeten zweistelligen Divisor verstand. Ihr Lernrhythmus erlaubte es nicht, denselben Lehrstoff im selben Zeitraum zu erarbeiten. Es wären einige Stunden mehr erforderlich, um auch zur Division mit zweistelligem Divisor zu gelangen.

Nach dem Verlauf von zweieinhalb Monaten hörte der Förderunterricht auf, da die Weihnachtsferien bevorstanden. Nach einer zweiwöchigen Pause wurde der Nachtest geschrieben. Bestimmte und bekannte Fehlermuster traten auch in diesem Test auf. Jedoch handelte es sich dabei um keine systematischen Fehler. Im Klassenunterricht wurden gerade die Dezimalzahlen und die Grundrechenarten behandelt. Diese Einheit wurde zusammenfassend nach dem Nachtest auch im Förderunterricht erarbeitet. Die Schüler konnten den neuen Stoff leicht verstehen, da sie die Rechenoperationen reichlich geübt hatten. Die ersten Erfolgserlebnisse durch Bewältigung von Aufgaben in der Klasse zeigten Wirkung. Die Klassenlehrer konnten eine Veränderung erkennen, die zunächst in der Einstellung der Schüler und später in ihren Leistungen zu sehen war. Die Schüler wurden von ihren Lehrern gelobt und ermutigt, weiter dieselbe Aufmerksamkeit zu zeigen. Langsam erfolgte die Integration der Schüler in ihre Klassen und sie trauten sich auch, sich am Unterricht zu beteiligen. Abschließend führte die Verfasserin ein Gespräch mit den Klassenlehrern über den Arbeitsverlauf im Förderunterricht und die Lernmerkmale jeden Schülers.

5.9 Schlusswort

Im Förderunterricht wurde der Versuch unternommen, die Schwierigkeiten der Schüler zu vermindern, die in den Tests in Form von bestimmten Fehlermustern und in den Förderstunden in Form von Lernlücken zu sehen waren. Hierzu waren auf der einen Seite mathematische Kenntnisse in einer speziellen Didaktik erforderlich, die den Bedürfnissen der Schüler gerecht wurde. Andererseits war die emotionale Unterstützung der Schüler und die Schaffung einer Atmosphäre im Unterricht, die das gegenseitige Vertrauen und den vertrauensvollen Umgang gewährleistete, die wichtigsten Bestandteile der pädagogischen Beziehung, die zwischen der Verfasserin und den Schülern aufgebaut wurde. Diese bestimmte grundlegend jede Unterrichtsstunde, ist aber in diesem Bericht nicht Gegenstand der Darstellung. Das Wichtigste in diesen Stunden waren nicht die Inhalte, die mit den Kindern behandelt wurden. Es war der Versuch, sie anzuregen, in ihnen die Lust zum Lernen zu wecken. Diesen Schülern waren ihre Schwächen bewusst und sie „genossen" auch die entsprechenden Folgen in der Klasse und in ihrer Umgebung. Das reichte aber nicht, um ernsthaft den Willen für eine Veränderung ihres Zustandes zu wecken. Nachdem sie positiver gegenüber Mathematik eingestellt waren, bereiteten sie auch den Weg für die Verbesserung ihrer Lernlage. Denn schließlich waren es die Kinder selber, die diesen mühevollen Versuch unternommen hatten und es schafften, sich von ihren Fähigkeiten zu überzeugen. Deshalb erhält die gesunde pädagogische Beziehung den höchsten Stellenwert im Schema Lehrer - Schüler - Lehrstoff.

Durch diesen Förderunterricht machte die Verfasserin die Erfahrung, dass es sehr schwer ist, die Einstellung eines Schülers bezogen auf das Lernen in kurzem Zeitraum zu verändern (vgl. Massialas, 1975, S. 265). Auf jeden Fall sollte der Versuch von jedem Lehrenden unternommen werden, denn es gehört zu den größten Herausforderungen seiner Tätigkeit.

5.10 Die Behandlung der Schülerfehler während der Unterrichtsphase

Im Mittelpunkt des Förderunterrichts, der mit den Arbeitsgruppen durchgeführt wurde, standen die Fehler, die sie oder auch andere Schüler im Vortest gezeigt hatten. Es muss hier betont werden, dass es sich dabei um systematische Fehler handelte, die auch in den Unterrichtsstunden auftraten. Außer den Hypothesen, die man für die Fehlerursachen aufstellen könnte, spiegeln diese Fehlermuster auch die Denkweise der bestimmten Schüler wider bezogen auf die mathematischen Inhalte und ihre Strategien zur Durchführung der Operationen.

Bei ihren Handlungen stützten sich die Schüler auf ihre Kenntnisse, ihre Erfahrungen und ihre persönlichen Vermutungen. Sie gingen bewusst vor, und ihre Fehler waren somit Fenster zu ihren Gedanken (vgl. Kafousi, 1994, S. 33).

Die fehlerhaften Lösungsstrategien wendeten die Schüler konsequent an. Sie waren in ihren schriftlichen Arbeiten immer präsent, man brauchte sie nicht lange zu suchen. Die Schüler hatten eine eigenartige und schwer beeinflussbare Einstellung bezogen auf Fehler. Ihre bisherige Schullaufbahn und speziell ihre Leistungen in Mathematik waren von der Existenz von Fehlern stigmatisiert. Ihre Erfahrungen bestanden vorwiegend aus Enttäuschungen, Misserfolgen, schlechten Noten und negativen Bewertungen seitens der Lehrer oder Eltern und kritischen Bemerkungen von manchen Mitschülern und aus wenigen lichten Momenten, in denen sie etwas verstanden und richtig beantwortet hatten. Das spiegelte sich auch in ihrem niedrigen Selbstwertgefühl und -vertrauen wider. Sie bewerteten sich selbst sehr streng als schlechte Schüler in diesem Fach, und ihre Beschäftigung damit war ihnen aus diesem Grund kein Vergnügen.

Deshalb wurde immer als Ausgangspunkt eine Situation ausgewählt, die den Schülern keine Schwierigkeiten bereitete, auf ihren bestehenden Kenntnissen basierte und somit die zu Beginn erwünschten Erfolgserlebnisse bieten würde. Trotzdem wurden die kleinsten Schwierigkeiten mit den angehäuften Misserfolgserlebnissen der Schüler in der Vergangenheit assoziiert. Die ersten Fehlantworten und Fehler zerbrachen das angenehme Klima im Klassenraum, und die Schüler verloren jede Motivation und Lust. Für sie war die Tatsache, dass sie einen Fehler begangen hatten wichtiger als das Verstehen dieser Fehler. Diese Schüler waren eher leistungs- als lernorientiert. „Jede Aufgabenbearbeitung, jede mündliche Äußerung und jede schriftliche Darstellung (wurde) als Leistungssituation interpretiert (...) – als eine Situation also, in der man Erfolg oder Misserfolg haben kann und in der man sich als Person bewähren muss oder versagt“ (Weinert, 1996, S. 11). Dies war auch die kritischste Phase bei der Zusammenarbeit mit den Schülern. Das Vermitteln des schwierigsten Lehrstoffes war leichter als das Bekämpfen der Resignation, die das Erscheinen von Fehlern bewirkte. Auch die Reaktionen der übrigen Gruppenmitglieder bei dem Auftreten eines Fehlers mussten entsprechend gemildert werden. Hier musste die Einstellung der Schüler in Bezug auf Fehlern modifiziert werden, was nach langen Erklärungen erreicht wurde. Es wurde mehrmals betont, dass man aus Fehlern lernen kann und dass Fehler den Weg zum Lernen vorbereiten. Den Fehlern wurde somit ein anderer Stellenwert eingeräumt. Da das Begehen von Fehlern im Lehr- und Lernprozess als selbstverständlich angesehen wurde, war das Entdecken und Interpretieren dieser Fehler das wichtigste Ziel und das größte Geheimnis, dass die Schüler selbst enträtseln sollten. Also gab es auch eine positive Seite bei jedem Irrtum. Neugier und Erwartungen in Hinblick auf die richtige Antwort tauchten auf. Das war sehr wichtig, denn „wo Neugier, Faszination und Erwartung fehlen, wird die so wichtige Lernbereitschaft für einen zunächst fremden Stoff nicht geweckt“ (Vester, 1998, S. 8). So wurde auch das Interesse der Schüler erhalten und ihre Zusammenarbeit bis zur Entdeckung und Korrektur der Fehler gewährleistet.

Das Entdecken und die Korrektur der Fehler war also den Schülern selbst überlassen. Es kam oft vor, dass die Schüler ihre eigenen Fehler übersahen und nicht in der Lage waren, diese zu finden. In diesen Momenten wurden sie angehalten, ihre Lösungen Schritt für Schritt durchzugehen, zu kontrollieren und gleichzeitig miteinander zu vergleichen. Wenn die Ergebnisse nicht übereinstimmten, versuchten sie, die Aufgaben vorzurechnen, und stießen so auf die richtigen Antworten. Wurden die Lösungen zu abstrakt erklärt oder konnten sich die Schüler nicht auf eine Antwort einigen, wurde Anschauungsmaterial benutzt, um die Situation deutlicher zu machen. Das Einsetzen von konkretem Material half den Kindern, ihre Fehler nachzuvollziehen und zu verstehen.

Die Angaben wurden in Beziehung zu den Ergebnissen gesetzt, und es wurde versucht, ungefähre Ergebnisse zu schätzen. Besonders hilfreich war für die Schüler die Arbeit mit bildlichen Darstellungen und noch mehr das Umgehen mit konkretem Material. Wenn den Schülern das Anschauungsmaterial hilfreich war und sie verstanden, wo ihre Fehler lagen, konnten sie ihre Aufgaben selbstständig korrigieren.

Die Gruppenleiterin versuchte währenddessen ein Gleichgewicht in der Gruppe herzustellen, um sie auf ein gemeinsames Niveau zu bringen. Sie ermutigte die Kinder, ihre Meinungen zu äußern, diese zu begründen und zu argumentieren, an Gesprächen teilzunehmen und dadurch ihren sprachlichen Ausdruck zu fördern. Durch ihren Einsatz half sie beim Überwinden von Problemsituationen. Trotzdem konnten die Fehler nicht beseitigt werden. Sie sind immer ein Teil der Unterrichtspraxis geblieben, weil das Gelernte nicht oft genug wiederholt und angewendet wurde, sei es durch Eigeninitiative oder durch die Unterstützung der Eltern.

5.11 Lernfaktoren

Für den Erwerb der ausgewählten Inhalte wurden Verfahren angewendet und bestimmte Faktoren berücksichtigt, die das Erreichen der gesetzten Ziele ermöglichen, erleichtern und stützen würden. Solche Faktoren waren:

- Die eigene Erfahrung durch Handlungen am konkreten Material. Am Anfang des Jahrhunderts betonte Dewey, dass das Lernen aus Erfahrung und Handlung resultiert. Trotz zahlreicher Erkenntnisse, die dieser Ansicht folgten und erklärten, wie ein Kind Wissen erwirbt, wurde die Erkenntnis von Dewey nicht bezweifelt. Die mathematischen Kenntnisse der Schüler entstehen entweder aus der unmittelbaren Interaktion mit der Umwelt oder aus der Auseinandersetzung mit verschiedenen Modellen (vgl. Filippou & Christou, 1995, S. 57).

- Die Bildung von Begriffen. Diese sind bedeutsam, wenn man sie aus der Erfahrung, aus den Handlungen mit Material, aus Erlebnissen oder aus bereits erworbenem Wissen herleitet. Da sich die Schüler der Grundschule in der konkret-operativen Phase befinden, können sie leichter Begriffe bilden und verstehen, wenn sich die mathematischen Inhalte auf konkrete Beispiele stützen. Zur Optimierung des Erwerbs bestimmter mathematischer Einheiten wurden neben konkretem Material auch Medien (z. B. Kassettenrecorder, Spielkarten, beschriftete Kartons, Skizzen, usw.) eingesetzt, um so durch Beobachten, Lesen, Zuhören, Imitieren (soziales Lernen) und Üben die entsprechenden Inhalte zu erwerben.

- Es wurde der Versuch unternommen, das familiäre und schulische Umfeld der Schüler zu beeinflussen und jedes Mal die bereits erworbenen Kenntnisse der Schüler zu nutzen und von Neuem ihre Motivation und ihr Interesse bezogen auf bestimmte Lerninhalte anzuregen. Die Einführung oder Übung des neuen Stoffes knüpfte an Interessen und Neigungen der Schüler an. Die Aufgaben wurden zwischendurch mit Skizzen verbunden, so dass neben den rechnerischen auch die zeichnerischen Fähigkeiten der Schüler gefördert werden konnten. Die Schüler konnten so Spaß und Freude am Arbeiten und Lernen empfinden, Gefühle, die „für eine lernpositive Hormonlage und damit für ein reibungsloses Funktionieren der Synapsen und des Kontaktes zwischen den Gehirnzellen“ sorgen (Vester, 1998, S. 191).

- Die Definition und Kenntnis der Lernziele. Es war sehr wichtig, dass die Schüler die Lernziele erfahren und wissen, was sie erlernen werden und welche Verhaltensweisen von ihnen nach dem Abschluss des Lernvorgangs erwartet werden. So konnten sie sich schon vor dem Lernbeginn an diesen Leistungen orientieren. Das Behalten des Lehrzieles „im Hinterkopf“ während der Lernzeit ermöglichte es den Schülern das Erreichen des Lernzieles selber zu beurteilen und zunehmend Verantwortung für ihre eigene Leistung zu übernehmen (vgl. Gagné, 1975, S. 241ff) Gleichzeitig wurde auch die Bedeutung und der Wert der Lerninhalte von ihnen und von der Verfasserin angesprochen und die Notwendigkeit dieses Wissens bewertet (vgl. Kossiwaki, 1993, S. 42). Nach Vester hat die Einsicht in die Lernziele den Effekt, im Schüler den Antrieb und die Aufmerksamkeit zu wecken, ihn zum Lernen zu motivieren, seinen Organismus auf „Aufnahme“ zu stimmen und den Inhalt sinnvoll zu speichern (vgl. Vester, 1998, S. 189). Die Definition der Lernziele sollte den Schülern die Ziele ihrer Bemühungen vor Augen führen und ihre Lernbereitschaft erhöhen.

- Die Variation von Arbeitsmitteln. Es wurden für jedes Kapitel neue Aufgabentypen genutzt (Zahlenmauern, Zahlenhäuser, Zauberdreiecke, operative Aufgabenserien) und die Übungsinhalte abwechslungsreich gestaltet, um das Interesse der Schüler aufrecht zu erhalten. Dadurch wurden der Langeweile und Einschleifeffekten im Sinne des „Luchins-Effekts“ vorgebeugt, die durch die Beschäftigung mit gleichförmigen Aufgabentypen entstehen können (vgl. Padberg, 1996, S. 266).

- Die Organisation des Lernens bzw. des Lerninhalts. Was diesen Schülern schwer fiel, war einen Überblick über erworbene und neu erlernte Fähigkeiten zu bekommen. Sie konnten kein Fazit ziehen über die Variationen derselben Themenbehandlung. Aus diesem Grund wurden die Lernelemente zu übersichtlichen Sequenzen zusammengefasst, um den Schülern zu helfen, die Struktur des Unterrichtsinhalts zu erkennen. Weiterhin wurde die Beziehung der Teilziele zueinander und ihre Zuordnung zum Gesamtaufbau des Förderunterrichts bewusst gemacht (vgl. Fischer, 1968, S. 73). In dem Sinne wurden z. B. nach der Einführung der Rechenstrategien in den Grundrechenarten verallgemeinert und zusammengefasst, welche und wie viele Vorgehensweisen für die Durchführung der Rechenoperationen offen stehen. Die Einführung jeder neuen thematischen Einheit durchlief somit folgende Etappen: a. informierender Einstieg, b. Erarbeitungsphase, c. Übungsphase und d. Zusammenfassung.

- Der Einsatz von Verstärkern. Während der Unterrichtsstunden wurden verschiedene Verstärker eingesetzt, die die kleinen Fortschritte der Schüler begleiteten. Dabei handelte es sich um soziale und informative Verstärker (vgl. Edelmann, 1996, S. 125). Zu den sozialen Verstärkern gehörten auf der einen Seite Gesten wie Händeschütteln, Schulterklopfen, Kopfnicken, Lächeln und das Beobachten der Schüler bei der Arbeit. Chronis und Stella bestanden darauf, dass die Verfasserin ihnen bei der Bewältigung von Aufgaben zuguckte. Ihrer Meinung nach machten sie auf diese Weise weniger Fehler. Auf der anderen Seite wurden Belobigungen der Verfasserin, über eine erfolgreiche Auseinandersetzung mit gestellten Aufgaben, von den Schülern immer mit Begeisterung angenommen (z. B. Das hast du aber toll gemacht! Bravo! Spitze! Du wirst immer besser! usw.). Diese Bemerkungen wurden auch mit großem Stolz den Eltern mitgeteilt. Diese Verstärker wurden dann eingesetzt, wenn die Schüler eine herausfordernde Situation bewältigten. „Lob und Anerkennung für gute schulische Leistungen oder positives Sozialverhalten sind eben nur dann Verstärker, wenn sie möglichst sofort auf das geäußerte Verhalten folgen“ (Edelmann, 1996, S. 125). Zu den informativen Verstärkern gehörten Aussagen über die Vorgehensweise und über die Handlungen der Schüler. Es handelte sich dabei um Rückmeldungen, die die Lernenden über die Richtigkeit ihrer Leistungen informierten, Möglichkeiten einräumten, ihre Tätigkeiten einzuschätzen und wenn nötig entsprechend zu modifizieren.

5.12 Der Nachtest

Nachdem im Förderunterricht alle Operationen einzeln behandelt und alle Fälle der Division erarbeitet waren, war es interessant, Aufschluss über den abschließenden Leistungsstand der Schüler zu erhalten. Es sollte geprüft werden, inwieweit sie die vorgestellten Inhalte verinnerlicht hatten und ob Veränderungen in den Fähigkeiten der Schüler zu beobachten waren. Dafür wurde der Nachtest eingesetzt, der mit dem ursprünglichen Test (der im vorigen Schuljahr in den Schulen durchgeführt wurde) zu vergleichen war. Durch den Vergleich der zwei Testergebnisse würde sich zeigen, inwiefern sich der Förderunterricht auf den Leistungsstand der Schüler ausgewirkt hatte, welche Ergebnisse der Unterricht hatte. Beim Nachtest handelte es sich um denselben Test, den die Schüler in ihren Klassen am Anfang der Untersuchung geschrieben hatten. Demnach wurde derselbe Test zu zwei unterschiedlichen und voneinander entfernten Zeitpunkten durchgeführt. Die Schüler hatten wieder eine Stunde Zeit, um die Aufgaben zu bearbeiten. Der Förderunterricht dauerte drei Monate und erstreckte sich bis zu den Weihnachtsferien. Nach den Ferien und zweieinhalb Wochen nach dem Abschluss der Unterrichtsphase wurde der Nachtest durchgeführt. In der Folge werden die Leistungen der Schüler zunächst im Vortest und anschließend im Nachtest geschildert und miteinander verglichen. Bei der Beschreibung der auftretenden Fehler werden die Fehlermuster sowie deren Häufigkeit (f) angegeben.

Erster Fall

Irini hatte im Vortest neun Aufgaben bearbeitet, die Lösungen waren aber fehlerhaft. In zwei Aufgaben mit einstelligen Divisor notierte sie den richtigen Quotienten, ohne dass die dazugehörigen Schritte in der Divisionsstaffel stimmten. Sie kannte zwar die richtige Rechenrichtung, was aus der Bearbeitung der Ziffern des Dividenden zu ersehen ist. Manchmal vergaß sie, die Ziffer des Dividenden herunterzuholen, mit der sie gerade arbeitete. Sie schrieb die Teilprodukte nicht stellengerecht untereinander, sondern in zufälliger Reihenfolge. Manchmal stand das erste Teilprodukt unter der zweiten, der dritten oder der ersten Ziffer des Dividenden. Dadurch entstanden auch falsche Faktoren für die folgenden Subtraktionen, in denen sie die kleinste von der größten Ziffer abzog und Schwierigkeiten beim Abziehen mit der Null hatte. In den Aufgaben mit zweistelligem Divisor hatte sie größere Schwierigkeiten. Aus falschen Teilprodukten kam sie hier zu richtigen Teildividenden. Dies alles deutete darauf hin, dass sie durch Abschreiben viele richtige Ergebnisse auf ihr Arbeitsblatt notierte ohne dabei die richtige Platzierung im Kopf zu behalten.

Im Nachtest bearbeitete sie vierzehn Aufgaben und löste acht davon richtig. Folgende Fehler traten auf:

- Fehler beim Berechnen der Quotientenziffer:
  QZ zu klein, Teildifferenz > Divisor, dadurch mehrmaliges Dividieren in derselben Stellenwertspalte Q_3 (f=2)
- Fehler beim Berechnen der Teilprodukte:
  Richtige Quotientenziffer, falsches zugehöriges Teilprodukt P_1 (f=1)
- Fehler mit der Null:
  Eine Null fehlt im letzten Divisionsschritt (0_3). Die Endnull des Dividenden wird heruntergeholt und nicht weiter beachtet (f=1)
- Subtraktionsfehler:
  In Subtraktionen mit Übertrag S_2 (f=1)
  Beim Abziehen von der Null S_3 (f=2)
- Unvollständiges Verfahren:

Fehlen der letzten zwei Divisionsschritte V_2 (f=2)

- Fehler beim Herunterholen der Ziffern:
  Eine Ziffer des Dividenden wird nicht heruntergeholt H_4 (f=1)

Zweiter Fall

Chronis bearbeitete im Vortest sieben Aufgaben ohne zu einem richtigen Ergebnis zu gelangen. Sein Vorgehen zeigt, dass er durch einstelligen Divisor dividieren kann. Er begeht dabei typische Fehler:

- Fehler mit der Null im Quotienten:
  Eine Null fehlt im letzten Divisionsschritt (0_3). Die Endnull des Dividenden wird nur heruntergeholt und nicht weiter beachtet (f=2).
  Fehlen der Zwischennull im Quotienten (0_1), wenn der Teildividend < der Divisor ist (f=2).
- Subtraktionsfehler:
  Fehler beim Abziehen von der Null S_3 (f=1).
  Eine größere Zahl wird von einer kleineren abgezogen (f=2).
- Fehler beim Berechnen der Quotientenziffer:
  QZ zu klein, Rest = Divisor Q_3 (f=1).
  QZ zu groß, Teilprodukt > Teildividend, doch die Subtraktion wird ausgeführt Q_2 (f=1).
- Unvollständiges Verfahren:
  Durch Herunterholen einer neuen Ziffer und vorangegangene Fehler entsteht ein großer Rest, der nicht weiter bearbeitet wird (f=2).
- Fehler beim Berechnen der Teilprodukte:
  Falsche Quotientenziffer, zugehöriges richtiges Teilprodukt Q_1(f=1).

Beim Dividieren durch zweistelligen Divisor arbeitete er nun mit der einen Ziffer des Divisors, wahrscheinlich weil er das Verfahren nicht kannte. Im zweiten Schritt setzte er als Teilprodukt dieselbe Zahl mit dem Teildividenden, um das Verfahren zu beenden.

Im Nachtest bearbeitete er alle Aufgaben, zehn davon erfolgreich. Seine Fehler waren folgende:

- Fehler beim Berechnen der Quotientenziffer (QZ):
  QZ zu klein, Rest > Divisor Q_3 (f=1)
- Fehler im Verfahren:
  Er arbeitet mit der einen Ziffer des zweistelligen Divisors V_1 (f=1).
- Fehler mit der Null:
  Überflüssige Null im Quotienten durch Dividieren des Restes 0_2 (f=1).
- Fehler beim Berechnen der Quotientenziffer:
  Er vergisst das Schreiben einer Ziffer im Quotienten, mit der das Teilprodukt richtig berechnet ist Q_5 (f=1).
- Fehler beim Herunterholen der Ziffer:
  Zwei Ziffern gleichzeitig heruntergeholt H_1 (f=1).
- Fehler beim Berechnen des Teilproduktes:
  Richtige Quotientenziffer, falsches zugehöriges Teilprodukt P_1 (f=1).
- Unvollständiges Verfahren:
  Fehlen der zwei - drei letzten Divisionsschritte V_2 (f=2).

Dritter Fall

Thodoris bearbeitete im Vortest ebenfalls sieben Aufgaben. Zwei davon hatten einen zweistelligen Divisor. Er setzte jedoch nur aufeinanderfolgende Einer im Quotienten, da er vermutlich nicht wusste, wie man die Quotientenziffer in diesen Fällen abschätzen kann. Nachdem er alle Ziffern des Dividenden heruntergeholt hatte, ließ er den Rest, bei dem es sich um eine große Zahl handelte, stehen. Demnach hat er Schwierigkeiten beim Berechnen der Quotientenziffern (2) (zu kleine Quotientenziffer, mehrmaliges Dividieren in derselben Stellenwertspalte). In den Aufgaben mit einstelligem Divisor wurden folgende Fehler festgestellt:

- Unvollständiges Verfahren:
  Fehlen des letzten Divisionsschrittes V (f=1). Beim Herunterholen der letzten Null, die mit dem Rest der Subtraktion den neuen Teildividenden bildete, beendet er auch das Verfahren.
  Fehlen von mehreren Divisionsschritten V_2 (f=3)
- Fehler beim Herunterholen der Ziffern:
  Er holt zweimal dieselbe Ziffer herunter H_2 (f=1).
  Er holt zwei Ziffern gleichzeitig herunter H_1 (f=1).
  Er schreibt die heruntergeholte Ziffer an die falsche Stelle (f=1).
- Subtraktionsfehler:
  Er zieht die größere von der kleineren Ziffer ab S_2 (f=2).
- Fehler beim Berechnen der Quotientenziffer:
  QZ zu groß, Teilprodukt > Teildividend Q_2 (f=1).
  QZ zu klein, Teildifferenz > Divisor Q_3 (f=1).
- Fehler mit der Null:
  Die Endnull des Dividenden wird heruntergeholt und nicht weiter beachtet 0_3 (f=1).

Im Nachtest bearbeitete er alle Aufgaben und löste elf davon richtig. Die meisten Fehler hatte er in den Aufgaben mit zweistelligen Divisoren. Eine positive Überraschung war das Bewältigen der Aufgabe mit dem dreistelligen Divisor. Seine Fehler waren folgende:

- Fehler im Quotienten:
  QZ zu groß, Rest = Divisor Q_2 (f=1).
  QZ zu klein, Rest > Divisor Q_3 (f=1).
  Überflüssige Null im Quotienten durch Dividieren des Restes 0_2 (f=1).
  Falsche Quotientenziffer und zusätzlich Fehler beim Berechnen des Teilproduktes Q4 (f=1).
- Subtraktionsfehler:
  Fehler in Subtraktionen mit Übertrag S_2 (f=1).
  Abziehen der kleineren von der größeren Ziffer (f=1).

Die Schüler Stella, Nikos und Alexis gaben im Vortest ein leeres Arbeitsblatt ab. An dieser Stelle werden nur ihre Leistungen im Nachtest beschrieben.

Vierter Fall

Nikos bearbeitete alle Aufgaben im Nachtest. Er wollte sich unbedingt mit allen Aufgaben beschäftigen, obwohl es eine große Anstrengung für ihn bedeutete. In den letzten zwei Aufgaben radierte er ständig aus und war so verzweifelt, dass er zu weinen begann. Die

Verfasserin erklärte ihm, dass er nicht alle Aufgaben lösen muss, wenn er Schwierigkeiten hat. Er wollte jedoch sein Blatt nicht zurückgeben, bevor er nicht alle Aufgaben gerechnet hatte. Bei neun Aufgaben fand er die richtige Lösung. Er beging folgende Fehler:

- Fehler mit der Null:
  Fehlen einer Null im Quotienten, da der Teildividend nach dem Herunterholen einer Ziffer kleiner als der Divisor ist 0_1 (f=1).
  Fehlen einer Null im letzten Divisionsschritt. Die Endnull wird heruntergeholt und das Verfahren beendet 0_3 (f=2).
- Fehler beim Berechnen der Quotientenziffer:
  QZ zu klein, Rest = Divisor Q_3 (f=1).
- Fehler beim Herunterholen der Ziffer:
  Eine Ziffer des Dividenden wird ausgelassen, weil dieselbe zweimal vorkommt H_4 (f=1).
  Die letzte Ziffer des Dividenden wird nicht heruntergeholt H_3 (f=1).

Fünfter Fall

Stella war sehr nervös und unsicher während des Testes und wollte die Bestätigung der Verfasserin für jede Aufgabe haben, die sie bearbeitete. An manchen schwierigen Stellen blieb sie hängen und konnte nicht fortfahren. Sie bearbeitete fünfzehn Aufgaben und rechnete acht richtig. Ihre Fehler wurden an folgenden Stellen lokalisiert:

- Fehler mit der Null:
  Fehlen einer Null im letzten Divisionsschritt. Die Endnull des Dividenden wird nur heruntergeholt 0_3 (f=2).
- Fehler beim Berechnen der Quotientenziffer:
  QZ zu klein, Rest = Divisor Q_2 (f=2).
  QZ zu groß, Teilprodukt > Teildividend, trotzdem wird subtrahiert Q_2 (f=1).
- Fehler beim Herunterholen der Ziffer:
  Die letzte Ziffer des Dividenden wird nicht heruntergeholt H_3 (f=1).

Sechster Fall

Alexis hatte bis zum Zeitpunkt der Durchführung des Nachtestes nur das Verfahren mit einstelligen Divisor erlernen können. Daher löste er alle sieben Aufgaben des Testes mit einstelligem Divisor. Vier von sieben Aufgaben waren fehlerfrei. In den übrigen beging er folgende Fehler:

- Fehler beim Berechnen der Quotientenziffern:
  QZ zu klein, Rest > Divisor Q_3 (f=1).
- Subtraktionsfehler:
  Bei der Subtraktion mit Übertrag S_2 (f=2) ergab sich mit dem Herunterholen der nächsten Ziffer ein dreistelliger Teildividend. Alexis arbeitete nur mit den zwei letzten Ziffern des Teildividenden, setzte in der Folge kleine Quotientenziffern und hörte beim zweistelligen Rest auf.

Er versuchte eine Aufgabe mit einstelligem Divisor zu lösen, kam aber nicht weiter.

Der folgenden Tabelle ist die Anzahl der erarbeiteten Aufgaben und der richtig gelösten Aufgaben für jeden Schüler im Vor- und Nachtest zu ersehen:

	Be. Auf.[1] T_V[2]	R. Auf.[3] T_V	Be. Auf. T_N[4]	R. Auf. T_N
Irini	9	0	14	8 (50%)
Chronis	7	0	16	10 (62,5%)
Thodoris	7	0	16	11 (68,75%)
Stella	0	0	15	8 (50%)
Nikos	0	0	16	9 (56,25%)
Alexis	0	0	8	4 (25%)

Tabelle 25: Die Leistungen der Schüler im Vor- und Nachtest

[1] „Be. Auf." steht als Abkürzung für „bearbeitete Aufgaben"
[2] "T_V" steht für „Vortest"
[3] "R. Auf." für „richtig gelöste Aufgaben"
[4] "T_N" steht für „Nachtest"

An dieser Stelle wurde kein Versuch unternommen, die Testergebnisse statistisch abzusichern. Die kleine Stichprobe, mit der sowohl der Vor- als auch der Nachtest durchgeführt wurde, würde keine aussagekräftigen Ergebnisse liefern.

Wie man der Tabelle entnehmen kann, haben die Schüler mit Ausnahme von Alexis fast alle Aufgaben im Nachtest bearbeitet. Im Vortest konnten sich drei Schüler gar nicht mit Divisionsaufgaben auseinandersetzen. Die übrigen drei Schüler haben sich mit der Hälfte der Aufgaben befasst. Im Vortest gab es nur Lösungsversuche, im Nachtest war mindestens die Hälfte der Aufgaben richtig gelöst. Systematische Fehler waren bei keinem Test aufzufinden. Im Vortest nicht, weil die Kenntnisse der Schüler unzulänglich waren und im Nachtest nicht, weil die verschiedenen Fehlermuster maximal zweimal auftraten. Es lässt sich festhalten, dass in den fehlerhaften Lösungen des Nachtestes meist ein Fehlermuster und nicht mehrere in derselben Aufgabe zu beobachten waren. Die Fehlermuster, die von denselben Schülern zweimal (in unterschiedlichen Aufgaben) wiederholt wurden, waren folgende:

Chronis: V_2 (Fehlen der zwei – drei letzten Divisionsschritte)
Irini: V_2 (siehe oben), S_3 (Fehler beim Abziehen von der Null), Q_3 (QZ zu klein, Teildifferenz > Divisor)
Stella: Q_2 (QZ zu klein, Rest = Divisor), 0_3 (Die Endnull des Dividenden wird heruntergeholt und nicht weiter beachtet)
Nikos: 0_3 (siehe oben)
Alexis: S_2 (Fehler in Subtraktion mit Übertrag)

Chronis bearbeitete die letzten zwei Aufgaben unvollständig, weil er vermutlich übermüdet war. Bei diesen Aufgaben musste er mit großen Zahlen arbeiten, und das war ihm zu anstrengend.

Irini hatte dieselbe Schwierigkeit wie Chronis mit den großen Zahlen und ließ ihre Berechnungen in zwei Aufgaben unvollständig. Beim Abziehen von der Null notierte sie wieder dieselbe Zahl, weil sie vermutlich die falsche Rechenrichtung anwendete. Bei dem Berechnen der Quotientenziffern wählte sie zweimal zu kleine Ziffern aus. Die Teildifferenz war größer als der Divisor. Deshalb dividierte sie noch einmal in derselben Stellenwertspalte, ohne zu begreifen, dass der Quotient dadurch zu groß wird.

Stella wählte eine Quotientenziffer aus, deren Rest genauso groß wie der Divisor war. Das gab ihr aber nicht den Hinweis, dass sie ihre Quotientenziffer um eins vergrößern musste.

Also ließ sie diesen Rest stehen. Die Endnull des Dividenden irritierte sie und Thodoris. Beide holten diese herunter und hielten damit die Arbeit für beendet.

Alexis wendete die Erweiterungstechnik in der Subtraktion an. Die Erweiterungsziffer vergaß er jedoch zu addieren, so kam er zu falschen Ergebnissen.

Nachdem zweieinhalb Wochen vergangen waren, wurden wichtige und hervorgehobene Regeln und Sonderfälle der Division vergessen. Für jeden Schüler waren es spezielle Momente, in denen bekannte Fehlermuster auftraten. Das war jedoch keine Enttäuschung für die Verfasserin sondern eher eine Erwartung.

Es war nicht das erste Mal, dass die Schüler sich mit der Operation der Division auseinandersetzten. Zum ersten Mal wurden sie aber aufgefordert, sich aktiv mit ihr auseinanderzusetzen. Die Division ist eine ausgesprochen schwierige Rechenoperation. Offensichtlich war die Division den Kindern nicht bekannt, so dass sie im Förderunterricht eingeführt wurde und zugleich verschiedene und recht schwierige Anwendungsfälle behandelt wurden. Innerhalb von drei Monaten sollten sie das Verständnis für die Division, das Verfahren und die Sonderfälle entwickeln. Es waren viele neue Wissenselemente, die nur in angemessener Zeit, mit intensiver Übung und vielen Wiederholungen verinnerlicht werden können. Wenn man dies berücksichtigt, ist zu erwarten, dass die Schüler nur bedingte Erfolge in diesem Bereich erarbeiten konnten. In den Weihnachtsferien, die folgten, hatten sich die Schüler entspannt und Abstand zu den Schulfächern und dem Lernen gewonnen. Denselben Abstand nahmen sie auch von den Inhalten des Förderunterrichts. Als sie aufgefordert wurden, die Aufgaben im Nachtest zu schreiben, mussten sie erneut alles aus der Erinnerung abrufen, was mit dem Algorithmus der Division zusammenhängt. In ihren Lösungen haben sie das angewendet, was sie bis zu diesem Zeitpunkt konnten und verinnerlicht hatten, alles, was nach dieser Pause in ihrem Gedächtnis festgehalten wurde. Gleichzeitig konnte man sehen, was sie noch nicht eindeutig verstanden hatten und was sie deshalb durcheinander brachten. Der Nachtest war eine Gelegenheit für die Schüler das Gelernte anzuwenden und für die Verfasserin, dieses qualitativ zu überprüfen. Ziel des Förderunterrichts konnte selbstverständlich nicht die fehlerfreie Bewältigung jeglicher Aufgaben sein. Vielmehr sollte an den Schwächen der Schüler gearbeitet werden, das mathematische Verständnis gefördert und Einsichten in die komplizierte Welt der Grundrechenarten (unter besonderer Gewichtung der Division) vermittelt werden. Ziel war ferner die Entwicklung einer positiven Einstellung gegenüber der Mathematik, die es erlaubt, die persönlichen Ängste zu bekämpfen und an die eigenen Fähigkeiten und Leistungen zu glauben. Im Förderunterricht wurde sehr intensiv geübt. Alle Handlungen wurden an konkretem Material veranschaulicht, so dass die Schüler nachvollziehen konnten, wie jeder einzelne Schritt zu rechtfertigen ist. Beim Rechnen des Algorithmus wird vom Schüler verlangt, dass er diese Handlungen auf eine höhere abstrakte Ebene überträgt. Insbesondere bei der Division müssen die Sensoren der Schüler dauernd in Bereitschaft sein, um die überall lauernden Gefahren zu meistern. Die Tatsache, dass sie sich im Nachtest (mit der Ausnahme von Alexis) mit fast allen Aufgaben befasst haben, zeigt, dass sie ihre Ängste in hohem Maße überwunden hatten und sich zutrauten, Divisionsaufgaben zu rechnen. Die richtigen Lösungen bei der Hälfte der Aufgaben bestätigten, dass sie die erforderlichen Verfahrenskenntnisse beherrschen und anwenden konnten. Das Auftreten typischer Fehlermuster auch nach der intensiven Übungsphase erinnert an die Natur des Kindes und des Lernens zugleich. Die kindlichen Köpfe sind (zum Glück) keine Rechner, in deren Festplatten die erwünschten Daten für immer gespeichert werden können. Es sind Datenträger, die die Daten in einer bestimmten Form und für eine bestimmte Zeitspanne unbeschädigt tragen können. Darüber hinaus entwickeln sich Viren, die die Richtigkeit der Daten beeinflussen können. Um dies zu vermeiden, ist die Sicherung des Kapitals nötig. Die Sicherung durch feste innere Verbindungen und Verflechtungen und die Wiederholung und Auffrischung der Inhalte ist hier zu gewährleisten. Besonders aber durch produktives Üben und Ausprobieren der ausgewählten Daten gehen sie in den Besitz der Lerner über. Hier wird nicht versucht, die Erscheinung von Fehlern zu rechtfertigen, sondern diese als wichtigen Bestandteil des Lernens und des Unterrichts zu akzeptieren. Die Schüler konnten ihre Leistungen im Vergleich zu denen des Vortests verbessern. Bei keinem wurde eine Verschlechterung oder ein Stillstand beobachtet. Sie erbrachten Leistungen, die zu Beginn des Unterrichts nicht erwartet werden konnten. Es liegt nun an der weiteren Vorgehensweise der Klassenlehrer diesen Fortschritt weiter zu fördern. Von ihrer Ausbildung, ihrer Erfahrung, ihrer Sensibilität wird es abhängen, ob sie die Schülerfehler in Wissensquellen umwandeln können und ferner, ob Schüler mit Lernschwierigkeiten eine Chance zum Lernen bekommen oder störende Elemente des Unterrichts bleiben.

Zusammenfassung

An dieser Stelle wird rückblickend zu den einzelnen Kapiteln der Arbeit Stellung bezogen und die wichtigsten Aspekte hervorgehoben. Thema der vorliegenden Arbeit waren die Lernbehinderungen bzw. Lernschwierigkeiten griechischer Schüler in der Mathematik der Primarstufe. Die Behandlung dieser Thematik erfolgte ausgehend von einer Begriffsbestimmung der Lernbehinderung bzw. Lernschwierigkeit über die Entwicklung und Durchführung eines Tests zur Division und über die Evaluation durchgeführter Fördermaßnahmen.

Der **theoretische Rahmen bezüglich Lernbehinderungen** wurde im ersten Kapitel in Hinblick auf die Situation in Griechenland und in Deutschland vorgestellt. Hierbei wurde ersichtlich, dass die Lernbehindertenpädagogik in Deutschland auf eine lange, stufenweise Entwicklung zurückblicken kann. Es entwickelte sich eine eigenständige Wissenschaft und Literatur, die in einer speziellen Sonderschulart, „Sonderschulen für Lernbehinderte" ihren Ausdruck fanden. Für lange Zeit waren sie die einzigen Institutionen zur Förderung lernbehinderter Kinder. Seitdem der Integrationsgedanke große Beachtung in der Sonderpädagogik findet, wurden weitere Formen pädagogischer Institutionalisierung für diese Schüler ermöglicht: die Integrationsklassen und der gemeinsame Unterricht behinderter und nichtbehinderter Schüler. In Griechenland hat die Lernbehindertenpädagogik ihren Anfang im 20. Jahrhundert mit der Einrichtung von Sonderklassen in den Regelschulen, die Lernschwierigkeiten beheben und lernschwierige Schüler fördern sollen. Von Integration kann in Griechenland nur bei den Lernschwierigen die Rede sein, da sie nicht aus dem allgemeinen Schulsystem ausgegliedert werden. Für alle weiteren Behinderungsarten wird die separate Sonderschulbeschulung praktiziert.
Die sonderpädagogische Begriffsbestimmung ist in Griechenland an der amerikanischen Literatur und besonders an dem medizinisch-defektorientierten Modell orientiert, während in Deutschland die Diskussion über die Begriffsbestimmung nicht als abgeschlossen betrachtet werden kann und der ökosystemische Ansatz sich fortschreitend etabliert. So werden die Ursachen nicht ausschließlich bei der betroffenen Person gesucht, sondern in der Interaktion sozialer, schulischer, familiärer und kultureller Faktoren. Im medizinischen Modell dagegen werden Störungen des zentralen Nervensystems des Schülers als Auslöser für Lernbehinderungen angesehen, was dazu führt, dass die Ursachen der betroffenen Person zugeschrieben werden. Die Bildungsentscheidungen für lernbehinderte Schüler werden in beiden Ländern durch die Schulaufsicht bzw. Schulbehörde getroffen.

Im zweiten Kapitel wurde die **Betrachtung des Mathematikunterrichts in Griechenland** ins Zentrum gestellt. Eine kurze Bezugnahme auf den Ursprung der heute geltenden Richtlinien macht deutlich, dass die Demokratisierung der Schule und des Unterrichts 1980 begann. Zu diesem Zeitpunkt wurden auch die heutigen Lehrbücher verfasst. Deutlich ist seitdem der Wechsel vom mechanischen Lernen zur analytischen Behandlung der Inhalte. Die mathematischen Einheiten werden in Beziehung zueinander gesetzt, die Begriffsbildung gewinnt an Bedeutung und variierte Übungsformen sollen zur Verfestigung des Gelernten verhelfen. Die Lehrerausbildung wurde von 2 auf 4 Jahre angehoben, der Frontalunterricht wurde durch einen eher buchzentrierten Unterricht ersetzt. Das mathematische Lehrwerk „Meine Mathematik" ist das einzige und einheitlich vorgeschrieben im ganzen Land. Die theoretischen Ansätze von Bruner und Piaget bilden den theoretischen Hintergrund dieser Lehrwerke. Das einsichtige Lernen, die aktive Auseinandersetzung der Schüler mit dem Lerninhalt, das Berücksichtigen der individuellen Arbeitsrhythmen der Schüler und die Schaffung eines fördernden Unterrichtsklimas gehören zu den wichtigsten Prinzipen dieser Lehrbücher. In der vorliegenden Arbeit wurden die Lehrbücher betrachtet und der Lehrstoff, der in der Primarstufe behandelt wird, wurde zusammenfassend vorgestellt. Gleichzeitig wurde ein deutsches Lehrwerk, „Das Zahlenbuch“, vorgestellt, dass Alternativen für die Erziehungs- und Unterrichtspraxis aufzeigen sollte. Mit einer kritischen Betrachtung der Lehrbücher und dem Verweis auf Angebote von Impulsen aus dem „Zahlenbuch“, die das Lernen effizienter, ökonomischer und leichter gestalten würden, endet dieses Kapitel.

Im dritten Kapitel setzt der empirische Teil der Arbeit an. Zu Beginn wird ein Überblick über die bereits existierenden Untersuchungen bezüglich des Mathematikunterrichts in Griechenland gegeben. In der Folge wurden die **Forschungsinteressen und -methoden** festgelegt. Ausgegangen wird von einer Hauptuntersuchung quantitativer Natur, anschließend werden qualitative Methoden eingesetzt, um den Kontext zu beleuchten und die Hypothesen zu überprüfen, die mit quantitativen Methoden gewonnen werden. Die erste Phase der Untersuchung, die im vierten Kapitel beginnt, bildet den Orientierungspunkt für den weiteren Verlauf. Die **Betrachtung der Lernkontrollen** der vier ersten Klassen, die im Rahmen des Mathematikunterrichts geschrieben werden, gab Aufschluss über die schwierigsten Themenbereiche im Mathematikunterricht dieser Klassen. Besondere Aufmerksamkeit wird den Ergebnissen der vierten Klassen gewidmet, da bis dahin alle Rechenoperationen eingeführt und eingehend geübt werden. Als schwierigste Rechenoperation erweist sich wie erwartet die Division. So konzentriert sich das Interesse der Arbeit in der Folge auf diese Operation. Um die Leistungen griechischer Schüler in der schriftlichen Division abzufragen, wurde in der zweiten Phase der Untersuchung ein **diagnostischer Divisionstest** an 189 Viertklässlern durchgeführt. Die Leistungen der Schüler erwiesen sich als sehr heterogen. Aus der qualitativen Fehleranalyse der Tests ergaben sich Fehlerkategorien, die in systematische und zufällige Fehler eingeteilt wurden. Für die Fehleranalyse waren jedoch die systematischen Fehler relevant, die in den Schülerlösungen konsequent auftraten, eine gewisse Regelstruktur aufwiesen und Rückschlüsse auf eine innere Systematik zuließen. Es ließen sich 13 systematische Fehlermuster erkennen, die unterschiedliche Defizite aufzeigten: die Unfähigkeit, die schriftliche Division durchzuführen, Schwierigkeiten beim Subtrahieren, besonders wenn ein Zehnerübergang erforderlich war, Fehler bei der Berechnung der Teilprodukte, Unsicherheiten beim Rechnen mit der Null und Schwierigkeiten beim Bestimmen der Quotientenziffern. Jedes einzelne Fehlermuster wurde anhand von Schülerbeispielen beschrieben und näher erläutert. Gleichzeitig wurden Hypothesen für die Entstehungshintergründe dieser Fehler aufgestellt. Diese Hypothesen bedurften allerdings einer objektiven Überprüfung. Hier war es aufschlussreich, die Lösungswege der Schüler und die Fehlerursachen zu ermitteln, wodurch ein weiteres Instrument in die Untersuchung einbezogen wurde. Die Durchführung von **klinischen Interviews** erwies sich hierbei als unerlässliche Methode und machte die dritte Phase der Untersuchung aus. Interviewt wurden 48 Schüler, die an den Tests teilgenommen hatten. Alle von ihnen hatten einen oder mehrere systematische Fehler in ihren Divisionslösungen gemacht. Aus den Kommentaren der Schüler wurden die Gedankengänge und Rechenstrategien der Schüler ersichtlich, die sie zu den einzelnen Fehlern führten. Gleichzeitig wurden auch die Stärken der Schüler evident und insbesondere die Fähigkeit, das verfügbare Wissen umzuorganisieren und zu reflektieren, um daraus eigene Strategien zu entwickeln. Die systematischen Fehler blieben aber auch in dieser Phase im Mittelpunkt der Betrachtungen. Auffällig war das Fingerrechnen in den Subtraktionen, die Unsicherheiten der Schüler in den Grundaufgaben des Einmaleins und Einspulseins, die fehlende Einsicht in das Verständnis der Division. Weiterhin wurde dem Fehlen von Rundungen, dem zufälligen Auswählen von Quotientenziffern, dem falschen Überschlagen, fehlenden Rechenkontrollen und Fehlinterpretationen, die unzulässige Verallgemeinerungen verursachten, begegnet. Nach der Analyse der systematischen Fehler wurden Wege aufgezeigt, die der Fehlervorbeugung und -vermeidung dienen sollten. Sehr kurz wurden auch die Fehlermuster beschrieben, die eine kleinere Häufigkeit im Test zeigten. Bemerkenswert war, dass dieselben Fehlermuster, die als systematische Fehler diagnostiziert wurden, von einer großen Anzahl weiterer Schüler zweimal gemacht wurden. Dies verstärkte die Aussagen über die systematischen Fehlermuster und machte deutlich, dass sich diese Fehlerarten bei weiteren Schülern als systematische verfestigen können, wenn nicht rechtzeitig interveniert wird.

Auf Grund der Erkenntnisse aus den Tests und den Interviews über die Schwierigkeiten der Schüler wurde in der Folge im fünften Kapitel ein dreimonatiges **Unterrichtsexperiment** durchgeführt, an dem Schülerinnen und Schüler teilnahmen, die erhebliche Schwierigkeiten beim schriftlichen Dividieren hatten. Das gesetzte Ziel war hier, die Schwierigkeiten der Schüler ausfindig zu machen und ihnen die nötigen Hilfen zu geben, um diese zu beheben. In diesem Förderunterricht wurden alle Rechenoperationen thematisiert und die Schüler wurden schrittweise zur Division herangeführt. Es zeigte sich, dass den Schülern jegliche anschauliche Vorstellung fehlte und dass ihre Wissenslücken aus zurückliegenden Phasen sie daran hinderten, ein Verständnis für die Division zu entwickeln. Mit geeigneten Arbeitsmaterialien und Hilfen konnten sie jedoch erheblich bessere Lernergebnisse erreichen. Zentrales Element war hier, dass den Schülern die Zeit gegeben wurde, sich mit Anschauungsmaterial auseinanderzusetzen, und dass der Lernrhythmus jedes einzelnen Schülers stets respektiert wurde. Ferner wurde dem „Fehler“ eine andere Bedeutung beigemessen, indem Fehler nicht als Defizite sondern als unerlässliche Bestandteile des Unterrichts angesehen wurden. Dies bewirkte eine Entspannung der Schüler, die sich auch emotional auswirkte und ihnen ermöglichte, eine neue Beziehung zum Lerninhalt und generell zur Mathematik aufzubauen.

Resümee und Ausblick

Hauptanliegen der vorliegenden Untersuchung war es, die Schwierigkeiten griechischer Schülerinnen und Schüler in der schriftlichen Division zu diagnostizieren, zu gruppieren und zu analysieren. Diese Analyse sollte in Beziehung zu den im griechischen Mathematikunterricht verwendeten Unterrichtsmaterialien und zu der dort üblichen Unterrichtsorganisation gesetzt werden.
Es wurde bereits erwähnt, dass in Griechenland bisher erst wenige Untersuchungen zum Mathematikunterricht der Primarstufe durchgeführt wurden. Dies geht sicherlich auch auf Folgendes zurück:

- Erst 1980 erschienen die heutigen und ersten allgemeinen Lehrbücher für den Mathematikunterricht. Vorher existierten lediglich Handreichungen mit sehr allgemein formulierten Lernzielen für diesen Bereich.
- Erst ein Jahrzehnt später, um 1990, wurden die ersten Untersuchungen zum Mathematikunterricht in die Wege geleitet. Vorher fehlte es an finanziellen Mitteln, an einer zuständigen Instanz, die sich mit der Unterrichtsevaluation auseinandersetzen würde, sowie an ausgebildetem Personal, das auch über **entsprechende Forschungserfahrung** verfügt hätte.
- Bis zu diesem Zeitpunkt hatten sich lediglich die Schulräte mit der Evaluation des Unterrichts bzw. des Mathematikunterrichts auseinandergesetzt. Sie waren jedoch eher damit befasst, den Lehrerinnen und Lehrern den Umgang und Möglichkeiten des Einsatzes der neuen Lehrwerke zu vermitteln.
- Der Begriff der **Fehleranalyse** hat erst in den letzten Jahren in der griechischen Fachdiskussion an Bedeutung gewonnen.

Die vorliegende Arbeit ist die bisher einzige Untersuchung, die sich - bezogen auf Griechenland - **ausschließlich auf die schriftliche Division** bezieht. Zwar werden in diesem Kontext auch die übrigen Grundrechenarten eruiert, jedoch immer in Bezug auf ihre Relevanz für die schriftliche Division.
In der vorliegenden Arbeit wurden sowohl **quantitative** als auch **qualitative Forschungsmethoden** eingesetzt, die im Sinne des Erkenntnisinteresses miteinander kombiniert wurden und die sich in der Untersuchung bewährt haben: der durchgeführte diagnostische Test erlaubte die Bandbreite der Schwierigkeiten und die Interviews die Tiefe des Untersuchungsgegenstandes zu erfassen. Diese Methodenkombination ist nur in einer der bereits existierenden Untersuchungen (bezüglich der Addition und Subtraktion dreistelliger Zahlen, siehe Chatzigeorgiou, 1990) zu beobachten. Somit wurde hier in weiten Teilen in Hinblick auf die Forschungslage in Griechenland Neuland beschritten.
Ein weiteres Novum bildet die Tatsache, dass in der vorliegenden Untersuchung die **Lernkontrollen des Standard-Lehrwerkes miteinbezogen** wurden. Diese Lernkontrollen werden meist im Unterricht von den Schülerinnen und Schülern ausgefüllt und dienen als Evaluationsinstrumente für den erteilten Unterricht, die ausschließlich vom jeweiligen Klassenlehrer ausgewertet werden. In der vorliegenden Untersuchung bildeten sie jedoch die Grundlage dafür, die schwierigsten Themeneinheiten in jeder Klasse zu lokalisieren und sie bestimmten den Inhalt der nachfolgenden qualitativen Forschung.
Die Auswertung der Lernkontrollen von 509 Schülern aus den ersten vier Jahrgängen gab Aufschluss über die Aufgabentypen und entsprechend auch bezüglich der Themenbereiche der Mathematik, die an die griechischen Schüler die höchsten Anforderungen stellten. Hieraus kann ein Bild der Leistungen des jeweiligen Schülers, der jeweiligen Klasse und des jeweiligen Jahrganges entwickelt werden. Außerdem geben die Lernkontrollen auch Hinweise auf didaktische Unzulänglichkeiten. Die schriftliche Division erwies sich hier als

die fehleranfälligste Rechenoperation; in Aufgabenstellungen, in denen diese vorausgesetzt wird, wurde die höchste Fehlerrate registriert.
Die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Konzepte gehen auf die einschlägige Literatur zum Mathematikunterricht in Deutschland zurück. Es wurde versucht, die in Deutschland bereits erprobten Konzepte an die Spezifika des griechischen Mathematikunterrichts anzupassen. Das bedeutet, dass **länderübergreifende Konzeptionen** erstmalig auf griechische Verhältnisse angewandt wurden.

In den bisher in Griechenland durchgeführten Untersuchungen für den Mathematikunterricht wurde auf eine oder mehrere Themeneinheiten fokussiert, die an Hand verschiedener Forschungsmethoden eruiert wurden. Die Ergebnisse der Untersuchungen beschränkten sich auf die Feststellung von Defiziten, auf die Berechnung von Erfolgsraten, oder die Gruppierung und Beschreibung der Fehlerarten. Das Erkenntnisinteresse erweiterte sich in der vorliegenden Untersuchung demnach dahingehend, dass nicht nur die **Lerndefizite** in dem Bereich der Division detailliert **erfasst**, sondern auch Hinweise entwickelt werden sollten, wie diese Defizite durch **Förderunterricht**, durch Umstrukturierungen im Unterrichtsmaterial und in der Progression im Regelunterricht **behoben** werden können. Dazu kommt, dass gerade eine zeitgemäße Lerndiagnostik neben der präzisen Feststellung des aktuellen Leistungsstandes der Schüler auch Empfehlungen für ein sinnvolle Förderung der untersuchten Schülergruppe fordert.

> „Ebenso wie eine medizinische Diagnose erst durch die Verbindung mit einer Therapie erfüllt eine pädagogische Diagnose erst durch die Verbindung zur Unterrichts- und Erziehungspraxis ihren Zweck“ (Wendeler, 2000, S.18).

In dem Sinne wurde auch von der Verfasserin selbst ein Unterrichtsexperiment durchgeführt, in dem Schülerinnen und Schüler in ihrem Lernen begleitet wurden und didaktische Maßnahmen auf ihre Angemessenheit hin überprüft werden konnten.

Zu Beginn der Untersuchung wurden die verschiedenen Fehlerarten der Schülerinnen und Schüler in der schriftlichen Division, die als systematisch zu bezeichnen sind, in übergeordnete Fehlergruppen und in konkrete Fehlermuster eingeteilt.
Im weiteren Verlauf der Untersuchung wurde das Ziel verfolgt, die **Entstehungshintergründe für jedes dieser Fehlermuster** zu untersuchen, das kindliche Denken zu erforschen und die Sicht der Schüler auf ihre Lösungen zu erfassen. Aus diesem Grunde wurden klinische Interviews mit 48 Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Sie hatten alle zuvor an dem diagnostischen Divisionstest teilgenommen und wurden nun während ihrer Rechenoperationen zu ihrem Vorgehen und zu innerer Regelbildung befragt.

Einzelheiten zu den jeweiligen Fehlermustern und ihren Behebungsmöglichkeiten finden sich in den entsprechenden Kapiteln dieser Arbeit. An dieser Stelle sollen die Feststellungen und Befunde überblicksartig vorgestellt werden. Es folgen Empfehlungen und praktische Hinweise, die nicht nur für die Unterrichtenden, sondern auch für mit der Abfassung von Richtlinien und Lehrbüchern betrauten und mit der Gestaltung der Lehrerausbildung in universitärer oder beruflicher Ebene befassten Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler von Interesse sein können. Sie beziehen sich auf den mathematischen Lehrstoff, die Lehrmethoden, die Lehrkompendien und speziell auf die Inhalte, die die schriftliche Division thematisieren. Vorliegende Empfehlungen gehen auf die kritische Auseinandersetzung mit der einschlägigen Literatur und mit außerhalb von Griechenland erprobten und praktizierten Lehrkonzepten zurück.

In Griechenland werden zur Zeit neue Lehrwerke entwickelt. An einigen Schulen werden erstmals Materialien für den offenen Unterricht und die Wochenplanarbeit eingesetzt. Nachfolgende Überlegungen sollen Anregungen für eine Optimierung dieser Materialien liefern. Hier ist darauf hinzuweisen, dass in Griechenland im Gegensatz zu einigen anderen europäischen Ländern zur Zeit nicht diskutiert wird, im Rahmen der Arithmetik auf die Einführung der schriftlichen Rechenoperationen zu verzichten. Es gilt also weiterhin, die Vermittlung dieser Thematik zu verbessern.

Die Division ist die schwierigste Rechenoperation, da sie alle anderen Operationen impliziert und voraussetzt. Aus diesem Grunde wurden auch die übrigen Rechenoperationen in dieser Arbeit ausführlich thematisiert. Im Folgenden werden die Problembereiche noch einmal kurz aufgeführt:

Addition

Die Addition spielt eine wichtige Rolle für die Bewältigung der Subtraktion (durch das Ergänzungsverfahren). Im Allgemeinen haben die Schüler hier die geringsten Schwierigkeiten.

Subtraktion

An dieser Stelle wird Bezug zu den Subtraktionsfehlern und zu den dazugehörigen Schülerkommentaren genommen, die im Divisionstest und in den Interviews festgehalten wurden. Bei den Fehlerarten im diagnostischen Test haben Subtraktionsfehler den zweithöchsten Wert. Die Mehrzahl von ihnen wurden in Subtraktionsaufgaben begangen, in denen ein Zehnerübergang erforderlich war und in denen die Differenz durch die Ergänzungsmethode berechnet wurde. Die Subtraktionsfehler hatten unterschiedlichen Entstehungshintergrund :

1. Die Rechenrichtung wurde nicht eingehalten, d. h. es wurde stets die kleinere von der größeren Ziffer abgezogen, ohne die Rechenrichtung zu beachten.

2. Die Erweiterungstechnik wurde falsch angewendet. Die Schüler erweiterten den Minuenden an seinem höchsten Stellenwert, um so das Abziehen zu ermöglichen. Auf diese Weise konnten sie eine kleinere von einer größeren Zahl abziehen, was im Bereich der natürlichen Zahlen nicht möglich ist. Bei solchen Subtraktionen erhielten sie einen Rest, der größer als der ursprüngliche Minuend war, was jedoch unbemerkt blieb.

3. Beim zählenden Rechnen kamen sie durch falsche Zählstrategien zu „Fehlern der Nähe“. Hin und wieder zählten sie die Anfangszahl mit oder lediglich die dazwischen liegenden Zahlen. Infolgedessen kamen die Schüler in ihren Berechnungen zu Subtraktionsergebnissen, die sich um eins, höchstens um zwei von den richtigen Ergebnissen unterschieden.

4. Eine beträchtliche Zahl der Schüler machte keinen Gebrauch von heuristischen Strategien und wendeten nur zählende Strategien an. Dabei kamen sie zu Fehlern der Gruppe 3.

5. Problematisch waren für viele Schüler auch die Behalteziffern: entweder wurden sie vergessen oder es wurden falsche Behalteziffern addiert.

6. Keiner der Schüler führte eine Überschlagsrechnung bzw. Proberechnung durch.

Die schriftliche Subtraktion wird im griechischen Lehrbuch („Meine Mathematik“), wie bereits erwähnt, in der ersten Klasse vorgestellt. In derselben Klasse wird auch zum ersten Mal die Zehnerüberschreitung bzw. -unterschreitung thematisiert, die jedoch eingehend in der zweiten Klasse geübt wird. Außerdem werden die Erweiterungs- und die Borgetechnik eingeführt, welche die Schüler in den nachfolgenden Jahrgängen auch in erweiterten Zahlenräumen reichlich trainieren. Die Subtraktion wird stets in Beziehung zur Addition gesetzt, ihre Umkehrbarkeit wird deutlich herausgearbeitet.
Allerdings bleibt trotz analytischer Behandlung der Subtraktion und zahlreicher Übungen das Überschreiten bzw. Unterschreiten des Zehners problematisch für viele Schülerinnen und Schüler. Die oben aufgeführten Fehler traten bei Schülern der vierten Klasse auf, die sich dem Ende dieses Schuljahrs näherten.

Aus diesen Feststellungen lässt sich die Konsequenz ziehen: Zentrales Augenmerk muss zunächst auf die Beherrschung des ***Zehnerübergangs*** gerichtet werden. Um die Fehler bei der Zehnerüberschreitung zu verringern oder gar zu vermeiden, sind sichere Kenntnisse in folgenden Bereichen Voraussetzung:

1. Ergänzungen aller einstelligen Zahlen zum Zehner, woraus sich auch die Differenzen aller einstelliger Zahlen zu 10 ableiten lassen

2. Zerlegungen der einstelligen Zahlen in zwei Summanden

3. Grundaufgaben der Addition und Subtraktion. Wichtig ist dabei, dass die Schüler nicht versuchen, die Grundaufgaben auswendig zu lernen, sondern sich diese bewusst einzuprägen. Dabei können Nachbaraufgaben (7+5=12, 7+6=13), Verdopplungsaufgaben (8+8=16, 8+9=17), die Einsicht in die dekadische Analogie und in die Eigenschaften der Rechenoperationen (Kommutativ-, Assoziativgesetz) besonders hilfreich sein.

Sind die ersten beiden Voraussetzungen erfüllt, so können sich die Schüler auch die Grundaufgaben aneignen. Dieser Bereich gehört zum Lehrstoff der ersten und zweiten Klasse. Größerer und andauernder Erfolg ist hier durch handelndes Lösen der Aufgaben und in der Folge durch den Einsatz heuristischer Strategien zu erwarten. Diese Abfolge verhalf auch den Schülern in dem von der Verfasserin durchgeführten Förderunterricht zu einem bewussten Einprägen der Aufgaben und versetzte sie in die Lage, jederzeit zwischenzeitlich vergessene Aufgaben rekonstruieren zu können. Neben diesen Vorkenntnissen, die für die Bewältigung des Zehnerübergangs bedeutend sind, sind weitere Maßnahmen als Vorkehrungen bei der Unterrichtung der schriftlichen Subtraktion zu treffen:

4. Durchführen einer ***Überschlagsrechnung bzw. Proberechnung***

Die Überschlagsrechnungen finden auch im griechischen Lehrbuch (in der dritten und vierten Klasse) Erwähnung. Sie werden jedoch nur in Verbindung mit der Division eingeführt, was sich als ein Manko herausstellte. Sie sollten auch in den übrigen Rechenoperationen thematisiert werden. Durch Überschlagsrechnungen kann sich der Schüler schon vor dem Ausrechnen einer Aufgabe eine Vorstellung von der Größenordnung des Ergebnisses verschaffen und bekommt somit eine wichtige Orientierungshilfe für den Fortgang seiner Lösungsversuche. Durch eine Proberechnung kann er schließlich feststellen, ob das Ergebnis seiner Berechnungen korrekt ist.

5. Beherrschen des ***Rundungsverfahrens und der Rundungsregeln***

Das Runden der Zahlen erleichtert das Durchführen einer Überschlagsrechnung. Mit einem konsequenten Abrunden bzw. durch Zudecken der Einer-, Zehner-, Hunderterspalte (je nach Subtraktionsaufgabe) und Ersetzen der verdeckten Stellen durch Nullen, erhält man Aufgaben, die man durch Kopfrechnen lösen kann.

6. Einführung der ***Ergänzungsmethode***

Während der Interviews berechnete die Mehrzahl der Schüler die Differenzen ergänzend, obwohl im Lehrbuch lediglich das Abziehverfahren eingeführt wird. Die Schüler gelangen demnach selbstständig zu dieser Methode oder durch Hilfestellungen ihrer Lehrer. Die Schule bzw. die Schulbuchautoren sollten an diesem Punkt den Neigungen der Schüler Rechnung tragen, sie als mögliche Hilfe respektieren und die Ergänzungsmethode in den neuen Lehrkompendien explizit thematisieren. Wenn Schüler das Ergänzen durch die Zehnerergänzungen und die Zerlegungen der einstelligen Zahlen automatisiert haben, gewinnen sie schnell die Einsicht, dass man die Differenz leichter additiv berechnen kann. Dass das additive Vorgehen den Schülern leichter fällt und dass sie dabei nicht so viele Fehler begehen, wurde sowohl in der Untersuchung als auch im Förderunterricht deutlich.

<u>Multiplikation</u>

Große Schwierigkeiten in der Multiplikation hatten die Schüler durch ihre Unsicherheiten und Unzulänglichkeiten im Einmaleins. Diese Schwächen führten zu falschen Quotientenziffern, zu falschen Teilprodukten oder zu beidem.
Bei den meisten festgestellten Einmaleinsfehlern handelte es sich um Perseverationsfehler, Fehler beim Abzählen und um „Fehler der Nähe“, welche wiederum davon zeugen, dass die Einmaleinssätze zwar geübt, aber nicht erfolgreich gefestigt und automatisiert werden konnten.

Die Einmaleinsreihen werden im griechischen Lehrwerk gegen Ende des zweiten und zu Beginn des dritten Schuljahrs behandelt, Gelegenheiten zum Einüben der Einmaleinskenntnisse werden reichlich in allen weiteren Jahrgängen gegeben. Die rechtzeitige und fehlerfreie Erlernung des Einmaleins ist bedeutend für den Erwerb weiterer mathematischer Einheiten. Daher sollte im Unterricht das Einmaleins systematisch und effektiv erarbeitet werden, um die Unsicherheiten der Schüler möglichst gering zu halten. Systematisch bedeutet hier, dass Zusammenhänge zwischen den einzelnen Reihen mit den Schülern gemeinsam erarbeitet werden; die Effektivität kann auch durch sogenannte „Eselsbrücken“ gesteigert werden, mit deren Hilfe sich die Schülerinnen und Schüler vergessene Ergebnisse herleiten können.
Die Einführung der Einmaleinsreihen nach der natürlichen Abfolge der Zahlen (vgl. Einführung in „Meine Mathematik“) und ohne Bezug zueinander hat sich in der Untersuchung als uneffektiv erwiesen. Viele Schüler konnten sich nur annähernd an die richtigen Ergebnisse erinnern oder versuchten, diese durch Raten zu ermitteln, was ihnen nicht oft gelang. Außerdem waren sie nicht in der Lage, aus einem ihnen bekannten Einmaleinssatz die Nachbaraufgaben zu berechnen, so dass sie in solchen Situationen völlig hilflos waren.

Die Anzahl von 100 Einmaleinssätzen (1*1, ... 10*10) erscheint den Schülern nicht nur als etwas Unüberwindbares, sondern ist es tatsächlich. Sie entwickeln daher Ängste und Bedenken, ob sie überhaupt fähig sind, so viele Einmaleinsaufgaben auseinanderzuhalten und zu behalten. Müssten sie sich dabei ausschließlich auf ihr Erinnerungsvermögen verlassen, so wäre dies sicher ein sehr anstrengendes Unterfangen.

Mittlerweile sind jedoch verschiedene Strategien bekannt, die das Erlernen des Einmaleins nicht nur leichter, sondern auch amüsanter gestalten. Durch Anwendung des ***Kommutativgesetzes*** reduzieren sich die Einmaleinssätze (und daher hoffentlich auch die Ängste der Schüler) automatisch um die Hälfte. Eine weitere große Hilfe bietet die Erarbeitung jeder Einmaleinsreihe basierend auf den ***Kernaufgaben*** (*1, *2, *5, *10). Aus diesen einfachen Multiplikationssätzen und durch Nutzung des Verdoppelns und des Distributivgesetzes für die Addition bzw. Subtraktion lassen sich auch die übrigen Gleichungen einer Einmaleinsreihe über verschiedene Lösungswege erarbeiten. Es handelt sich hierbei um ein ökonomisches und flexibles Erarbeiten der Einmaleinsreihen. Darüber hinaus ist es sehr wichtig, dass die Einmaleinsreihen nicht der Reihe nach, sondern nach den ***globalen Abfolgen*** 10, 5; 2, 4, 8; 3, 6, 9; 7 oder 2, 4; 10, 5; 8; 3, 6, 9; 7 behandelt werden, um den Zusammenhang zwischen den einzelnen Reihen zu verdeutlichen. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass die Schüler nicht gezwungen werden, die aufgereihten Einmaleinsergebnisse „blind“ auswendig zu lernen, sondern dass sie nachvollziehen lernen, wie die einzelnen Ergebnisse zustande kommen und dadurch die innere Systematik und Logik des Einmaleins erkennen. Vergessene Ergebnisse können sie dann selbst nachrechnen und sind somit nicht auf fremde Hilfe angewiesen.
Einen Überblick über die Einmaleinsergebnisse können die Schülerinnen und Schülern gewinnen, wenn die Ergebnisse ***linear*** auf einem Zahlenstrahl ***platziert*** werden. Dabei wird verdeutlicht, in welchen Zahlenräumen keine, wenige bzw. die meisten Einmaleinsergebnisse anzutreffen sind. Diese Darstellung gibt auch Auskunft darüber, welche Zahlen als Einmaleinsergebnisse auftreten und welche nicht. Wichtig ist abschließend, dass die Behandlung des Einmaleins nicht am Ende eines Schuljahrs sondern in ***mehreren Durchgängen*** während des gesamten Schuljahres stattfindet.

<u>Division</u>

Treten weniger Fehler in der Subtraktion und in der Multiplikation auf, verringern sich automatisch die Fehler in der schriftlichen Division. Wenn die Schüler das Einmaleins beherrschen, sind sie mit großer Wahrscheinlichkeit in der Lage, durch die Umkehrung der Einmaleinssätze, die richtigen Quotientenziffern zu ermitteln. Zuvor ist jedoch ein anderer Schritt von Bedeutung. Um eine Vorstellung von der Größenordnung des Quotienten zu bekommen, ist es ratsam, die ***Anzahl der Stellen des Quotienten*** im Vorhinein zu bestimmen. Für jede Teildivision kann in der Folge eine ***Überschlagsrechnung*** die Wahl der Quotientenziffer erleichtern. Den Schülern sollten jedoch verschiedene Überschlagstechniken vorgestellt werden, aus denen sie nach eigenem Ermessen die geeignetste auswählen können. Wenn das „Überschlagen nach den führenden Ziffern“ (vgl. „Meine Mathematik“) angewandt wird, sollte diese Technik mit dem Runden kombiniert werden. Ansonsten erweist sich das Auslassen der hinteren Ziffern als ein Falle, die zu unzähligen Proben und Korrekturen von Quotientenziffern führt und weitere Fehlerquellen birgt, wie in der Untersuchung belegt werden konnte.

In der von der Verfasserin durchgeführten Untersuchung zeigte sich der besondere Stellenwert, der der qualitativen und quantitativen **Fehleranalyse** zukommt. Im Mathematikunterricht ist es erforderlich, sie regelmäßig und kompetent durchzuführen, will man förderdiagnostisch arbeiten und Hinweise für didaktische Maßnahmen erhalten. Die Fehleranalyse liefert dem Unterrichtenden zentrale Erkenntnisse in folgenden Bereichen:

- Kenntnisstand in Bezug auf bestimmte mathematische Bereiche innerhalb der gesamten Klasse
- Verlauf des Lernprozesses einzelner Schülerinnen und Schüler
- Wirksamkeit unterrichtlicher Maßnahmen.

Die oben ausgeführten Gesichtspunkte, bezogen auf die einzelnen Rechenoperationen, stellen keinen neuen Lehrstoff dar, der zusätzlich in Richtlinien, Lehrpläne und Lehrkompendien aufgenommen werden müsste. Es handelt sich vielmehr um **Bausteine** und **Fundamente** der Arithmetik, die möglichst intensiv im Unterricht geübt und automatisiert werden sollten und die jedoch an keiner Stelle der Lehrbücher hervorgehoben werden. Die Beachtung dieser und weiterer Aspekte können als Lernhilfen fungieren, indem sie Schüler in die Lage versetzen, ihr Lernen selbst zu organisieren und so effektiv wie möglich zu gestalten. Darüber hinaus ermöglichen sie ein selbstständiges, ökonomisches und interessanteres Arbeiten und Lernen.
Es geht somit um eine Neustrukturierung und Umorientierung der Lehrinhalte, die selbstverständlich nicht nur auf der Ebene der einzusetzenden Unterrichtsmaterialien, sondern auch in Hinblick auf die Unterrichtsmethodik zu erfolgen hat. Es müssen **zentrale Gegenstandsbereiche und Schwerpunkte** ausgewählt und festgelegt werden, die in den Lehrwerken bzw. in den Lehrerbänden hervorgehoben werden sollten. Diese Strukturierung dienen nicht nur der Optimierung der Lernwege der Schülerinnen und Schüler, sondern auch der Grundorientierung der Lehrerinnen und Lehrer. Besonders die neuen Lehrer, die keine langjährige Erfahrung mit den Lehrbüchern und der Unterrichtsmethodik haben, brauchen solche Hinweise, um ihren Unterricht gezielt steuern zu können.

Kriterien für die Bestimmung der fundamentalen Themenbereiche sollten durch die Evaluation der Inhalte bestimmt werden. Hierzu gehören als zentrale Elemente:

- die Feststellung des Schwierigkeitsgrades einer thematischen Einheit für Schüler sowie
- die Relevanz der Inhalte für den weiteren Aufbau mathematischen Wissens.

Die bisher in Griechenland übliche sehr analytische Behandlung bestimmter Themeneinheiten (z. B. der Rechenstrategien) verursachte erhebliche Lerndefizite bei den untersuchten Schülerinnen und Schülern, was durch die Untersuchung belegt werden konnte. Besonders problematisch scheint der Verfasserin die hierdurch bedingte Desorientierung der Schülerinnen und Schüler, die bewirkt, dass Lösungen für veränderte Aufgabenstellungen sowie Transferleistungen nur in äußerst geringem Umfang erbracht werden können.

Die Fokussierung auf grundlegende Strukturen ermöglicht Transparenz für die Lehrenden und Lernenden und erweitert maßgeblich die Möglichkeiten, den Unterricht gemeinsam zu gestalten.

> „Gemeinsames Gestalten intensiviert die Beziehungen zu Lehrern/Lehrerinnen und anderen Schülern/Schülerinnen, erweitert den Horizont, macht Spaß und steigert das Selbstwertgefühl: Schüler/innen treten in neuen Rollen auf und werden als wichtige Partner/innen anerkannt. Sie identifizieren sich stärker mit einer Schule, zu deren Gestaltung und Erfolg sie selbst aktiv beigetragen haben.“ (Schratz, Iby & Radnitzky, 2000, S. 19)

Gerade Schülerinnen und Schüler mit Lernproblemen sind auf eine starke emotionale Bindung an Schule und Lehrpersonen angewiesen. In dem von der Verfasserin durchgeführten Förderunterricht zeigte sich, dass eine vertrauensvolle und angenehme Arbeitsatmosphäre in besonderem Maße zur Steigerung der Lernerfolge der Schülerinnen und Schüler, ihres Selbstwertgefühls und ihrer Kreativität beiträgt.
Eine Veränderung der Unterrichtspraxis setzt voraus, die angesprochenen Themenbereiche übergreifend und ganzheitlich zu behandeln, Zusammenhänge zu eruieren und kommentieren. Der Blick sollte demnach stärker auf die Gesamtheit und nicht auf isolierte und bruchstückhafte Wissenselemente gerichtet werden, denn nur so kann Einsicht in tiefere Strukturen gewonnen werden.

Auf nahezu allen einleitenden Seiten des griechischen Lehrwerkes wird die Wichtigkeit des **entdeckenden Lernens** betont. Dies ist jedoch lediglich als allgemeine Aufforderung zu verstehen, die nachfolgenden Aufgabenseiten spiegeln diesen Anspruch nur selten wider, so dass hier offensichtlich eine Kluft zwischen Anspruch und Realität besteht. Übliche Aufgabenstellungen im griechischen Lehrbuch lassen in aller Regel wenig Freiraum für die Gestaltung individueller Lösungswege. Das Erkennen von mathematischen Zusammenhängen, Kreativität und Hypothesenbildung werden nur äußerst selten gefordert.

Schülerinnen und Schüler sind jedoch in der Lage, eigene Rechenwege zu entwickeln, was auch in der Untersuchung deutlich wurde. Für die Berechnung von Subtraktionsaufgaben sowie für die Berechnung der Quotientenziffer in der Divisionsstaffel haben die Schüler beispielsweise Rechenvorteile erkannt und Strategien verwendet, die sie zuvor nicht erlernt hatten, sondern vielmehr ihrer mathematischen Intuition entstammten.

Um entdeckendes Lernen nicht nur zuzulassen, sondern gezielt zu provozieren, muss der Unterricht bewusst so angelegt werden, dass auch die Entwicklung von Interessen, der Hinzugewinn von anwendungsbezogenem Wissen, die Zunahme von Handlungskompetenz und die Möglichkeit sozialer Erfahrungen geboten werden. Charakteristisch für den Mathematikunterricht in Griechenland ist, dass meist - so wie in den Lehrbüchern - eine einzige vorher definierte Lösung feststeht, was Schülerinnen und Schüler und besonders solche mit Lernschwächen stark einschränkt. In der Untersuchung wurde deutlich, dass die Schüler nur eine Methode zur Berechnung der Differenz und nur eine Überschlagstechnik kannten, was auch auf den Unterricht und die Lehrbücher zurückzuführen ist. Eine Unterrichtsorganisation, die nur einen Lösungsweg thematisiert und den Schülern keinen bzw. sehr wenig Raum zum Experimentieren, zum Erkunden, zum Anstellen und Überprüfen von Hypothesen und zum Entdecken lässt, führt somit zum Scheitern vieler Schüler.

Lehrerinnen und Lehrer sollten sich demnach weniger als Wissensvermittler, sondern als Lernprozessbegleiter begreifen. Die Absichten und Ziele des Lernvorgangs bzw. des Unterrichts sind mit Präzision zu formulieren, die möglichen **Lösungswege** dürfen **nicht** im Vorhinein **eingeengt** werden. Statt dessen sollten die Schüler ermuntert werden, verschiedene Lösungswege auszuprobieren, die von den Lehrenden berücksichtigt und kommentiert werden sollten.

Die Untersuchungsergebnisse stammen aus der Schulpraxis und daher sollen die Vorschläge dieselbe erreichen. Intention ist die Qualitätsverbesserung von Schule und Unterricht, die insbesondere über die Fort- und Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern erreicht werden kann.

Während der Untersuchung konnte die Verfasserin bei den von ihr befragten Lehrerinnen und Lehrern ein großes Interesse an neueren Forschungsergebnissen zum Mathematikunterricht feststellen. Dies zeigt sich u.a. darin, dass sehr viele von ihnen um die Zustellung der Untersuchungsergebnisse gebeten haben.

Ein erster Schritt zur Verbesserung der Situation könnte daher darin bestehen, die Ergebnisse dieser und ähnlicher **Untersuchungsergebnisse** in den Fortbildungszentren der griechischen Lehrerinnen und Lehrer **publik zu machen** und Anregungen für Diskussionsrunden bieten. Die Information der Unterrichtenden, ihr Meinungsaustausch, der Dialog und die kritische Würdigung der Untersuchungen sollten hier im Vordergrund stehen.
Wie bereits erwähnt, wurde diese Untersuchung im nördlichen Teil Griechenlands an einer repräsentativen Stichprobe durchgeführt. Sinnvoll erscheint es, **ähnliche Untersuchungen in weiteren Gegenden Griechenlands** durchzuführen und die Untersuchungsergebnisse vergleichend zu betrachten. So könnten die Leistungen der Schüler landesweit erfasst, verglichen und verbessert werden, allgemeine Tendenzen und regionale Besonderheiten erkannt und entsprechend abgestimmte Vorgehensweisen entwickelt werden. Diese Arbeit soll erste Anregungen hierzu geben. Dies erscheint um so leichter, da im ganzen Land ein einheitliches Lehrwerk verwendet wird. Es ist darüber hinaus zu vermuten, dass die Lehrmethodik und die Lern- und Rechenstrategien der Schülerinnen und Schüler große Ähnlichkeiten aufweisen.
Neben Untersuchungen bezüglich des schriftlichen Dividierens könnten weitere Fragestellungen von dringendem Interesse sein:

- Inwiefern bereitet die Fachsprache der Mathematik den Schülern Schwierigkeiten und bildet somit ein Hindernis für den effektiven Erwerb der Lerninhalte?

- Die Auswertung der Lernkontrollen zeigte, dass ein ziemlich großer Anteil der Schüler auffallende Schwierigkeiten in der Geometrie hatte (siehe 4.1.3). Ist die Komlexität des Fachs „Geometrie“ mit der Anhäufung von Fachbegriffen zu erklären, oder spielen darüber hinaus auch die Anforderungen an räumliches Denken eine zusätzliche Hürde?

In einer weiteren Phase hätte die **Überarbeitung der Richtlinien und Lehrbücher** zu erfolgen, das bedeutet, dass zunächst die fachdidaktische Diskussion stattfinden muss, da ansonsten das Scheitern neuer Richtlinien vorprogrammiert ist. Innovationen können nur dann Erfolg haben, wenn die Schulpartner, insbesondere die Lehrerinnen und Lehrer die Initiative mittragen und innovative Entwicklungen vorantreiben. Hier könnte die Konzeption von entsprechenden Fortbildungsseminaren für Lehrerinnen und Lehrer eine zentrale Voraussetzung bilden.
Da die griechischen Lehrwerke in aller Regel von an den Universitäten tätigen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern verfasst werden, ist eine **engere Zusammenarbeit zwischen Forschung und Schulpraxis** unbedingt anzustreben. Nach Ansicht der Verfasserin sollte diese Kooperation **institutionalisiert und verpflichtend** gemacht werden. Eine solche Kooperation müsste getragen sein von Offenheit, Transparenz und Feed-back-Funktionen auf beiden Seiten, die jedoch noch erarbeitet werden müsste. Neben der gemeinsamen Arbeit an den Unterrichtsmaterialien sollte hier auch eine zeitgemäße **Evaluation des Schulunterrichts** konzipiert und durchgeführt werden. Zusätzlich sollte die Lehrerausbildung auf die vorfindbare Schulwirklichkeit ausgerichtet werden und dies bedeutet, dass mehr Gewicht auf die fachdidaktische Ausbildung (Didaktik und Methodik der Schulfächer, Unterrichtsevaluation) und auf Erhöhung der pädagogisch-praktischen Studienanteilen der Lehramtskandidaten und -kandidatinen gelegt werden sollte (Lumer, 1992, S. 34).

Die Zusammenarbeit mit den Unterrichtenden und ihre Begleitung bei der Umsetzung neuer Empfehlungen und Methoden bildet jedoch das wichtigste Element, das den Erfolg bzw. Misserfolg bestimmt.

Zentrales Augenmerk wurde in der vorliegenden Arbeit auf den Mathematikunterricht und auf die mathematischen Fähigkeiten griechischer Schüler im Bereich der schriftlichen Division gerichtet. Hierbei wurde nicht das Ziel verfolgt, Patentrezepte für den Mathematikunterricht bzw. ultimative Methoden zu entwickeln oder vorzustellen, da der Unterricht von vielen Variablen und Rahmenbedingungen inner- und außerhalb der Schule abhängig ist, die in ihrer unterschiedlichen Ausprägung jede unterrichtliche Situation zu einer einmaligen prägen. Vielmehr wurde angestrebt, ein didaktisches Konzept zur Unterrichtung der schriftlichen Division zu entwickeln, das Anregungen zum Überdenken des eigenen Unterrichts geben kann. Im Zentrum sollte die Vermittlung von tragfähigen Grundlagen stehen, über die ein Schüler verfügen muss, um schriftlich dividieren zu lernen und sich mathematisch weiterentwickeln zu können. Es wurden Hilfen und Hinweise gegeben, wie elementare Denkweisen der Mathematik eingeführt und grundlegende mathematische Begriffe behandelt werden können. Diese Vorschläge sollen zum Weiterdenken anregen, um so die Kompetenzen der Lehrerinnen und Lehrer zu erweitern und auf diesem Wege die mathematischen Leistungen der Schüler zu verbessern, da kompetente Lehrkraft ein zentrales Element des Unterrichts ist und bleibt, das durch kein noch so gutes Lehrbuch, nicht durch handlungsorientierte Materialien und qualitätssichernde Lernzielkontrollen ersetzt werden kann:

> „Schule kann nicht besser sein als ihre Lehrerinnen und Lehrer und deren Ausbildung." (Lumer, 1992, S. 36)

Auf der einen Seite stehen also die Lehrerinnen und Lehrer und auf der anderen Seite die Schüler, die täglich vom Können und der Kompetenzen der Unterrichtenden abhängig sind. Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stand die Zusammenarbeit mit „lernschwierigen" Schülern. Diese Schüler haben jedoch bewiesen, dass sie in der Lage waren zu lernen und sogar erhebliche Lernfortschritte aufzuweisen. Wesentliche Momente waren hierbei die Bildung einer Verständigungsbasis, die Schaffung einer vertrauten Atmosphäre und der Versuch, den Schülerinnen und Schülern durch einfühlendes Verstehen zu begegnen.

> „Einfühlendes Verständnis (...) führt (...) nicht notwendigerweise zu sicheren Erkenntnissen, wohl aber zu möglichen Antworten, die vielleicht in sichere Erkenntnisse einmünden." (Wember, 1991, S. 65)

Es ist Aufgabe des Lehrers und der Lehrerin, jedem Schüler die Chance zu geben, sich zu äußern, ihm dabei zuzuhören und aus seinen Antworten Erkenntnisse für den eigenen Unterricht und das eigene didaktische Vorgehen zu gewinnen. Möglicherweise sollte man nicht nur von „schwachen" Schülern sprechen, sondern auch von „schwachen" Lehrern, die nur unzureichend in der Lage sind, aus der Haltung und den Rückmeldungen eines Schülers geeignete Möglichkeiten der Förderung zu entwickeln.

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1970). Psychologische Didaktik. Stuttgart: Ernst Klett Verlag. (S. 53-80).

Agaliotis, I. (1997). Untersuchung der Lernschwierigkeiten in der Arithmetik von Schülern aus den Sonderklassen. Fehleranalyse und der Umgang der Lehrer mit den Fehlern. (Original erschienen unter: Διερεύνηση των δυσκολιών μάθησης στην Αριθμητική των μαθητών των ειδικών τάξεων. Ανάλυση των λαθών και η αντιμετώπιση τους από τους εκπαιδευτικούς). Unveröffentlichte Dissertation. Universität Athen.

Apostolikas, G., Dionisopoulou, T. & Salvaras, G. (1999a). Meine Mathematik. (Original erschienen unter: Τα μαθηματικά μου). Klasse 1, Bd. 1 und 2. Athen: O.E.D.B.

Apostolikas, et al (1999b). Meine Mathematik. Klasse 1, Lehrerbuch. Athen: O.E.D.B.

Apostolikas, et al (1999c). Meine Mathematik. Klasse 2, Bd. 1und 2. Athen: O.E.D.B.

Apostolikas, et al (1999d). Meine Mathematik. Klasse 2, Lehrerbuch. Athen: O.E.D.B.

Apostolikas, et al (1999e). Meine Mathematik. Klasse 4, Band 1 u. 2. Athen: O.E.D.B.

Apostolikas, et al (1999f). Meine Mathematik. Klasse 4, Lehrerbuch. Athen: O.E.D.B.

Athanasakis, A., Alexandrakis, G. & Dimou, G. (1999a). Meine Mathematik. Klasse 3, Bd. 1 und 2. Athen: O.E.D.B.

Athanasakis, A. et al. (1999b). Meine Mathematik. Klasse 3, Lehrerbuch. Athen: O.E.D.B.

Athanasopoulos, P. & Meletiou, G. (1993). Sprache – Denken als auch Verbalismus – Formalismus. (Original erschienen unter: Γλώσσα - Σκέψη όπως και Βερμπαλισμός - Φορμαλισμός). In Griechische Mathematische Gesellschaft (Hrsg.), Sprache und Kognition in der mathematischen Erziehung, 9. Panhellenische Konferenz für die mathematische Erziehung (S. 197-216). Patra: o.V.

Atkinson, S. (1992). Mathematics with reason. The emergent approach to primary maths. Musselburgh: Hodder & Stoughton. A member of the Hodder headline group.

Atteslander, P. (1995). Methoden der empirischen Sozialforschung (8., bearb. Aufl.). Berlin: Walter de Gruyter.

Ausubel, D.P., Novak, J.D. & Hanesian, H. (1981). Psychologische und pädagogische Grenzen des entdeckenden Lernens. In H. Neber (Hrsg.), Entdeckendes Lernen (S. 30-44, 3. völlig überarbeitete Aufl.). Weinheim: Beltz Verlag.

Bach, H. (1975). Sonderpädagogik im Grundriß. Berlin: Carl Marhold Verlagsbuchhandlung.

Bach, H. (1985). Grundbegriffe der Behindertenpädagogik. In U. Bleidick (Hrsg.), Theorie der Behindertenpädagogik (Handbuch der Sonderpädagogik, Bd. 1, S. 3-24). Berlin: Marhold.

Baier, H. (1983). Theorie und didaktische Organisation der Schule für Lernbehinderte. In H. Baier & U. Bleidick (Hrsg.), Handbuch der Lernbehindertendidaktik (S. 15-20). Stuttgart: Verlag W. Kohlhammer GmbH.

Bathelt, I., Post, S. & Padberg, F. (1986). Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen. Mathematikunterricht, 3, 29-44.

Bauersfeld, H. (1992). Die Tragödie der Grundschullehrerausbildung. Occasional Paper 136. Universität Bielefeld.

Begemann, E. (1970). Die Erziehung der sozio-kulturell benachteiligten Schüler. Hannover: Hermann Schroedel Verlag.

Benkmann, R. (1995). Diagnose und Förderung in lern- und erziehungsschwierigen Situationen - Zur Bedeutung teilnehmender Beobachtung und problemzentrierter Gespräche im binnendifferenzierenden Unterricht. In H. Eberwein & J. Mand (Hrsg.), Forschen für die Schulpraxis. Was Lehrer über Erkenntnisse qualitativer Sozialforschung wissen sollten (S. 344-363). Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Bildungsministerium (Hrsg.). (1987). Richtlinien für die Unterrichtsfächer der Grundschule (Klasse 1-6). (Original erschienen unter: Αναλυτικά προγράμματα μαθημάτων του Δημοτικού Σχολείου). Athen: O.E.D.B.

Bildungsministerium (Sonderpädagogische Abteilung) (Hrsg.). (1994). Broschüre zur Information über Sonderpädagogik. (Original erschienen unter: Δελτίο Πληροφοριών Ειδικής Αγωγής). Athen: O.E.D.B

Bleidick, U. (1968). Über Lernbehinderung. Zeitschrift für Heilpädagogik, 19, 449-464.

Bleidick, U. (1972). Pädagogik der Lernbehinderten. Grundzüge einer Theorie der Erziehung behinderter Kinder und Jugendlicher. Berlin-Charlottenburg: Carl Marhold Verlagsbuchhandlung.

Bleidick, U. (1980). Lernbehinderte gibt es eigentlich gar nicht. Oder: Wie man das Kind mit dem Bade ausschüttet. Zeitschrift für Heilpädagogik, 31, 127-143.

Bleidick, U. (1983). Pädagogik der Behinderten: Grundzüge einer Theorie der Erziehung behinderter Kinder und Jugendlicher. Berlin-Charlottenburg: Carl Marhold Verlagsbuchhandlung.

Bleidick, U. (1988). Betrifft Integration: behinderte Schüler in allgemeinen Schulen: Konzepte der Integration: Darstellung und Ideologiekritik. Berlin: Marhold Verlagsbuchhandlung.

Bleidick, U. (1994). Allgemeine Übersicht: Begriff, Bereiche, Perspektiven. Zeitschrift für Heilpädagogik, 45, 650-657.

Bortz, J. & Döring, N. (1995). Forschungsmethoden und Evaluation für Sozialwissenschaftler (2., vollst. überarb. und aktualisierte Aufl.). Berlin: Springer Verlag.

Bortz, J. (1977). Lehrbuch der Statistik. Für Sozialwissenschaftler. Berlin: Springer Verlag.

Boufi, A. (1995). Grundlegende Zahlenvorstellungen von Erstklässlern. (Original erschienen unter: Αρχικές αντιλήψεις παιδιών της πρώτης Δημοτικού για τον αριθμό). In Griechische mathematische Gesellschaft (Hrsg.), Euklidis C΄, 12 (42), 17-39.

Boufi, A. (1997). Didaktik der Mathematik II [Skript] (Original erschienen unter: Σημειώσεις. Διδακτική Μαθηματικών II). Athen: Universität Athen. Fachbereich Erziehungswissenschaften.

Bruner, J.S. (1973). Der Prozeß der Erziehung. Ins Deutsche übertragen von Arnold Harttung, (3. durchgesehene Aufl.). Berlin: Berlin Verlag.

Bruner, J.S. (1981). Der Akt der Entdeckung. In H. Neber (Hrsg.), Entdeckendes Lernen (S. 15-29, 3. völlig überarbeitete Aufl.). Weinheim: Beltz Verlag.

Bundschuh, K. (1996). Einführung in die sonderpädagogische Diagnostik. München: Ernst Reinhardt Verlag.

Chatzigeorgiou, A. (1990). Addition und Subtraktion ganzer Zahlen. Schwierigkeiten und Fehlleistungen von Schülern. (Original erschienen unter: Η πρόσθεση και η αφαίρεση στους ακεραίους. Δυσκολίες και λάθη των Μαθητών). In Griechische mathematische Gesellschaft (Hrsg.), Euklid C΄, 27 (7), 8-24.

Deutscher Bildungsrat (Hrsg.). (1979). Empfehlungen der Bildungskommission: Zur pädagogischen Förderung behinderter und von Behinderung bedrohter Kinder und Jugendlicher. Stuttgart: Klett-Cotta.

Diekmann, A. (1998). Empirische Sozialforschung. Grundlagen, Methoden, Anwendungen (4., durchgesehene Auflage). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH.

Eberwein, H. (1995). Zur Kritik des sonderpädagogischen Paradigmas und des Behinderungsbegriffs. Rückwirkungen auf das Selbstverständnis von Sonder- und Integrationspädagogik. Zeitschrift für Heilpädagogik, 46, 468-476.

Eberwein, H. (1996a). Zur Kritik des Behinderungsbegriffs und des sonderpädagogischen Paradigmas. Integration als Aufgabe der allgemeinen Pädagogik und Schule. In: H. Eberwein (Hrsg.), Einführung in die Integrationspädagogik. Interdisziplinäre Zugangsweisen sowie Aspekte universitärer Ausbildung von Lehrern und Diplompädagogen (S. 9-37). Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Eberwein, H. (1996b). Lernbehinderung – Faktum oder Konstrukt? Zum Begriff sowie zu Ursachen und Erscheinungsformen von Lern-Behinderung. In H. Eberwein (Hrsg.), Handbuch Lernen und Lern-Behinderungen. Aneignungsprobleme, neues Verständnis von Lernen, integrations-pädagogische Lösungsansätze (S. 33-55). Weinheim: Beltz Verlag.

Eberwein, H. (1998). Die Beobachtung von Kindern im Unterricht als Methode des Fremdverstehens und zur Unterstützung von Lernprozessen. In H. Eberwein & S. Knauer (Hrsg.), Handbuch Lernprozesse verstehen. Wege einer neuen (sonder-)pädagogischen Diagnostik (S. 194-208). Weinheim: Beltz Verlag.

Edelmann, W. (1996). Lernpsychologie (5. vollständig überarbeitete Auflage). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Ellger-Rüttgardt, S. (1983). Geschichte des Unterrichts mit Lernbehinderten. In H. Baier & U. Bleidick (Hrsg.), Handbuch der Lernbehindertendidaktik (S. 20-26). Stuttgart: Verlag W. Kohlhammer GmbH.

Engler, S. (1997). Zur Kombination von qualitativen und quantitativen Methoden. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Hrsg.), Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft (S. 118-130). Weinheim: Juventa Verlag.

Eye, A. v. (1994). Zum Verhältnis zwischen qualitativen und quantitativen Methoden in der empirisch-pädagogischen Forschung. In R. Olechowski & B. Rollett (Hrsg.), Theorie und Praxis. Aspekte empirisch-pädagogischer Forschung - quantitative und qualitative Methoden (S. 24-45). Frankfurt am Main: Peter Lang.

Faulstich-Wieland, H. & Nyssen, E. (1998). Geschlechtsverhältnisse im Bildungssystem – Eine Zwischenbilanz. In H.-G. Rolff, K.-O. Bauer, K. Klemm & H. Pfeiffer (Hrsg.), Jahrbuch der Schulentwicklung. Band 10. Daten, Beispiele und Perspektiven (S. 163-199). Weinheim: Juventa Verlag.

Filippou, G. & Christou, K. (1995). Didaktik der Mathematik. (Original erschienen unter: Η διδακτική των Μαθηματικών). Athen: Dardanos Verlag.

Filippou, G. (1992). Die mathematischen Kenntnisse von Absolventen des Gymnasiums (Original erschienen unter: Οι μαθηματικές γνώσεις των τελειόφοιτων του Γυμνασίου). In Griechische mathematische Gesellschaft (Hrsg.), Euklid C΄, 33-34-35 (9), 81-97.

Fischer, M. (1968).Wege zur inneren Differenzierung des Unterrichts durch programmierte Arbeitsmittel. Weinheim: Julius Beltz Verlag.

Flick, U. (1998). Qualitative Forschung. Theorie, Methoden, Anwendung in Psychologie und Sozialwissenschaften (3. Auflage). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH.

Franke, M. (1997). Missverständnisse oder mathematische Fehler? Grundschulunterricht, 44 (1), 30-33.

Friebertshäuser, B. (1997). Interviewtechniken – ein Überblick. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Hrsg.), Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft (S. 371-395). Weinheim: Juventa Verlag.

Gagatsis, A. & Kafidas, A. (1995). Schülerfehler in der Primar- und Sekundarstufe bei Analogieaufgaben (Original erschienen unter: Λάθη μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου σε προβλήματα αναλογιών). Erasmus ICP-94-G-2011-11 (S. 69-94). Gagatsis, A: Thessaloniki.

Gagné, R.M. (1975). Die Bedingungen des menschlichen Lernens. Hannover: Schroedel Verlag KG.

Gerster, H.D. (1982a). Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Freiburg: Herder.

Gerster, H.D. (1982b). Diagnose von Schülerfehlern beim schriftlichen Subtrahieren. Grundschule, 4, (14), 163-164.

Gerster, H.D. (1989). Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren. Mathematikunterricht, 12, (21), 26-29.

Giles, G. (1987). Ist Lehren ein Hindernis für Lehren? Mathematik lehren, 4, 6-10.

Ginsburg, H.P. & Opper, S. (1998). Piagets Theorie der geistigen Entwicklung (8., völlig überarb. und erg. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta

Gotovos, A. (1990). Logik der Schulrealität. (Original erschienen unter: Λογική του υπαρκτού σχολείου). Athen: Gutenberg.

Grissemann, H. (1989). Lernbehinderung heute: Psychologisch-anthropologische Grundlagen einer innovativen Lernbehindertenpädagogik. Bern: Hans Huber Verlag.

Heinzel, F. (1997). Qualitative Interviews mit Kindern. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Hrsg.), Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft (S. 396-413). Weinheim: Juventa Verlag.

Jürgens, E. (1998). Die `neue´ Reformpädagogik und die Bewegung offener Unterricht. Theorie, Praxis und Forschungslage (4., erw. Auflage). Sankt Augustin: Academia Verlag.

Kafousi, S. & Nziachristos, W. (1997a). Mathematische Kenntnisse von Erstklässlern (Original erschienen unter: Οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών της πρώτης τάξης). Pädagogische Untersuchung der Universität Athen, Pädagogische Fakultät, Fachbereich Mathematik und Informatik.

Kafousi, S. & Nziachristos, W. (1997b). Mathematische Kenntnisse von Zweitklässlern. (Original erschienen unter: Οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών της δευτέρας τάξης). Pädagogische Untersuchung der Universität Athen, Pädagogische Fakultät, Fachbereich Mathematik und Informatik.

Kafousi, S. (1994). Die Schülerfehler in der Mathematik und ihre Rolle in der Lehrerausbildung für die Grundschule. (Original erschienen unter: Τα λάθη των μαθητών στα μαθηματικά και ο ρόλος τους στην εκπαίδευση των δασκάλων του Δημοτικού Σχολείου). Unveröffentlichte Dissertation, Universität Athen.

Kanter, G.O. (1977). Lernbehindertenpädagogik – Gegenstandsbestimmung, Begriffserklärung; sowie: Lernbehinderungen und die Personengruppe der Lernbehinderten. In G. O. Kanter & O. Speck (Hrsg.), Handbuch der Sonderpädagogik (Pädagogik der Lernbehinderten, Bd. 4, S. 7-64). Berlin: Marhold.

Kanter, G.O. (1984). Lernbehinderungen und Lernbehinderte in sonderpädagogischer Sicht. Hagen: Fernuniversität Hagen, Fachbereich Erziehungs-, Sozial- und Geisteswissenschaften (Kurs 3453).

Kanter, G.O. (1994). Lernbehinderung: Personenkreis, Erscheinungsformen und Ursachen. Zeitschrift für Heilpädagogik, 45 (10), 687-690.

Karageorgos, D. (1996a). Die neuen Lehrpläne für das Fach Mathematik in den allgemeinbildenden Schulen. (Original erschienen unter: Το νέο αναλυτικό πρόγραμμα των Μαθηματικών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης). In griechisches Bildungsministerium (Hrsg.), Vorträge aus einem Fortbildungsseminar für die Schulräte aller Stufen. (Original erschienen unter: Εισηγήσεις στο επιμορφωτικό σεμινάριο για τους σχολικούς συμβούλους όλων των βαθμίδων), (S. 263-268). Athen: O.E.D.B.

Karageorgos, D. (1996b). Annäherung an die Didaktik von Sachaufgaben (Original erschienen unter: Μια προσέγγιση της διδασκαλίας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων). In griechisches Bildungsministerium (Hrsg.), Vorträge aus einem Fortbildungsseminar für Schulräte aller Stufen (S. 238-255). Athen: OEDB.

Kassotakis, M. (1981). Leistungsbewertung bei Schülern. (Original erschienen unter: Αξιολόγηση της επιδόσεως των μαθητών). Athen: Grigori Verlag.

Kipriotakis, A. (1989). Die „Sonderkinder" und ihre Erziehung (3. Auflage). (Original erschienen unter: Τα ειδικά παιδιά και η αγωγή τους). Heraklio: Psychotechniki Verlag.

Kirk, S. A. & Gallagher, J. J. (1983). Educating exceptional children. Boston: Houghton – Miffin Co.

Kirk, S.A. (1973). Die Erziehung abweichender Kinder. (Erschienen unter dem griechischen Titel: Εκπαίδευση αποκλινόντων παιδιών). Ins Griechische übertragen von Tsiboukis), K. Athen: Kremou 6.

Klein, G. (1999). Die Schüler der Förderschule (Schule für Lernbehinderte) in der Wahrnehmung der Sonderpädagogik. Zeitschrift für Heilpädagogik, 50 (1), 4-10.

Klewitz, G. & Köhnke, A. (1997). Fördern im Mathematikunterricht (IV) Gezielte Förderung - Was kann man tun? Grundschulunterricht, 44 (1), 39-41.

Klinger, W. & Maier, H. (1984). Praxis der inneren Differenzierung im Mathematik- und Physikunterricht. (Beiträge zur Schulpädagogik und Didaktik, Bd. 2, S. 1-54). Frankfurt (Main):R. G. Fischer Verlag.

Koliadis, E. (1995). Lernschwierigkeiten: Probleme und Perspektiven in der griechischen Bildungsrealität. (Original erschienen unter: Μαθησιακές Δυσκολίες. Προβληματισμοί και Προοπτικές στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα). Manuskript zur Vorlesung an der Universität Athen, Fachbereich Lehramt - Primarstufe.

Kormann, A. (1984). Konzepte der Veränderungs- und Lernmessung. In K. A. Heller (Hrsg.), Leistungsdiagnostik in der Schule (S. 117-124). Bern: Hans Huber Verlag.

Kornmann, R. & Schnattinger, C. (1989). Sonderschulüberweisungen ausländischer Kinder, Bevölkerungsstruktur und Arbeitsmarktlage. Oder: Sind Ausländerkinder in Baden-Württemberg „dümmer" als sonst wo? Zeitschrift für Sozialisationsforschung und Erziehungssoziologie, 9, 195-203.

Kornmann, R. (1998). Wie ist das zunehmende Schulversagen bei Kindern von Migranten zu erklären und zu beheben? VHN 67 (1), 55-68.

Kornmann, R., Burgard, P. & Eichling, H. M. (1999). Zur Überrepräsentation von ausländischen Kindern und Jugendlichen in Schulen für Lernbehinderte. Revision älterer und Mitteilung neuer Ergebnisse. Zeitschrift für Heilpädagogik, 50 (3), 106-109.

Kossiwaki, F. (1993). Allgemeine Didaktik. (Original erschienen unter: Γενική Διδακτική). Semestermanuskript, Universität Ioannina (S. 42-45).

Kotsis, K. (1996). Bildungsgesetze. (Original erschienen unter: Εκπαιδευτική Νομοθεσία). Athen: Dimitris Kleidas Verlag.

Kouroumplis, (1994). Die Rolle der institutionellen und gesetzlichen Interventionen beim Abbau von sozialen Vorurteilen. (Original erschienen unter: Ο ρόλος των θεσμικών και νομοθετικών παρεμβάσεων στη διαδικασία αποδυνάμωσης των κοινωνικών προκαταλήψεων). In Personen mit speziellen Bedürfnissen, Bd. 1 (S. 68-79). Athen: Ellinika Grammata.

Krauthausen, G. (1994). Arithmetische Fähigkeiten von Schulanfängern: Eine Computersimulation als Forschungsinstrument und als Baustein eines Softwarekonzeptes für die Grundschule. Wiesbaden: Dt. Univ. -Verlag.

Krauthausen, G. (1998). Lernen - lehren - Lehren lernen. Zur mathematik-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe. Leipzig: Klett Grunschulverlag.

Kretschmann, R. (1998). Lernbehindertenpädagogik 2000. In D. Schmetz & P. Wachtel (Hrsg.), Sonderpädagogischer Kongress 1998: Entwicklungen – Standorte – Perspektiven (S. 177-185). Würzburg: Verband Deutscher Sonderschulen - Fachverband für Behindertenpädagogik.

Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (1994). Empfehlungen zur sonderpädagogischen Förderung in den Schulen in der Bundesrepublik Deutschland. Beschluß des Kultusministerkonferenz vom 06.05.1994.

Kultusministerkonferenz (Hrsg.). (1977). Empfehlungen für den Unterricht in der Schule für Lernbehinderte (Sonderschule). Bonn: Luchterhand.

Lamnek, S. (1995). Qualitative Sozialforschung. Band 1 – Methodologie (3., korrigierte Auflage). Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

Langfeldt, H. P. (1984). Die klassische Testtheorie als Grundlage normorientierter (standardisierter) Schulleistungstests. In K. A. Heller (Hrsg.), Leistungsdiagnostik in der Schule (S. 65-98). Bern: Hans Huber Verlag.

Liegle, L. & Süssmuth, R. (1976). Struktur- und Entwicklungsprobleme des Bildungswesens in West- und Osteuropa. In O. Anweiler u. a. (Hrsg.), Bildungssysteme in Europa (S. 11-40). Weinheim: Beltz Verlag.

Lienert, G. A. & Raatz, U. (1994). Testaufbau und Testanalyse (5., völlig neuerarbeitete und erw. Auf.). Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

Lockstaedt-Schäffler, Meinhild v. (1993). Mit Kindern das Lernen lernen. In K. Burk (Hrsg.), Fördern und Förderunterricht. Mehr gestalten als verwalten. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule - Der Grundschulverband.

Lorenz, G. (1983). Zur Behandlung des schriftlichen Dividierens durch mehrstellige Divisoren. Unterstufe, 30 (2-3), 48-51.

Lorenz, J. H. & Radatz, H. (1993). Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag GmbH.

Lorenz, J. H. (1987). Lernschwierigkeiten und Einzelfallhilfe. Schritte im diagnostischen und therapeutischen Prozeß. Göttingen: Hogrefe, Verlag für Psychologie.

Lorenz, J. H. (1992). Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen: Hogrefe, Verlag für Psychologie.

Lorenz, J. H. (1997). Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig: Westermann Schulbuchverlag GmbH.

Lumer, B. (1992). Primarlehrerausbildung in Europa. Die Grundschulzeitschrift, 52, 33-36.

Lumer, B. (1998). Integrationspädagogik. In E. Nyssen & B. Schön (Hrsg.), Perspektiven für pädagogisches Handeln. Eine Einführung in Erziehungswissenschaft und Schulpädagogik, (S. 154-198). Weinheim: Juventa Verlag.

Markovitsis, M. & Tzouriadou, M. (1991). Lernschwierigkeiten. Theorie und Praxis (Original erschienen unter: Μαθησιακές Δυσκολίες. Θεωρία και Πράξη). Thessaloniki: Prometheus.

Massialas, B. (1975). Kreative Arbeit in der Schule. (Erschienen unter dem griechischen Titel: Δημιουργική εργασία στο σχολείο). Ins Griechische übertragen von Tsiboukis, K.. Athen: I. Tsiboukis.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein - Westfalen (Hrsg.). (1996). Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein - Westfalen: Mathematik.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein - Westfalen (Hrsg.). (1998). Gesetz zur Weiterentwicklung der sonderpädagogischen Förderung in Schulen. Erfahrungsbericht. Düsseldorf: o. V..

Muth, J. (1986). Integration von Behinderten: über die Gemeinsamkeiten im Bildungswesen. Essen: Neu-Dt.-Schule-Verl.-Ges.

Neuhaus-Siemon, E. (1994). Schule der Demokratie. Die Entwicklung der Grundschule seit dem ersten Weltkrieg. In D. Haarmann (Hrsg.), Handbuch Grundschule. Allgemeine Didaktik: Voraussetzungen und Formen grundlegender Bildung (Bd. 1, S. 14-25). Weinheim: Beltz Verlag.

Oehl, W. (1962). Der Rechenunterricht in der Grundschule: (zweites bis viertes Schuljahr); didaktisch - methodische Überlegungen für die tägliche Unterrichtsarbeit. Hannover: Schroedel Verlag.

Padberg, F. (1996). Didaktik der Arithmetik (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum, Akademischer Verlag.

Papas, A. (1995). Sprach- und Textdidaktik (Band 3). (Original erschienen unter: Διδακτική γλώσσας και κειμένων). Athen: Grigori Verlag.

Petroulakis, N. (1981). Programme, Ziele, Methoden. (Original erschienen unter: Προγράμματα, στόχοι, μεθοδολογία). Athen: Feleki Verlag.

Piaget, J. (1973a). To understand is to invent. A Structural Foundation for Tomorrow´s Education, verfasst 1971 für eine Kommission der UNESCO, New York.

Piaget, J. (1973b). Verstehen heißt erfinden. Stark gekürzte Übersetzung (durch E. Ch. Wittmann) des Aufsatzes Piaget (1973a).

Potari, D. (1989). Lernschwierigkeiten in der Mathematik der Grundschule. (Original erschienen unter: Δυσκολίες μάθησης των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο). Euklid C´, 21, (6), 3-22.

Preuss-Lausitz, U. (1993). Die Kinder des Jahrhunderts: zur Pädagogik der Vielfalt im Jahr 2000. Weinheim: Beltz Verlag.

Preuss-Lausitz, U. (1999). Die Schule benachteiligt die Jungen? Pädagogik, 5, 11-14.

Radatz, H. & Schipper, W. (1983). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

Radatz, H. (1980). Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.

Radatz, H. (1985). Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse im Mathematikunterricht. Mathematikunterricht, 6, 18-24.

Reichmann-Rohr, E. & Weiser, M. (1996).Geschichtliche Entstehung und Entwicklung von Schulen für Lernbehinderte. In: H. Eberwein (Hrsg.), Handbuch Lernen und Lern-Behinderungen. Aneignungsprobleme, neues Verständnis von Lernen, integrationspädagogische Lösungsansätze (S. 19-32). Weinheim: Beltz Verlag.

Rosemann, B. (1984). Formelle (standardisierte) Schulleistungstests. In K. A. Heller (Hrsg.), Leistungsdiagnostik in der Schule (S. 162-197). Bern: Hans Huber Verlag.

Saldern, M. v. (1992). Qualitative Forschung – quantitative Forschung: Nekrolog auf einen Gegensatz. Empirische Pädagogik, 6 (4), 377-399.

Saleh, L. (1996). Eine “Schule für alle“. Indem wir in unsere Lehrer investieren, optimieren wir die Schulen. (Original erschienen unter: Προς ένα σχολείο για όλους: επενδύοντας στους δασκάλους βελτιώνουμε τα σχολεία). In Ionios Schule (Hrsg.), Schule für alle: gemeinsamer Unterricht von Kindern mit und ohne speziellen Bedürfnissen (S. 96-111).

Salvaras, G. (1985). Die neuen Lehrpläne und Lehrbücher und das Fach Mathematik. (Original erschienen unter: Τα νέα αναλυτικά προγράμματα και βιβλία και τα μαθηματικά). In: Wissenschaftlicher Schritt, 6, 124-172.

Sander, A. (1987). Zur ökosystemischen Sichtweise in der Sonderpädagogik. Erfahrungen und Überlegungen aus einem Frühförderprojekt. In H. Eberwein (Hrsg.), Fremdverstehen sozialer Randgruppen: ethnographische Feldforschung in der Sonder- und Sozialpädagogik; Grundfragen, Methoden, Anwendungsbeispiele (S. 207-221). Berlin: Marhold.

Sander, A. (1988). Schulversagen aus ökosystemischer Sicht. Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, 57, 335-341.

Sander, A. (1994). Behinderungsbegriffe und ihre Konsequenzen für die Integration. In H. Eberwein, (Hrsg.), Behinderte und Nichtbehinderte lernen gemeinsam. Handbuch der Integrationspädagogik (S. 99-107). Weinheim: Beltz Verlag.

Sander, E. (1980). Einzelfall bei Schulschwierigkeiten: Ein Rahmenplan. Psychologie in Erziehung und Unterricht, 27, 243-251.

Sander, E. (1981). Lernstörungen. Ursache, Prophylaxe, Einzelfallhilfe. Stuttgart: W. Kohlhammer Verlag.

Sander, E. (1996). Lerntherapie bei einem lernschwachen Schüler: Theorie und Praxis. In C. Spiel, U. Kastner-Koller & P. Deimann (Hrsg.), Motivation und Lernen aus der Perspektive lebenslanger Entwicklung (S. 61-74). Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Scherer, P. (1994). Kleinschrittiges Vorgehen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: Mehr Rückschritt als Fortschritt? Beiträge zum Mathematikunterricht, 322-325.

Scherer, P. (1995). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht in der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. Heidelberg: Edition Schindele.

Scherer, P. (1996). Evaluation entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: Quantitative oder qualitative Forschungsmethoden? Heilpädagogische Forschung, 22 (2), 76-88.

Scherer, P. (1997). Lernen in kleinen Schritten oder in komplexen Umgebungen? Grundschule, 29 (3), 28-31.

Scherer, P. (1999). Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern. Band 1: Zwanzigerraum. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

Schiefele, U. & Schreyer, I. (1994). Intrinsische Lernmotivation und Lernen. Ein Überblick zu Ergebnissen der Forschung. Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 8 (1), 1-13.

Schipper, W. (1996). Kompetenz und Heterogenität im arithmetischen Anfangsunterricht. Die Grundschulzeitschrift, 96, 11-15.

Schmetz, D. (1999). Schwerpunkt Lernen. Zeitschrift für Heilpädagogik, 50 (4), 134-143.

Schopper, B. (1993). Schülerfehler im Mathematikunterricht – Grund zur Resignation oder Herausforderung? Erziehung und Unterricht, 143 (8), 466-469.

Schratz, M., Iby, M. & Radnitzky, E. (2000). Qualitätsentwicklung. Verfahren, Methoden, Instrumente. Weinheim: Beltz.

Schröder, U. (1990). Grundriß der Lernbehindertenpädagogik. Berlin: Edition Marhold.

Schweiger, F. (1992). Zur mathematischen Ausbildung der Mathematiklehrer. Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 4, 161-164.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der BRD (Hrsg.). (2000). Statistische Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz. Die Sonderschulen in der bundeseinheitlichen Schulstatistik 1989 bis 1998.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997). Wie Kinder rechnen. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag.

Sommer, N. (1985). Die Erfassung von Unterrichtseffekten durch Fehleranalysen. Mathematikunterricht, 6, 38-47.

Statistisches Bundesamt (Hrsg.). (1999). Bildung und Kultur. Fachserie 11, Reihe 1. Allgemeinbildenden Schulen, Schuljahr 1998/99. Stuttgart: Metzler-Poeschel.

Stock, H.-W. (1999). Sonderpädagogische Förderung in den Ländern der Bundesrepublik Deutschland. Nordrhein-Westfalen. Zeitschrift für Heilpädagogik, 4, 206-210.

Thornton, C.A. & Bley, N.S. (1995). Teaching Mathematics to students with Learning Disabilities (Third edition). Austin: Pro-Ed, Inc.

Trilianos, Th. (1995). Die didaktische Dimension der Lehrpläne und Lehrbücher in der Grundschulbildung. (Original erschienen unter: Η διδακτική διάσταση των αναλυτικών προγραμμάτων και των σχολικών βιβλίων της δημοτικής εκπαίδευσης). In Ausbildungsstätte „Platon" (Hrsg.), Lehrpläne und Lehrbücher in den allgemeinbildenden Schulen. Theorie und Praxis. (Original erschienen unter: Αναλυτικά προγράμματα και διδακτικά βιβλία στη γενική εκπαίδευση. Θεωρία και πράξη). Panhellenische Pädagogische Bildungskonferenz mit internationaler Beteiligung - Bericht, (S. 307-314). Athen: Ilektronikes Technes.

Troulis, G. (1991). Die Null als Fehlerquelle in der Mathematik. (Original erschienen unter: Το μηδέν ως αιτία πλάνης στα Μαθηματικά). In Griechische mathematische Gesellschaft (Hrsg.), Euklidis C΄, 8 (30-31), 61-83.

Troulis, G. (1992). Mathematik in der Grundschule. Didaktische Annäherung. (Original erschienen unter: Τα μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο. Διδακτική προσέγγιση). Athen: Grigori Verlag.

Tsiplitaris, A. (1995). Der heimliche Lehrplan in der Sozialisation durch die Schulklasse. (Original erschienen unter: Το κρυφό αναλυτικό πρόγραμμα στην κοινωνιοποιητική λειτουργία της σχολικής τάξης). In Ausbildungsstätte „Platon" (Hrsg.), Lehrpläne und Lehrbücher in den allgemeinbildenden Schulen. Theorie und Praxis. (Original erschienen unter: Αναλυτικά προγράμματα και διδακτικά βιβλία στη γενική εκπαίδευση. Θεωρία και πράξη). Panhellenische Pädagogische Bildungskonferenz mit internationaler Beteiligung - Bericht, (S. 235-250). Athen: Ilektronikes Technes.

Vainas, K. (1993). Der Mathematikunterricht im Übergang von der Grundschule zum Gymnasium. Eine analytisch-vergleichende Untersuchung der griechischen und deutschen mathematischen Lehrpläne und Mathematikbücher. Frankfurt: Peter Lang Verlag.

Valtin, R. (1996). Dem Kind in seinem Denken begegnen – Ein altes, kaum eingelöstes Postulat der Grundschuldidaktik. Zeitschrift für Pädagogik, 34. (Beiheft), 173-186.

Vernooij, M. A. (1998). Systemische Aspekte in der Lernbehindertenpädagogik. In U. Angerhoefer & W. Dittmann (Hrsg.), Lernbehindertenpädagogik: Eine institutionalisierte Pädagogik im Wandel (S. 37-50). Neuwied: Luchterhand.

Vester, F. (1998). Denken, Lernen, Vergessen (25. Aufl.). München: Deutscher Taschenbuchverlag.

Voigt, J. (1997). Unterrichtsbeobachtung. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Hrsg.), Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft (S. 785-794). Weinheim: Juventa Verlag.

Weinert, F. E. (1996). Warum, wozu und wodurch sollte zum Lernen motiviert werden? In C. Spiel, U. Kastner- Koller & P. Deimann (Hrsg.), Motivation und Lernen aus der Perspektive lebenslanger Entwicklung (S. 5-14). Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Wember, F. B. (1988). Sonderpädagogische Ansätze zu einer entwicklungspsychologisch begründeten Unterrichtskonzeption nach Piaget. Zeitschrift für Heilpädagogik, 39 (3), 151-163.

Wember, F. B. (1989). Die sonderpädagogische Förderung elementarer mathematischer Begriffsbildung auf entwicklungspsychologischer Grundlage: Das Beispiel des Zahlbegriffs. Zeitschrift für Heilpädagogik, 40 (7), 433-443.

Wember, F. B. (1991). Ein argumentativer Versuch über Möglichkeiten und Grenzen des Einfühlenden Verstehens als Methode sonderpädagogischer Forschung und Praxis. Heilpädagogische Forschung, 17 (2), 61-73.

Wember, F. B. (1994). Möglichkeiten und Grenzen der empirischen Evaluation sonderpädagogischer Interventionen in quasi-experimentellen Einzelfallstudien. Heilpädagogische Forschung, 20 (3), 99-117.

Wember, F. B. (1997). Förderunterricht bei Lernproblemen im Lernbereich Mathematik durch mathematische Lebens- und Umweltkunde mit Hand, Herz und Verstand? In U. Heimlich (Hrsg.), Zwischen Aussonderung und Integration. Schülerorientierte Förderung bei Lern- und Verhaltensschwierigkeiten (S. 174-192). Neuwied: Luchterhand Verlag GmbH.

Wember, F. B. (1998). Zahlbegriff und elementares Rechnen. Vorschläge zur Diagnose und Intervention bei Kindern mit Lernstörungen. Sonderpädagogik, Kursnummer 4574-1-01-51.

Wendeler, J. (2000). Förderdiagnostik für Grund- und Sonderschulen. Praxisorientierte Entwicklung von Lernzieltests. Weinheim: Beltz Verlag.

Wenzel, H. (1987). Unterricht und Schüleraktivität. Probleme und Möglichkeiten der Entwicklung von Selbststeuerungsfähigkeiten im Unterricht. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Winter, H. (1989). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, B. (1997). Konsequenzen der KMK-Empfehlungen vom 6. Mai für die sonderpädagogische Förderpraxis. In U. Heimlich (Hrsg.), Zwischen Aussonderung und Integration: Schülerorientierte Förderung bei Lern- und Verhaltensschwierigkeiten (S. 26-47). Neuwied: Luchterhand.

Wittmann, E. Ch. (1982). Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern: eine Einführung in psychologisch-didaktische Experimente. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E.Ch. (1992). Üben im Lernprozeß. In E.Ch. Wittmann, & G.N. Müller (Hrsg.), Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen (S. 175-182). Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (1994a). Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr. Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E.Ch. et al. (1994b). Das Zahlenbuch. Mathematik im 1. Schuljahr. Lehrerband. Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E.Ch. et al. (1995a). Das Zahlenbuch. Mathematik im 2. Schuljahr. Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E.Ch. et al. (1995b). Das Zahlenbuch. Mathematik im 2. Schuljahr. Lehrerband. Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E.Ch. et al. (1996a). Das Zahlenbuch. Mathematik im 3. Schuljahr. Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E.Ch. et al. (1996b). Das Zahlenbuch. Mathematik im 3. Schuljahr. Lehrerband. Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E.Ch. et al. (1997a). Das Zahlenbuch. Mathematik im 4. Schuljahr. Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E.Ch. et al. (1997b). Das Zahlenbuch. Mathematik im 4. Schuljahr. Lehrerband. Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wougioukas, A. (1985). Die neuen Lehrpläne und Lehrbücher und der Sprachunterricht. (Original erschienen unter: Τα νέα αναλυτικά προγράμματα και βιβλία και το γλωσσικό μάθημα). In: Wissenschaftlicher Schritt, 6, 9-76.

Zoniou-Sideri, A. (1997). Die Integration der behinderten Kindern in der vorschulischen und schulischen Erziehung. (Original erschienen unter: Η ένταξη των αναπήρων παιδιών στην προσχολική και σχολική εκπαίδευση). In M. Kaila, N. Polemikos & G. Filippou (Hrsg.), Personen mit speziellen Bedürfnissen; Bd. 2 (S. 768-777). Athen: Ellinika Grammata.

ANHANG

In den nachfolgenden Tabellen werden neben den Abkürzungen für die systematischen Fehler drei weitere Abkürzungen verwendet: Σ steht für *Summe der bearbeiteten Aufgaben*, R für *richtig gelöste Aufgaben* und U für *nicht bearbeitete Aufgaben*.

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch.	1												2											1		1				13	8	-
2. Sch.	1		1			2				2											1			2		1				14	6	2
3. Sch.																		1			1				1					14	10	-
4. Sch.		1											1					1				1			1					15	13	-
5. Sch.										3							1	2												7	1	2
6. Sch.	2	2				1			1				4					1		2	1									15	8	1
7. Sch.														1	1					2				1	6					14	7	1
8. Sch.		1		1								1		1		1				1	1			4		1				13	3	1
9. Sch.		1																		1				3						15	10	-
10. Sch.																		1												6	1	1
11. Sch.																			1											11	10	-
12. Sch.										1																				8	6	1
13. Sch.		1					1														1									15	11	1
14. Sch.																1														15	14	-
15. Sch.		1																								1				14	12	-
16. Sch.		1													1				1						1					15	13	-
17. Sch.	2	2											1																	15	10	1
18. Sch.										1								1												9	5	2
19. Sch.		1											2										1							16	13	-
20. Sch.																														-	-	

Tabelle 26: Klasse 1 (5. Schule / Kavala)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch.													3		1	1		2		1	2		1						16	8	1
2. Sch.													1							1		1							16	10	3
3. Sch.		2			1									2					1	5	3			1					16	3	9
4. Sch.		2											1							1	1								16	13	2
5. Sch.													1					1		1	1								16	14	1
6. Sch.													1																9	6	1
7. Sch.		1			1	1							1				1	2			3		1						12	3	7
8. Sch.														1															16	15	-
9. Sch.		1	4										1							2								1	16	10	2
10. Sch.		1				2				1													1		1				10	3	4
11. Sch.							1						3																14	10	2
12. Sch.		2					1						2									1	1						14	8	1
13. Sch.		2																		1	1								16	13	1
14. Sch.		2											1	1						1									16	11	1
15. Sch.																													-	-	
16. Sch.																				1									16	15	-
17. Sch.		1																	1	1	1								3	1	-
18. Sch.													1									1	1		1				15	11	-
19. Sch.		5		1						1	2		1	1					2	4	2		1						13	1	5
20. Sch.													3						3	1	1								15	10	2

Tabelle 27: Klasse 2 (5. Schule / Kavala)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch.																						1								10	8	2
2. Sch.																1														8	7	-
3. Sch.																														-	-	
4. Sch.	1	4											2							1	2	1							1	9	3	2
5. Sch.		1											3					1		1				2						16	9	-
6. Sch.																		3	1	1				3					1	15	9	1
7. Sch.													5		1			1			1									16	9	-
8. Sch.		1											1								1	1		2	2		1			11	2	1
9. Sch.													1								1			2	2					16	10	2
10. Sch.		3				1							1					1			1								1	9	4	2
11. Sch.		3								3								1	1	1	4	1		1		1				7	-	1
12. Sch.																			1	1				2		1				5	-	3
13. Sch.		1																						1	16					15	5	1
14. Sch.		3												1					2	1	1				1					9	1	3

Tabelle 28: Klasse 3 (16. Schule / Kavala)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch.		1				1									1									2						16	12	1
2. Sch.		1																	1											16	14	1
3. Sch.						2							1																	16	12	3
4. Sch.						2			1									1						1						15	10	2
5. Sch.													1					1				1		1		1				15	10	1
6. Sch.		5				1	1	1					1						2	1				4						16	9	4
7. Sch.		11				1							2								1									16	7	-
8. Sch.																																
9. Sch.																																
10. Sch.					1			1												3										7	-	5
11. Sch.	1	1											3	1							5			2						11	2	1
12. Sch.		2		1		1							1		1		1	2		2	2			4						16	2	2
13. Sch.		1			1													1		3	1	5		3	1		1			15	4	-
14. Sch.		1		1			1			1			1		1			1			1					1		1		8	1	3

Tabelle 29: Klasse 4 (16. Schule / Kavala)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	01	02	03	04	05	06	Σ	R	U
1. Sch.		2		1		2															1						1			16	5	-
2. Sch.												1	1	1	1									2						15	10	1
3. Sch.		1					1						2							2	1									14	8	2
4. Sch.		4																	1		2			1	2					10	4	2
5. Sch.															2					1				2	1					15	11	1
6. Sch.																									1		1			16	15	-
7. Sch.																									1					16	15	-
8. Sch.																											2			16	14	1
9. Sch.	1	2			1								4		1			4			3			1			1			16	5	-
10. Sch.	1	1											2		1						1			1	4	1	2			16	6	-

Tabelle 30: Klasse 5 (10. Schule / Kavala)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch.																														-	-	
2. Sch.	1														1					4	1			1						15	9	1
3. Sch.	1			2			1						1			2				2				3						14	6	2
4. Sch.					1					1							1				1			2	2					15	6	2
5. Sch.	1	1								1					2					2										15	8	2
6. Sch.		1														1		3		2	1		1	1						12	6	2
7. Sch.																				1	1		1	1	3	1				12	7	1
8. Sch.													1			1		3	3			1		1					1	15	7	1
9. Sch.													2			1		1											1	16	11	2
10. Sch.		1													1															16	14	-
11. Sch.																								1						16	15	-
12. Sch.																														15	15	-

Tabelle 31: Klasse 6 (10. Schule / Kavala)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch		1											2		1						1									16	13	-
2. Sch.		2																1						2	1					11	5	2
3. Sch.		1					1						2												3					13	7	1
4. Sch.						1							1			1		1						1	2					9	3	2
5. Sch.													1																	10	9	-
6. Sch.																														-	-	
7. Sch.	1	2				1							1					2												8	4	-
8. Sch.																														-	-	
9. Sch.													1					1						2		2				5	-	3
10. Sch.													2					1			1			1						13	7	1
11. Sch.													3											2						13	10	-
12. Sch.	1		1										1			1		2			1									14	9	-
13. Sch.													1														1			16	13	1
14. Sch.																					1									12	9	2
15. Sch.																						1			1				1	13	11	1
16. Sch.													1					1			1			1						14	10	1
17. Sch.																														-	-	
18. Sch.	1					1							1					1			4			2						11	4	1
19. Sch.	1												2					1			1			1						13	7	-
20. Sch.							1													1				3	1					9	2	3
21. Sch.	1	2				1							2											2			1			13	7	2
22. Sch.		1												3				1			1									13	10	1

Tabelle 32: Klasse 7 (17. Schule / Kavala)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch		4							1							1	1		1		2			1						7	1	2
2. Sch.		2						2									1	2	1	4					1	1				10	1	2
3. Sch.		8		1		1							1					2	2		3			3	8					15	2	4
4. Sch.		3						1												1	1						1			13	8	3
5. Sch.		2							1		4								1	1	3			4	2					12	2	6
6. Sch.																														-	-	
7. Sch.																														-	-	
8. Sch.																														-	-	
9. Sch.																														-	-	
10. Sch.																														-	-	
11. Sch.													1																	16	15	-
12. Sch.													1					1						3						16	13	1
13. Sch.		4											2					4		1	3	2	1	1						12	3	-
14. Sch.		2						2									1			1	2				2	1				9	3	2
15. Sch.																														-	-	
16. Sch.																														-	-	
17. Sch.																														-	-	
18. Sch.		2		1											1					2	2			1	5					16	7	3
19. Sch.	2	6												1			2			1	2			1						14	3	2
20. Sch.																								1	1					-	-	
21. Sch.					1									2						4				1	2					13	5	2
22. Sch.																					1									16	15	1

Tabelle 33: Klasse 8 (Eleftheroupoli)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch.		1														1				3										16	10	1
2. Sch.		2		1									1	1						1	3			2		2				11	3	3
3. Sch.																									2	1				11	8	-
4. Sch.																						1		1						5	3	-
5. Sch.																														-	-	
6. Sch.		3															1		3	1				1	2					12	7	2
7. Sch.													2			1		1												10	7	-
8. Sch.																								1						1	-	
9. Sch.																														-	-	
10. Sch.																														-	-	
11. Sch.																														-	-	
12. Sch.																								1		1				4	1	2
13. Sch.		1								3			2						1	5	1			3		1			1	16	6	3

Tabelle 34: Klasse 9 (Melissokomeio)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch.		3					1												1											16	12	-
2. Sch.	1	3											1					1		2				2	2					10	2	-
3. Sch.																														-	-	
4. Sch.		3				1														1					2					13	7	-
5. Sch.		1					2														1								1	7	-	-
6. Sch.																														-	-	
7. Sch.		4											1								1			2						11	3	-
8. Sch.																		1	1				1	1						5	2	1
9. Sch.																														-	-	
10. Sch.		1			1								1					1												14	11	-
11. Sch.		2											1											2						10	6	-
12. Sch.		7							1				2							1	1	1		3						15	6	4
13. Sch.		7											1					1		1	1			3						15	8	5
14. Sch.	4																							2					1	13	5	1

Tabelle 35: Klasse 10 (Melissokomeio)

Schüler	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	V_1	V_2	V_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6	Σ	R	U
1. Sch.													3								1			3						15	10	-
2. Sch.		1											1			2		1			2			4	1					15	6	-
3. Sch.		1											1					2						1						15	11	-
4. Sch.		2								4						1								2						13	6	2
5. Sch.	1	2																	2	1	4			3						12	5	2
6. Sch.		1															1			1				1						12	6	2
7. Sch.		1			1																1			1	1					14	10	-
8. Sch.		1											2								3									15	10	3
9. Sch.		2											2								1									16	11	2
10. Sch.		1	1																		1			1						13	9	1
11. Sch.						1									1									3						16	10	1
12. Sch.																		1			1	1		5						16	10	-
13. Sch.						1							4						1					2						15	9	1
14. Sch.		1											3					2		1	1									14	8	3
15. Sch.		5											3		1						2			1					1	14	7	1
16. Sch.		1											1						2											10	7	-

Tabelle 36: Klasse 11 (15. Schule / Kavala)

Schüler	S1	S2	S3	H1	H2	H3	H4	H5	H6	V1	V2	V3	P1	P2	P3	P4	P5	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	O1	O2	O3	O4	O5	O6	Σ	R	U
1. Sch.		2											4							2	2			2						15	8	3
2. Sch.																														15	15	-
3. Sch.	2					1							1																	16	12	-
4. Sch.							1																							16	15	-
5. Sch.																		1			1			1						14	11	2
6. Sch.																				2				1						7	4	2
7. Sch.	1	2											1							2										15	10	2
8. Sch.													1								2									16	13	-
9. Sch.		1																						1	1					15	12	-
10. Sch.		1																1		1	2			1		2				9	3	2
11. Sch.					1								2					1		1	1			3						15	9	2
12. Sch.		1				1				2			1							3				2	1				1	15	6	2

Tabelle 37: Klasse 12 (15. Schule / Kavala)